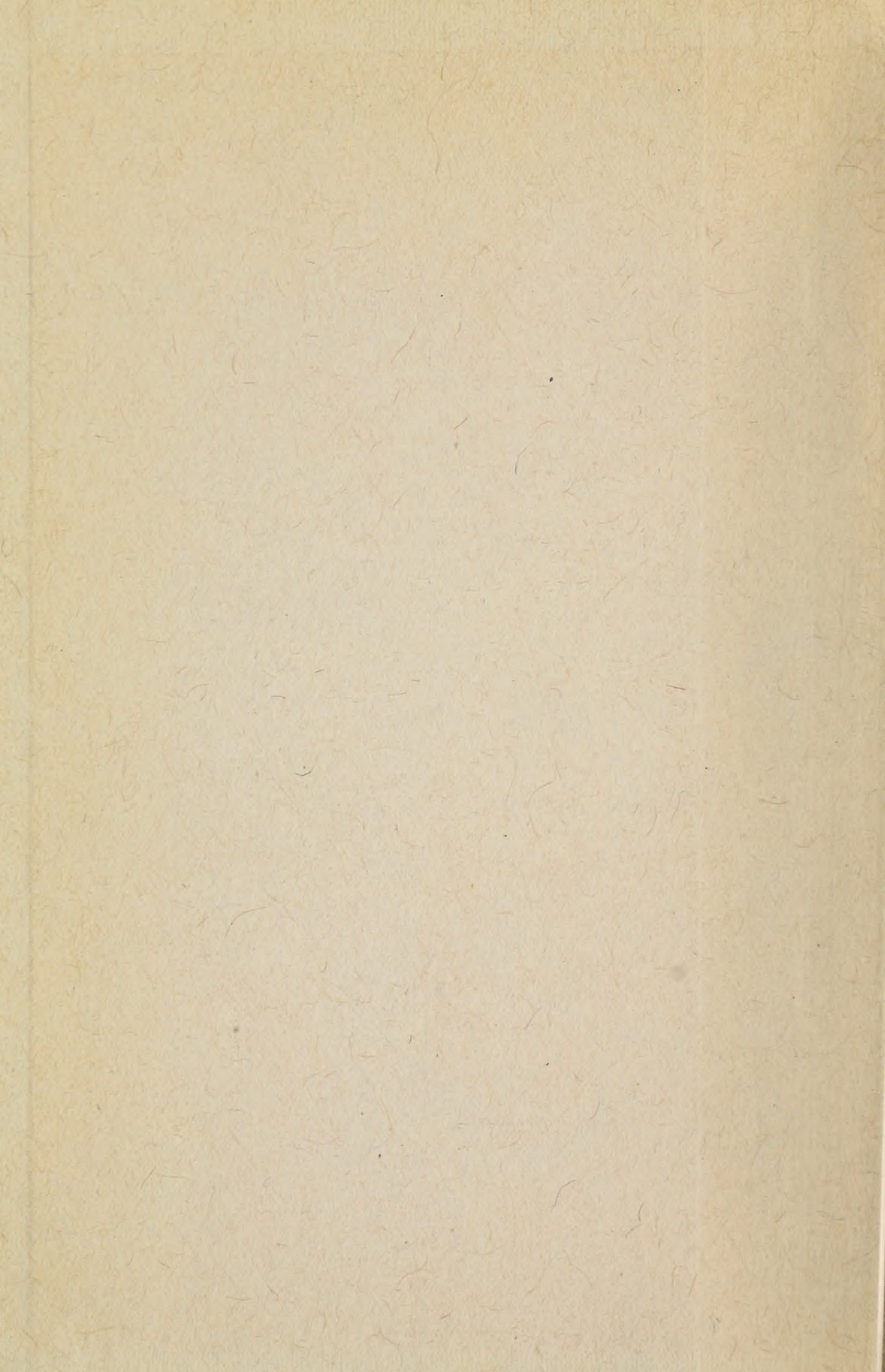
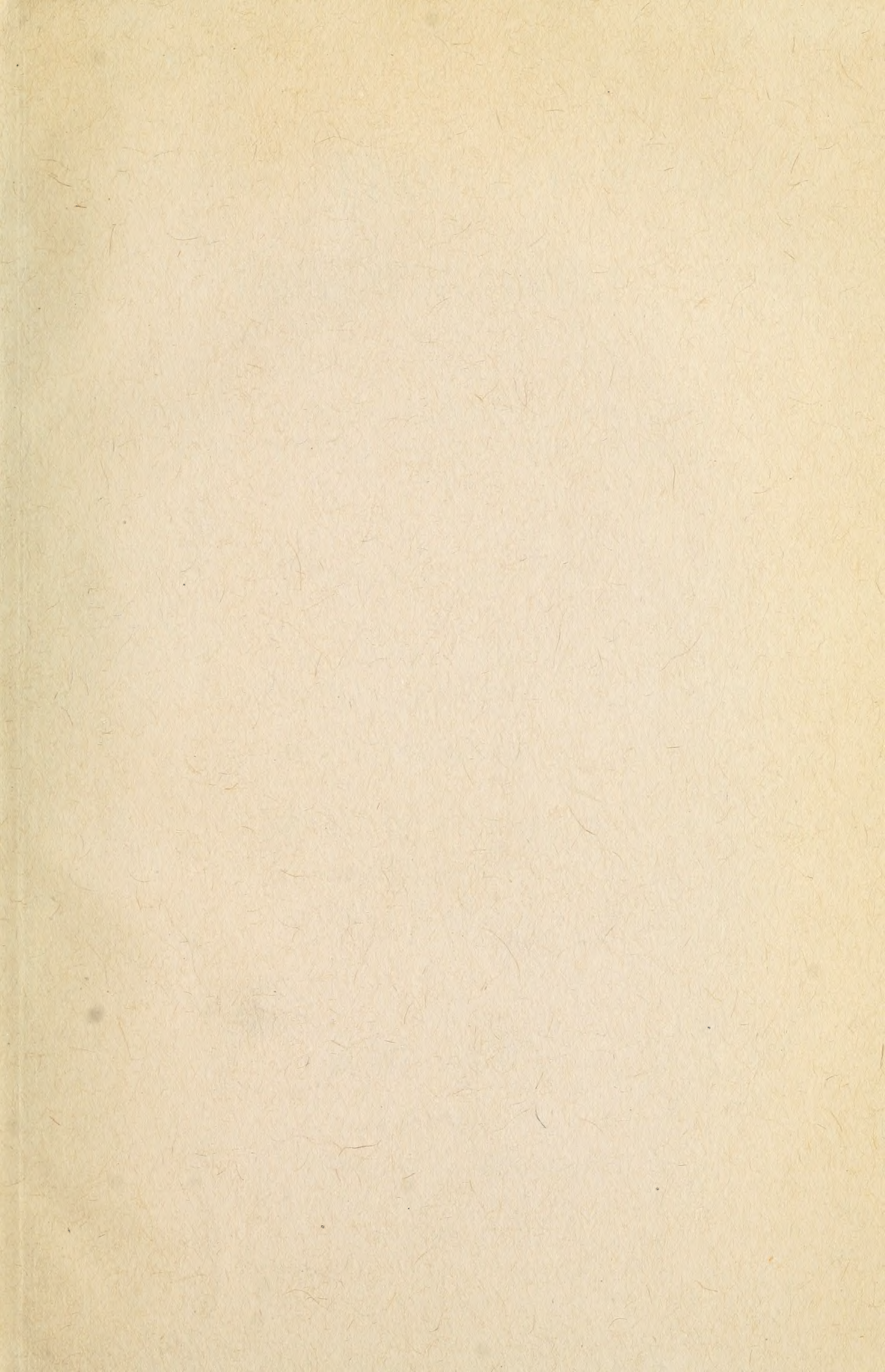
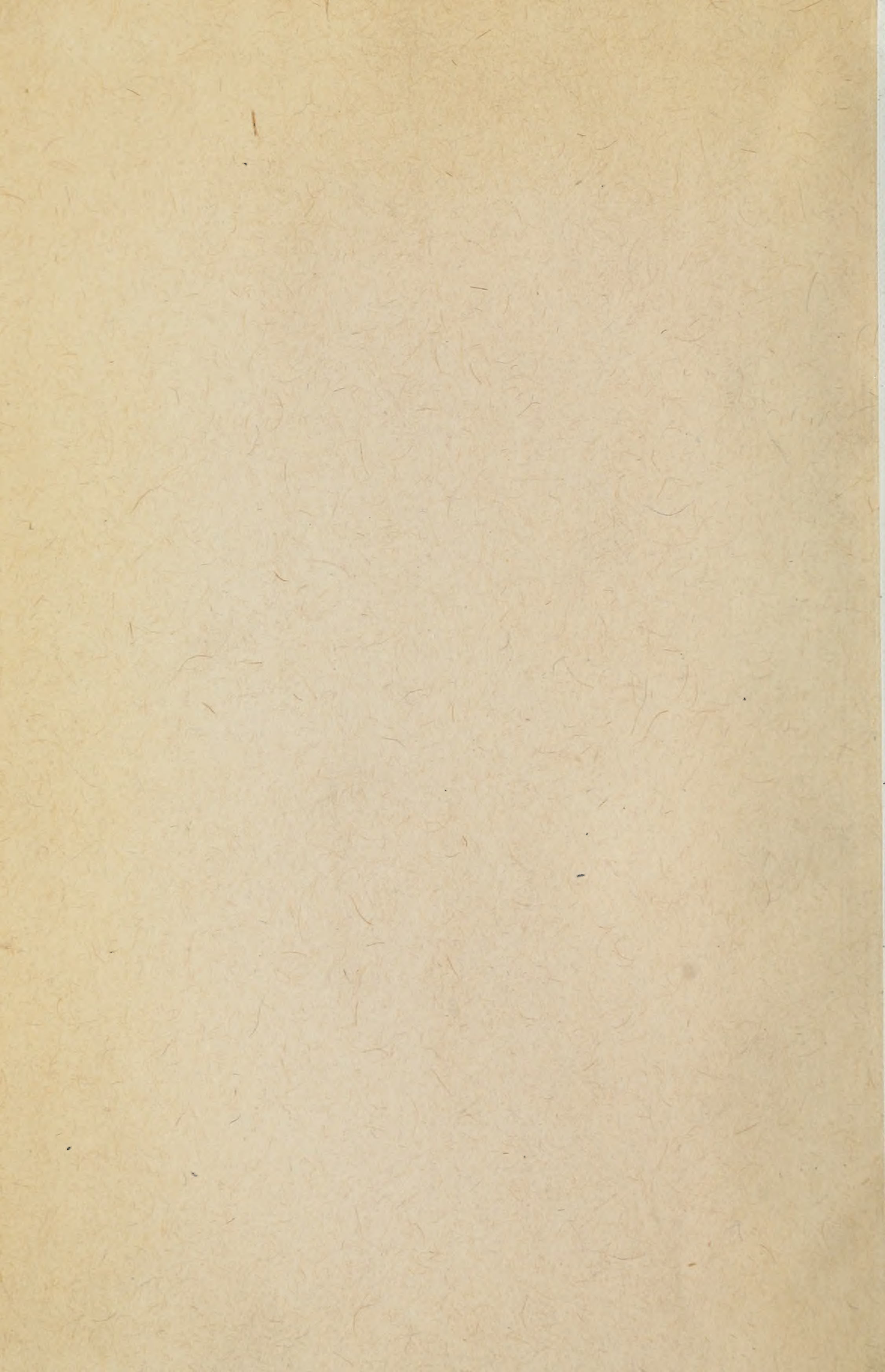
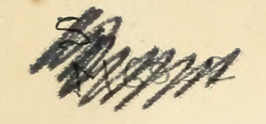










AUGUST FERDINAND MÖBIUS

GESAMMELTE WERKE.

HERAUSGEGEBEN AUF VERANLASSUNG DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

VIERTER BAND

HERAUSGEGEBEN

VON

W. SCHEIBNER.

MIT EINEM NACHTRAGE

HERAUSGEGEBEN VON

F. KLEIN.

LEIPZIG
VERLAG VON S. HIRZEL
1887.

Vorwort.

Der vorliegende vierte und letzte Band der gesammelten Werke von Möbius enthält ausser den *Elementen der Mechanik des Himmels* eine Reihe von Abhandlungen theils astronomischen und dioptrischen, theils mathematischen Inhalts, in deutscher wie lateinischer Sprache, in letzterer sind namentlich verschiedene Universitätsprogramme verfasst. Die Reihenfolge dieser Abhandlungen ist nicht ohne eine gewisse Willkür gewählt, wenn auch die Zeitfolge einerseits und die Verwandtschaft des Inhalts andererseits nicht ausser Berücksichtigung geblieben sind. Bei einzelnen Stellen hat sich der Herausgeber (als solche bezeichnete) Anmerkungen hinzuzufügen gestattet, hauptsächlich in den *Elementen der Mechanik* (*des Himmels*), wo dergleichen Anmerkungen leicht hätten vervielfältigt werden können. In der That sind durch die Fortschritte der Astronomie seit dem Erscheinen des Werkes im Jahre 1843 eine Anzahl namentlich numerischer und literarischer Daten der Verbesserung oder Vervollständigung fähig geworden, so dass sich der Herausgeber die Frage vorgelegt hat, ob nicht eine durchgängige Umarbeitung, bez. Umrechnung solcher Daten nach den neueren Forschungen und bez. Maassbestimmungen wünschenswerth wäre. Wenn derselbe gleichwohl von einer solchen Umarbeitung abgesehen und sich nur auf die nothwendigsten Andeutungen resp. Hinweise auf neuere Resultate beschränkt hat, so hat dabei eine doppelte Erwägung den Ausschlag gegeben. Einmal wird Niemand das Buch zur Hand nehmen, um die neuesten und genauesten astronomi-

schen Werthbestimmungen daselbst aufzusuchen oder daraus kennen zu lernen; wo es wesentlich nur auf die Erläuterung der Methoden und den Nachweis ihrer Anwendbarkeit ankommt, reichen die von Möbius selbst gewählten Zahlen vollständig aus. Zum Anderen würden, wenn die vor 50 Jahren gebrauchten numerischen Werthe durch die jetzt als die genauesten geltenden ersetzt würden, nach abermals 50 Jahren die neuen Daten eben so antiquirt und verbesserungsbedürftig sein, wie heute die Möbius'schen Zahlen.

Da im Uebrigen die bei der Herausgabe befolgten Grundsätze dieselben geblieben sind, wie bei den früheren Bänden, so bleibt hier wenig hinzuzufügen. Die Figuren sind wiederum allenthalben in den Text aufgenommen und hätten hier und da etwas correcter ausfallen können. Die Habilitationsschrift des Verfassers aus dem Jahre 1815 konnte einen Zusatz dreier Paragraphen aus dem Originalmanuscript erhalten, welches sich in Möbius' hinterlassenen Papieren vorgefunden hat. Ausserdem ist dem Nachlasse nur die Bearbeitung einer akustischen Aufgabe entlehnt, welche zu einer Correspondenz zwischen Möbius und Grassmann Anlass gegeben hat, deren Mittheilung nicht ohne Interesse zu sein schien. — Aus der kleinen Schrift über die *Leipziger Universitätssternwarte* aus dem Jahre 1823 findet sich der Anhang geometrischen Inhalts bereits im I. Bande abgedruckt, derselbe ist mithin hier S. 476 weggeblieben. — Von den beiden für ein grösseres Publicum bestimmten astronomischen Schriften Möbius' über den *Halley'schen Kometen* und die *Hauptsätze der Astronomie* sind mit Rücksicht auf den populären Charakter am Schlusse des Bandes bloss die Titel und einige Inhaltsangaben aufgenommen worden. Nicht wieder abgedruckt endlich wurden ein paar gelegentlich in astronomischen Zeitschriften publicirte, isolirte Beobachtungen, sowie eine auf den Werth 0^0 bezügliche Notiz (*Beweis der Gleichung* $0^0 = 1$, *nach J. F. Pfaff*, Crelle's Journal, Bd. XII, S. 134—136, wozu die in demselben Journale Bd. XI, S. 272 und Bd. XII, S. 292 enthaltenen Bemerkungen zweier Ungenannten zu vergleichen sind), und eine in den *Leipziger Berichten* vom 1. Juli 1856, S. 113—115 abgedruckte, die Wurzeln biquadratischer Gleichungen betreffende Bemerkung zu einem Aufsatze von Drobisch *über die im fünften Buche der Conica des Apollonius behandelte Aufgabe*.

Bei der Correctur dieses Bandes bin ich in eingehender Weise von Herrn Dr. C. Reinhardt, jetzt Oberlehrer an der Fürstenschule in Meissen, unterstützt worden, wofür ich demselben zu aufrichtigem Danke verpflichtet bin.

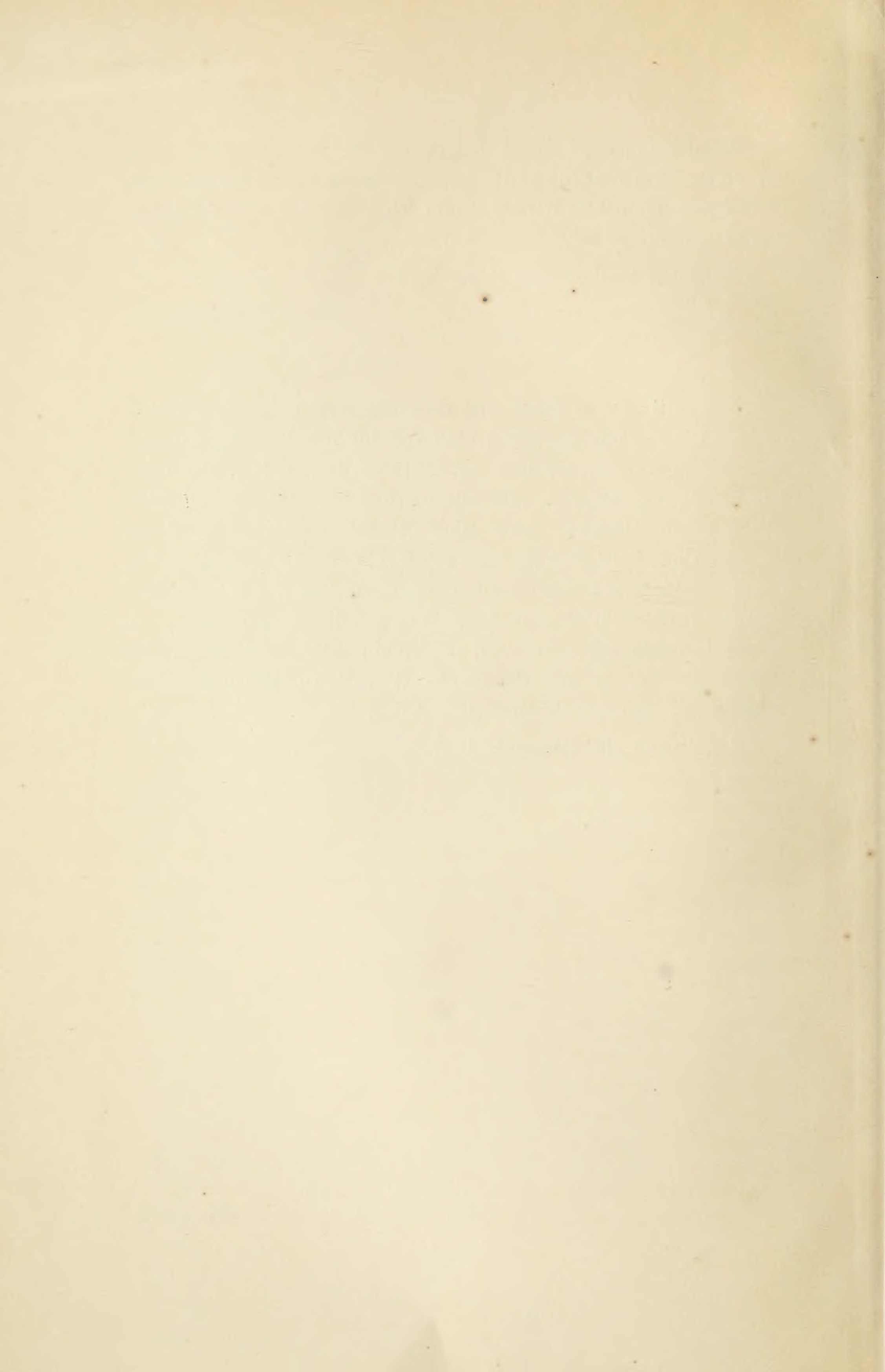
Leipzig, Weihnachten 1886.

Wilh. Scheibner.

Dem vorliegenden Bande sind nach Beschluss der K. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften noch verschiedene Mittheilungen und Zusammenstellungen, die Herr Dr. Reinhardt redigirte, als Nachtrag hinzugefügt worden. Dieselben bringen zunächst aus Möbius' Nachlass Bruchstücke von zwei bisher unbekannten Abhandlungen, die in mehrfachem Betracht interessant scheinen, dann vor allem den schon in der Vorrede zum zweiten Bande der gesammelten Werke in Aussicht genommenen Bericht über die Entstehung und den Zusammenhang von Möbius' hauptsächlichen Arbeiten, endlich ein chronologisch geordnetes Verzeichniss der in den Bänden I—IV nach sachlichen Gesichtspunkten angeordneten Schriften und Abhandlungen.

Göttingen, im November 1887.

F. Klein.



Inhalt des vierten Bandes.

NACHTRAG.

DIE ELEMENTE

DER

MECHANIK DES HIMMELS

AUF NEUEM WEGE

OHNE HÜLFE HÖHERER RECHNUNGSARTEN

DARGESTELLT

VON

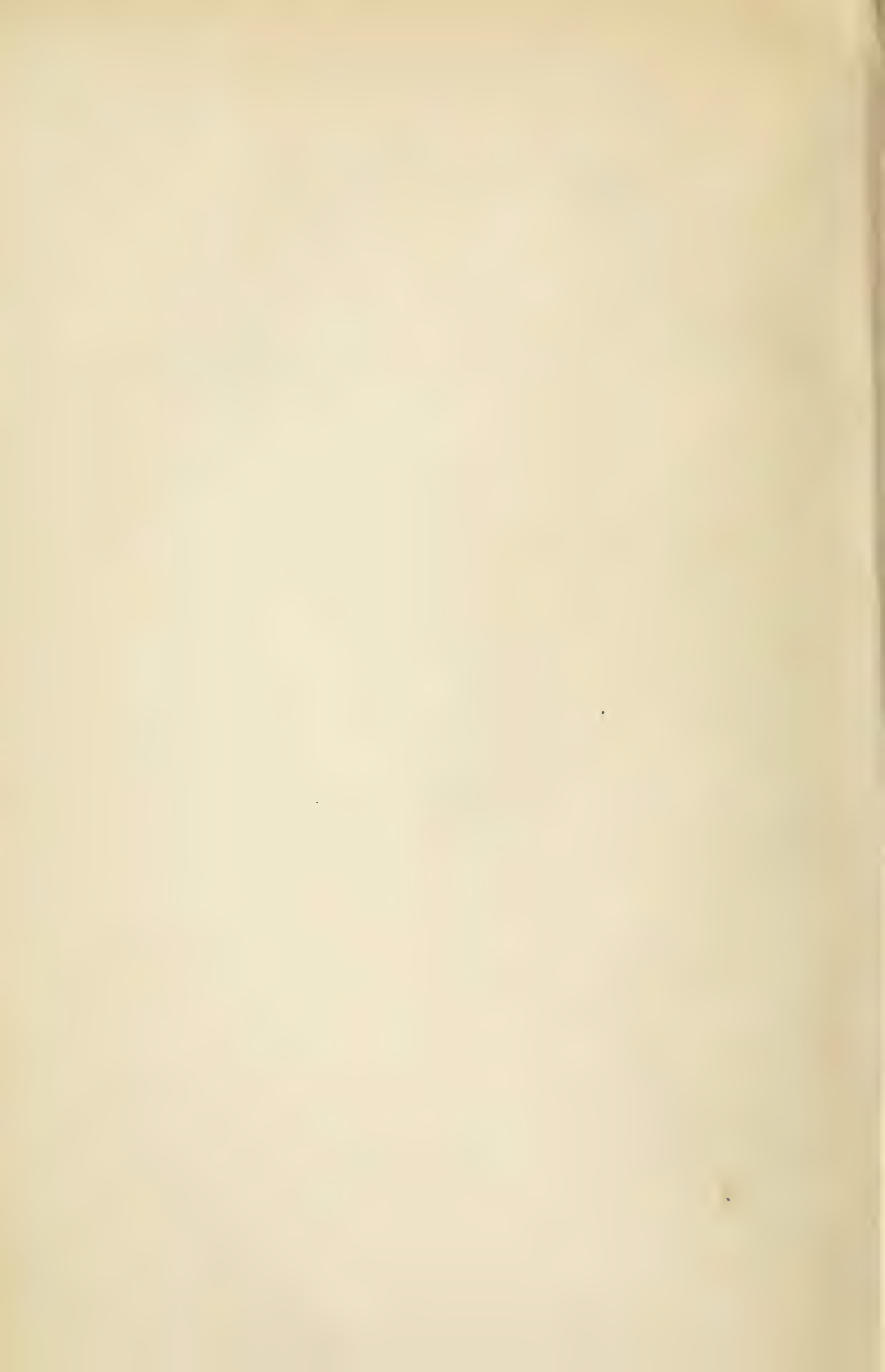
AUGUST FERDINAND MÖBIUS

PROFESSOR DER ASTRONOMIE ZU LEIPZIG, CORRESPONDENTEN DER KÖNIGL. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN BERLIN UND MITGLIEDE DER NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT IN LEIPZIG.

LEIPZIG

WEIDMANN'SCHE BUCHHANDLUNG

1843.



Vorrede.

Die vorliegende Schrift hat die fortschreitende Bewegung der Himmelskörper und die Kräfte, durch welche diese Bewegung erzeugt wird, zu ihrem Gegenstande, und behandelt somit den durch Newton begründeten und von den vorzüglichsten Mathematikern und Astronomen der späteren Zeit bis in das feinste Detail ausgebildeten Theil der Naturforschung. Gewiss war es jederzeit vielen Freunden der Astronomie und der Naturwissenschaften wünschenswerth, nicht bloss die höchst interessanten Resultate dieser Untersuchungen, sondern auch ihren inneren Zusammenhang und ihre Entwickelung aus den ersten Principien, und diese Entwickelung nicht bloss durch eine übersichtliche Erläuterung, sondern streng mathematisch begründet, kennen zu lernen. Allein nur Wenigen unter ihnen war es möglich, diesen Wunsch zu befriedigen, weil das Studium der Werke, in denen die gedachten Forschungen niedergelegt sind, nicht wenig Zeit und beträchtliche Vorkenntnisse aus der höheren Analysis erfordert. Ich glaube daher Vielen einen angenehmen Dienst zu erweisen, wenn ich ihnen in dieser Schrift einen Weg zeige, auf welchem sie, ohne andere mathematische Kenntnisse, als die, welche schon auf den Schulen erlernt werden, zu besitzen, mit den Geheimnissen der planetarischen Bewegungen sich in Kurzem vertraut machen können.

Die Schrift zerfällt in vier Abschnitte.

Der erste enthält die zum Verständnisse des Folgenden erforderlichen Lehren der Dynamik, und dürfte sich von den bisherigen Darstellungsweisen dieser Wissenschaft besonders dadurch unterscheiden, dass ich mehr als gewöhnlich nach Veranschaulichung der Begriffe und Sätze mit Hülfe einfacher geometrischer Betrachtungen gestrebt habe; und nächstdem dadurch, dass ich die in der Dynamik

unentbehrlichen Elemente der Differentialrechnung so weit, als es für den nächsten Bedarf nöthig war, aus dem Begriffe der Bewegung selbst erst entwickelt und sie demgemäss als eine Rechnung mit den Geschwindigkeiten hingestellt habe, mit denen sich von der Zeit abhängige Grössen ändern.

Bei dieser Darstellung der Dynamik spielt besonders die gleich zu Anfang behandelte Lehre von der Zusammensetzung gerader Linien eine wichtige Rolle. Weil Geschwindigkeiten und Kräfte ihrer Richtung und Grösse nach als gerade Linien sich darstellen lassen, so ist mit der Zusammensetzung gerader Linien zugleich die von Geschwindigkeiten und Kräften erklärt; auch die Zusammensetzung irgend welcher Bewegungen von Punkten wird sehr einfach auf die von geraden Linien zurückgeführt; späterhin wird auf dieselbe Lehre die Theorie des Schwerpunktes gegründet, und endlich wird eben daraus noch die Zusammensetzung ebener Flächen abgeleitet. — Somit erscheinen die Hauptgegenstände der Dynamik durch den Begriff der geometrischen Zusammensetzung, wie durch einen Faden, mit einander verbunden, und ich glaube, dass die hier und da neuen Darstellungsweisen, zu denen ich durch diesen Faden geleitet worden, wegen ihrer Einfachheit und Anschaulichkeit einige Berücksichtigung verdienen.

Mit Hülfe des Fourier'schen Satzes, dass jede Function einer veränderlichen Grösse in eine nach den Sinus oder Cosinus der Vielfachen der Veränderlichen fortlaufende Reihe entwickelt werden kann, lässt sich leicht zeigen, dass jede Bewegung eines Punktes durch Zusammensetzung gleichförmiger Kreisbewegungen so nahe, als man will, dargestellt werden kann. Insbesondere wird hiernach die nahe kreis- und gleichförmige Planetenbewegung ausgedrückt werden können durch Zusammensetzung einer gleichförmigen Kreisbewegung, welche die mittlere Bewegung des Planeten darstellt, mit anderen Bewegungen derselben Art, nur dass bei letzteren die Halbmesser der Kreise ungleich kleiner, als bei der ersteren, sind. Als Vorbereitung zu der Lehre von der Planetenbewegung habe ich daher am Ende des ersten Abschnittes die — obwohl nur dem Scheine nach — in der Astronomie veraltete und verachtete Theorie der Epicykeln wieder in's Leben gerufen, und, wie ich glaube, nicht ohne guten Erfolg. Denn die ganz leicht sich ergebenden Formeln für die Kräfte, durch welche eine epicyklische Bewegung hervorgebracht wird, sind späterhin das Mittel, durch welches umgekehrt die von den störenden Kräften in den planetarischen Bewegungen bewirkten Ungleichheiten ohne Anwendung weiterer Kunstgriffe bestimmt werden.

Im zweiten Abschnitte werden die im ersten entwickelten Grundlehren der Dynamik auf den nach Kepler's Gesetzen geregelten Lauf der Planeten um die Sonne, und der Nebenplaneten um ihre Hauptplaneten, angewendet und die Kräfte bestimmt, durch welche diese Bewegungen hervorgebracht werden. Das Newton'sche Gesetz der allgemeinen Anziehung ist das endliche Resultat dieser Untersuchung. Es würde überflüssig sein, hier in das Einzelne näher einzugehen; nur auf die anderswo vielleicht noch nicht gemachte Bemerkung in §. 43 will ich noch hinweisen, dass nämlich die elliptische Ungleichheit der Planetenbewegung von Ptolemäus sowohl, als von Copernicus, bis auf die erste Potenz der Excentricität richtig dargestellt worden ist.

Den Beschluss dieses Abschnittes bilden die drei für jedes System sich anziehender oder abstossender Körper geltenden Principien der Erhaltung des Schwerpunktes, der Flächen und der lebendigen Kräfte, von denen ich die beiden ersten Principien, sowie auch die mit dem zweiten verbundene Theorie der unveränderlichen Ebene, ohne die sonst hierbei gewöhnliche Infinitesimalrechnung, durch geometrische Betrachtungen zu entwickeln gesucht habe.

Die noch folgenden zwei Abschnitte enthalten den interessantesten Theil der physischen Astronomie, die Theorie der Störungen oder der kleinen von den Kepler'schen Gesetzen sich zeigenden und dadurch erklärbaren Abweichungen, dass jeder Planet nicht bloss von der Sonne und jeder Trabant nicht bloss von seinem Hauptplaneten, sondern zugleich von allen übrigen Körpern des Systems angezogen wird. Ich habe diese Theorie im dritten Abschnitte mit den Störungen des Mondes durch die Sonne eingeleitet, theils deshalb, weil hier, so lange man bei einer ersten Näherung stehen bleibt, fast gar keine Reihenentwickelung erfordert wird, und damit die ganze Rechnung sehr einfach ausfällt; theils, weil die wenigen Störungen des Mondes, sowohl die von dem jedesmaligen Stande desselben abhängigen (Variation, jährliche Gleichung und Evection), als die davon unabhängigen (die vorwärtsgehende Bewegung der Apsiden und die rückgängige der Knoten), als treue Vorbilder von eben so viel verschiedenen Arten von Störungen der Planeten angesehen werden können. Des Mittels, dessen ich mich zur Entwickelung der Störungen bedient habe, ist bereits Erwähnung geschehen. — Der Umstand, dass bei einem ersten Versuche, die Bewegung der Mondsapsiden zu bestimmen, diese sich nur halb so gross als in der Wirklichkeit findet, wird Veranlassung, etwas Näheres über die Schärfung der Resultate durch Berücksichtigung der anfangs vernachlässigten höheren Potenzen der störenden Masse hinzuzufügen.

Die Anwendung hiervon auf den vorliegenden Fall giebt mir die Apsidenbewegung bis auf den 13ten Theil der wahren richtig.

Im vierten Abschnitte werden die von den ersten Potenzen der störenden Masse, der Excentricitäten und der Neigung abhängigen Störungen, welche die Planeten auf einander ausüben, ganz auf dieselbe Art, wie die Störungen des Mondes durch die Sonne, entwickelt, nur dass ich hier nicht länger Anstand genommen habe, von der Differentialrechnung in ihrer gewöhnlichen Form Gebrauch zu machen. Die etwas grössere Mühe, die vielleicht deshalb und wegen der nöthigen Reihenentwickelungen das Studium dieses Abschnittes dem weniger geübten Leser verursachen mag, wird in den Aufschlüssen, welche diese Rechnungen über die Stabilität unseres Planetensystems und seine pendelartigen Schwingungen im Laufe der Jahrhunderte geben, hinreichende Entschädigung finden. — Dass die Endresultate, sowohl hinsichtlich der periodischen als der säcularen Störungen, mit den bekannten Formeln im zweiten Buche der *Mécanique céleste* übereinstimmen, braucht nicht besonders bemerkt zu werden.

In einem Anhange sind zwei Aufsätze hinzugefügt worden, welche insofern mit einander in Verbindung stehen, als in ihnen die gestörte Bewegung eines Planeten, als eine vollkommen elliptische mit sich stetig ändernden Elementen, betrachtet wird. Mit Hülfe dieser Betrachtungsweise, deren sich, wie bekannt, zuerst Euler bedient hat, und mit Anwendung des von Lagrange erfundenen unter dem Namen der störenden Function bekannten Kunstgriffes, wird im ersten Aufsatze das schöne Theorem Lagrange's von der Unveränderlichkeit der grossen Axen bewiesen.

Der zweite Aufsatz sucht von der Berechnung der sogenannten speciellen Störungen, als wovon hauptsächlich bei den sehr excentrischen und unter allen Winkeln gegen die Ekliptik geneigten Kometenbahnen Gebrauch gemacht wird, einen allgemeinen Begriff zu geben.

Den damit zusammenhängenden am Schlusse hingestellten Satz, welcher die Verrückung des Mittelpunktes der Bahn und damit die Aenderung ihrer Elemente erkennen lässt, wenn der Planet einen fremdartigen kleinen Stoss erhält, diesen Satz fand ich, als ich bei Lesung der kleinen, aber inhaltsreichen und geistvollen Schrift Airy's: *Gravitation**) die darin auf ganz populäre Weise bestimmten Aende-

*) Der vollständigere Titel ist: *Gravitation, an elementary explanation of the principal perturbations in the solar system ... London* 1834. Durch K. L. v. Littrow ist hiervon eine deutsche Uebersetzung besorgt worden: *Airy's populäre physische Astronomie ... Stuttgart* 1839.

rungen, welche die Elemente des gestörten Planeten, nach Verschiedenheit seines Bahnortes und der Richtung der störenden Kraft, erleiden, mit einander verglich und sie in Einem Resultate zusammenzufassen suchte.

Wie ich bei dieser Gelegenheit noch bemerken möchte, scheint durch die Airy'sche Schrift der Wunsch in Erfüllung gegangen zu sein, welchen der Freiherr von Lindenau bereits im Jahre 1815 in der von ihm in Vereinigung mit Bohnenberger herausgegebenen *Zeitschrift für Astronomie**) ausgesprochen hat, »dass nämlich, obschon das Detail der Störungs-Entwickelungen anders als analytisch-numerisch nicht geschehen könne, doch der Gang der Untersuchung, hervorspringende Resultate, und das Bezeichnen der Punkte, wo die Wirkungen ein Grösstes werden, Sache des Raisonnements und der Construction sein sollte, ... und dass es daher der Beurtheilung der Geometer anheim gegeben sein möchte, ob sich nicht für die möglichen Combinationen der Lage zweier Planeten Constructionen ersinnen liessen, welche eine Uebersicht der Hauptmomente ihrer gegenseitigen Störungen gewährten.«

In der That hat Airy in der genannten Schrift die Störungen ohne allen Calcul, bloss durch einfache auf das Princip der Variation der Elemente gegründete Betrachtungen, erklärt und damit seinen Lesern eine Einsicht in den Mechanismus des Ganzen verschafft, welche der in anderer Beziehung allerdings bei Weitem überlegenere Calcul nicht zu gewähren vermag.

Auch im vorliegenden Buche habe ich in einigen besonders einfachen Fällen, von vorher durch Rechnung gefundenen Störungen die Nothwendigkeit ihres Vorhandenseins und ihre allgemeine Beschaffenheit durch blosse Betrachtung der Natur der störenden Kraft darzuthun gesucht; auch ist dahin noch die am Schlusse des Ganzen mit Hülfe des vorhin gedachten Satzes untersuchte Bewegung eines Planeten in einem widerstehenden Mittel zu rechnen. Mehreres dieser Art hinzuzufügen war gegen den Plan des Buches.

---

*) I. Band, Seite 33 und 34.

Inhalt.

Erster Abschnitt.
Die Grundlehren der Dynamik.

Erstes Kapitel.
Von der Bewegung der Punkte.

Zweites Kapitel.
Von den Wirkungen der Kräfte.

Drittes Kapitel.

Theorie der epicyklischen Bewegung.

Zweiter Abschnitt.

Von den Kräften, durch welche die Bewegungen der Himmelskörper hervorgebracht werden.

Erstes Kapitel.

Von der elliptischen Bewegung der Planeten.

Fünftes Kapitel.

Allgemeine Gesetze der Bewegung bei einem System sich anziehender Körper.

Dritter Abschnitt.

Von den Störungen des Mondes durch die Sonne.

Erstes Kapitel.

Das Problem der drei Körper.

Zweites Kapitel.

Von den Kräften, durch welche die Bewegung des Mondes um die Erde gestört wird.

Drittes Kapitel.

Von den vorzüglichsten Störungen des Mondlaufs und insbesondere von der Variation.

Viertes Kapitel.

Von der jährlichen Gleichung.

Fünftes Kapitel.

Von der Evection.

Sechstes Kapitel.

Von dem Vorwärtsgehen der Apsiden der Mondsbahn.

Siebentes Kapitel.

Von der Säculargleichung des Mondes.

Achtes Kapitel.

Von den Störungen der Breite des Mondes.

Zweites Kapitel.

Entwickelung der von den Excentricitäten und der Neigung abhängigen Störungen.

Drittes Kapitel.

Theorie der Säcularstörungen.

Viertes Kapitel.

Von der Stabilität des Planetensystems.

durch die Wechselwirkung zweier Planeten die mittlere Bewegung des einen sich verringert, wenn die des anderen grösser wird, und umgekehrt. Näherungsweise ausgedrücktes Verhältniss zwischen den Coefficienten der grossen Gleichungen Jupiters und Saturns. — §. 182. Störungen von langer Dauer bei anderen Planetenpaaren. — §. 183. Bestimmung der Elemente eines gestörten Planeten.

Anhang.

I. Beweis der Unveränderlichkeit der mittleren Entfernungen nach Lagrange.

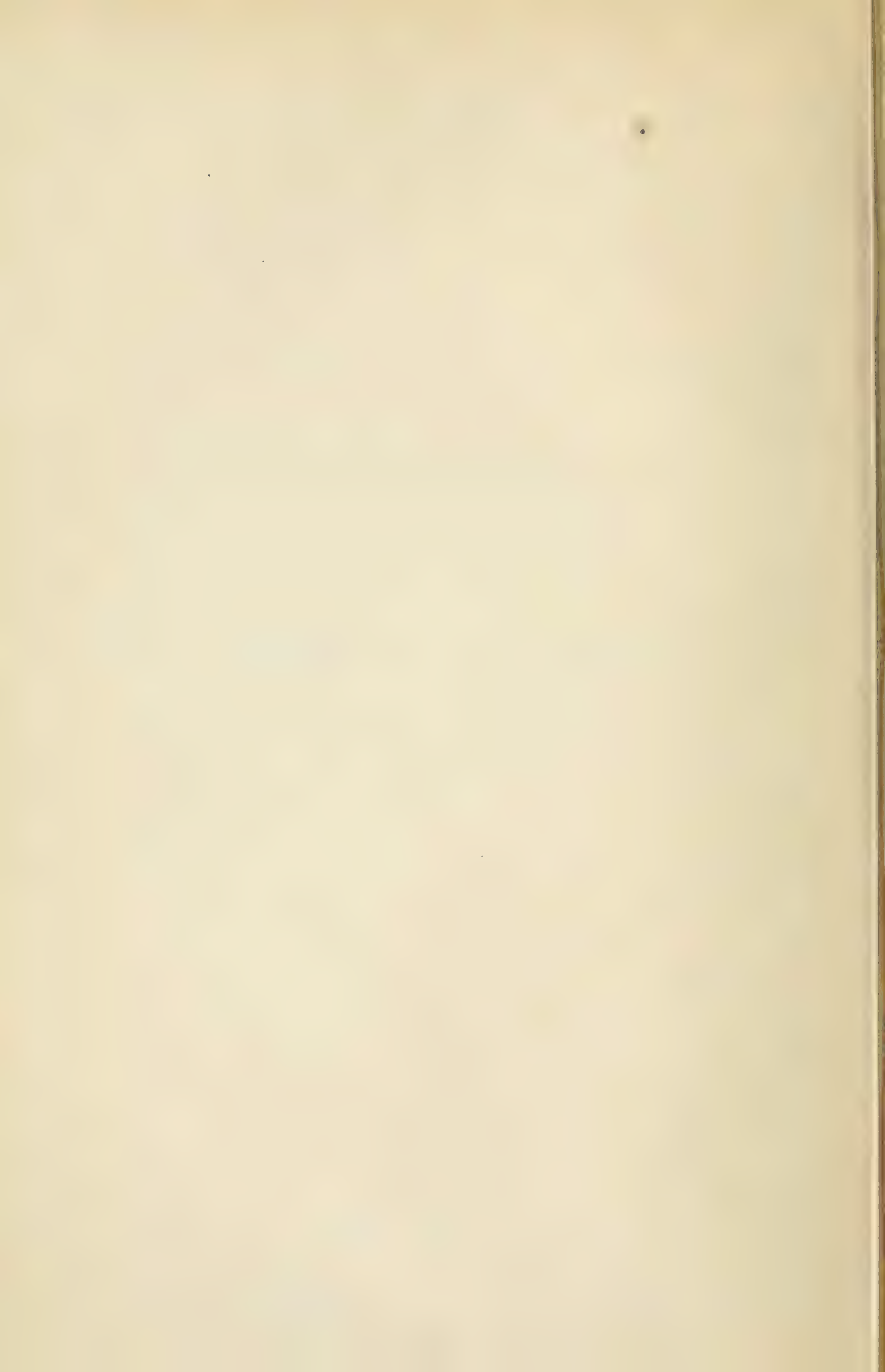
Aenderung der Elemente der elliptischen Bewegung eines Planeten, wenn seine Geschwindigkeit durch einen Stoss geändert wird. — Die gestörte Bewegung kann man sich als eine elliptische vorstellen, deren Elemente sich fortwährend ändern. — Lagrange's Verfahren, um die nach einer beliebigen Richtung geschätzte störende Kraft zu finden. Die störende Function; Entwickelung derselben. Die hieraus gefolgerte Geschwindigkeit, mit welcher sich die mittlere Entfernung ändert, ist aus bloss periodischen Gliedern zusammengesetzt, weshalb die mittlere Entfernung selbst bloss periodische Störungen erleidet.

II. Ueber die Methode der speciellen Störungen.

Allgemeiner Begriff dieser Methode; sie geht zunächst auf die Berechnung der Geschwindigkeiten aus, mit denen sich die Elemente ändern; die Geschwindigkeit der Aenderung des Parameters als Beispiel. — Neuer Satz, durch welchen man von den Aenderungen, welche die Elemente durch einen kleinen Stoss erleiden, eine anschauliche Uebersicht gewinnt. Erläuterung dieses Satzes durch die Bewegung eines Planeten in einem widerstehenden Mittel.

Erster Abschnitt.

Die Grundlehren der Dynamik.



Erstes Kapitel.

Von der Bewegung der Punkte.

§. 1. Die Lage eines Punktes B (Fig. 1) gegen einen anderen A ist gegeben, wenn sein Abstand von A und die Richtung der Abstandslinie AB gegeben sind. Ein dritter Punkt B' hat demnach gegen einen vierten A' dieselbe Lage, welche B gegen A hat, wenn die zwei geraden Linien AB und $A'B'$ gleich lang sind und einerlei Richtung haben.

Dass zwei gerade Linien AB und $A'B'$ gleiche Länge und einerlei (nicht entgegengesetzte) Richtung haben, werde hier kurz durch

$$AB \equiv A'B'$$

ausgedrückt. Mit dieser Bezeichnung können wir sogleich folgende aus den ersten Elementen der Geometrie fliessende Sätze aufstellen:

Fig. 1.

I. Ist



$$AB \equiv A'B',$$

so ist auch

$$AA' \equiv BB'.$$

II. Ist

$$AA' \equiv BB' \quad \text{und} \quad BB' \equiv CC',$$

so ist auch

$$AA' \equiv CC'.$$

III. Ist

$$AB \equiv A'B' \quad \text{und} \quad BC \equiv B'C' ,$$

so ist auch

$$AC \equiv A'C' ;$$

und eben so $AD \equiv A'D'$, wenn noch $CD \equiv C'D'$ ist; u. s. w.

Versteht man analoger Weise unter der Formel

$$AB \equiv m \,.\, A'B' ,$$

dass die Linien AB und $A'B'$ einerlei Richtung haben, und dass die Länge der ersteren das m-fache der Länge der letzteren ist, wo m jede ganze oder gebrochene positive Zahl sein kann, so kann man den Satz III. folgendergestalt verallgemeinern:

IV. Ist

$$AB \equiv m \,.\, A'B' , \qquad BC \equiv m \,.\, B'C' , \qquad CD \equiv m \,.\, C'D' , \qquad \text{etc.,}$$

so ist auch

$$AC \equiv m \,.\, A'C' ,$$

$$AD \equiv m \,.\, A'D' , \qquad \text{etc.}$$

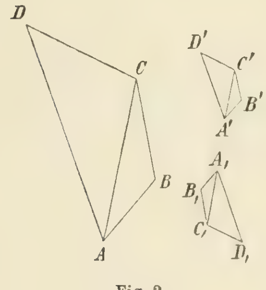


Fig. 2.

(Siehe Fig. 2, wo $m = 3$ ist.) Alsdann nämlich sind die Figuren $ABCD..$ und $A'B'C'D'..$ einander bloss ähnlich, in dem Verhältnisse von $m : 1$, während sie in III. einander gleich und ähnlich waren. In beiden Fällen aber haben sie eine direct ähnliche Lage. — Wir können noch hinzusetzen:

V. Ist

$$AB \equiv m \,.\, B_1A_1 , \qquad BC \equiv m \,.\, C_1B_1 , \qquad CD \equiv m \,.\, D_1C_1 , \qquad \text{etc.,}$$

so ist auch

$$AC \equiv m \,.\, C_1A_1 , \qquad AD \equiv m \,.\, D_1A_1 , \qquad \text{etc.}$$

Auch hier sind die Figuren $ABC\ldots$ und $A_1B_1C_1\ldots$ in dem Verhältnisse $m : 1$ einander ähnlich, haben aber eine verkehrt ähnliche Lage.

§. 2. Sind mehrere gerade Linien AB, CD, EF (Fig. 3) ihrer Grösse und Richtung nach gegeben, und trägt man dieselben, von einem beliebigen Punkte O ausgehend, parallel mit ihren Richtungen an einander, macht man also

$$OP \equiv AB , \qquad PQ \equiv CD , \qquad QR \equiv EF ,$$

so heisst die gerade Linie OR, welche den Anfangspunkt mit dem Endpunkte der dadurch entstandenen gebrochenen Linie $OPQR$

verbindet, aus den Linien AB, CD, EF zusammengesetzt, — oder auch die Lage von R gegen O zusammengesetzt aus den Lagen von B gegen A, von D gegen C und von F gegen E.

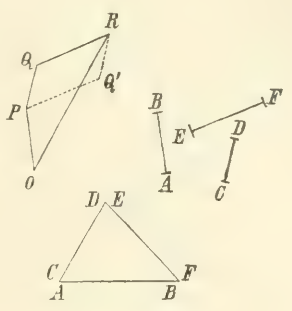


Fig. 3 und 3*.

Folgerungen. *a*) Die Linie OR bleibt dieselbe, wenn statt der Linien AB, CD, EF irgend andere ihnen gleiche und parallele genommen werden (§. 1, II). Man kann daher OR auch als zusammengesetzt aus OP, PQ, QR selbst, und überhaupt jede Seite eines Vielecks als zusammengesetzt aus den jedesmal übrigen ansehen, dafern man nur jede der letzteren nach der Richtung nimmt, nach welcher sie von einem den Perimeter des Vielecks beschreibenden Punkte durchlaufen wird, die Richtung der ersteren aber die entgegengesetzte sein lässt. — So ist z. B. von den drei Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks, CB aus CA und AB; AC aus AB und BC; BA aus BC und CA zusammengesetzt.

b) Wenn man, statt von O, von irgend einem anderen Punkte O' ausgehend, die gegebenen Linien AB, CD, EF parallel mit ihren Richtungen an einander trägt und damit die gebrochene Linie $O'P'Q'R'$ bildet, so ist

$$O'R' \equiv OR \quad (§. 1, III) .$$

c) Hat man, von O ausgehend,

$$OP \equiv AB \ , \qquad PQ \equiv CD \ , \qquad QR \equiv EF$$

gemacht, so wird man zu demselben Punkte R auch gelangen, wenn man z. B. von P aus parallel mit sich zuerst EF und sodann CD abträgt. Denn macht man $PQ' \equiv EF$, so ist auch

$$PQ' \equiv QR$$

und daher (§. 1, I)

$$Q'R \equiv PQ \equiv CD \ .$$

Je zwei nächstfolgende der zusammenzusetzenden Linien können daher mit einander vertauscht werden. Da sich nun aus einer gegebenen Folge mehrerer Elemente durch successive Vertauschung je zweier nächstfolgenden alle anderen Folgen ableiten lassen, — aus der Folge *abc* z. B. die Folgen *acb*, *cab*, *cba*, etc. — so kann die Ordnung, in welcher man die gegebenen Linien nach und nach zusammensetzt, jede beliebige sein.

Weil endlich nach *b*) eine veränderte Annahme des Ausgangs-

punktes O keinen Einfluss auf die Grösse und Richtung der zusammengesetzten Linie hat, so schliessen wir:

Die aus mehreren geraden Linien zusammengesetzte Linie bleibt ihrer Grösse und Richtung nach dieselbe, welches auch der Ausgangspunkt und welches die Ordnung ist, in welcher die ersteren Linien an einander gesetzt werden.

d) Ist AB aus CD und EF zusammengesetzt, so ist es CD aus AB und FE; EF aus AB und DC; BA aus DC und FE; u. s. w. Die Richtigkeit hiervon erhellet durch Ansicht von Fig. 3*, und man sieht von selbst, wie Analoges auch bei Systemen von noch mehreren Linien stattfinden muss.

e) Noch können wir aus §. 1, IV folgern: Ist eine Linie aus mehreren anderen ($A'D'$ aus $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$) zusammengesetzt, so ist auch das m-fache der ersteren aus den m-fachen der letzteren (AD aus AB, BC, CD) zusammengesetzt.

§. 3. Eine gerade Linie in zwei oder mehrere gerade Linien zerlegen, heisst Linien angeben, durch deren Zusammensetzung die erstere Linie wieder erhalten wird. Offenbar gehört diese Aufgabe zu den unbestimmten und kann nur durch Hinzufügung gewisser Bedingungen eine bestimmte werden. Die einfachsten unter dergleichen bestimmten Aufgaben sind folgende drei:

I. Eine Linie AB (Fig. 4) in zwei andere zu zerlegen, welche parallel mit zwei Geraden a und b sind, die in einer mit AB parallelen Ebene liegen und sich darin schneiden.

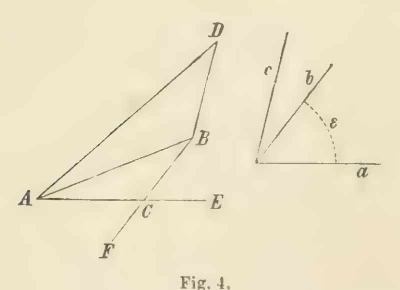


Fig. 4.

Auflösung. Man ziehe durch A eine Parallele AE zu a und durch B eine Parallele BF zu b, welche die AE schneiden wird. Geschehe dieses in C, so sind AC und CB die gesuchten Linien. Es kann aber AB nicht noch in zwei andere mit a und b parallele, aber von AC und CB der Länge nach verschiedene Linien zerlegt werden, indem es sonst ausser C noch einen Punkt geben müsste, der so läge, dass die von ihm nach A und B gezogenen Linien resp. mit a und b parallel wären.

II. Eine Linie AD in zwei zu zerlegen, von denen die eine parallel mit einer Ebene ε und die andere parallel mit einer die Ebene ε schneidenden Geraden c ist.

Auflösung. Man lege durch A eine mit ε parallele Ebene und durch D eine mit c parallele Gerade, welche jene Ebene in B treffe, so sind AB und BD die gesuchten Linien. — Dass auch hier die Zerlegung nicht noch auf andere Art möglich ist, erhellet aus ähnlichem Grunde, wie vorhin.

III. Eine Linie AD in drei zu zerlegen, welche parallel mit drei sich in einem Punkte schneidenden und nicht in derselben Ebene enthaltenen Geraden a, b, c sind.

Auflösung. Man zerlege nach II. die Linie AD in zwei andere AB und BD, welche resp. mit der durch die Geraden a und b bestimmten Ebene und mit der Geraden c parallel sind. Man zerlege hierauf nach I. die Linie AB in zwei mit a und b parallele Linien AC und CB, und es werden AC, CB und BD die verlangten sein. — Da jede dieser zwei Zerlegungen nur auf Eine Weise möglich ist, so können auch hier statt der drei erhaltenen Linien nicht noch andere von denselben Richtungen, aber anderen Längen gefunden werden.

Zusatz. Liegt die Linie AB in der durch die Geraden a und b bestimmten Ebene selbst, so kann man sie nach a und b auch dadurch zerlegen, dass man ihre Endpunkte A, B durch Parallellinien mit b und mit a auf a und auf b projicirt (Fig. 5). Denn die somit sich ergebenden Projectionen $A'B'$ und $A''B''$ von AB auf a und b sind, wie die Figur zeigt, resp. $\equiv$ den vorigen AC und CB, und daher die gesuchten Linien.

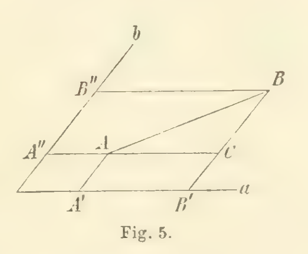


Fig. 5.

Aehnlicher Weise wird eine Linie nach der Ebene ε und der Geraden c dadurch zerlegt, das man ihre Endpunkte durch Parallellinien mit c auf die Ebene ε und durch Parallelebenen mit ε auf die Gerade c projicirt. — Eben so wird man endlich eine Linie nach den drei Geraden a, b, c zerlegen, wenn man ihre Endpunkte auf jede der drei Geraden (z. B. auf c) durch Ebenen projicirt, welche mit der durch die jedesmal zwei übrigen Geraden (a und b) bestimmten Ebene parallel sind.

§. 4. Die Bewegung eines Punktes ist gegeben, wenn für jeden Zeitpunkt sein Ort im Raume gegeben ist. — Im Folgenden werden wir durch T_0, T_1, T_2, ... in unbestimmten Intervallen auf einander folgende Zeitpunkte, und durch A_0, A_1, A_2, ...; B_0, B_1,

B_2, ...; etc. die Oerter bezeichnen, welche die sich bewegenden Punkte A, B, etc. in jenen Zeitpunkten einnehmen.

Die Bewegung eines Punktes gegen einen anderen ist gegeben, wenn für jeden Zeitpunkt die Lage des einen gegen den anderen (§. 1) gegeben ist.

Von zwei Punkten A und B sagt man, dass sie einander gleiche Bewegungen haben, wenn die Lage des einen gegen den anderen unverändert bleibt, — also wenn (Fig. 6)

$$A_0 B_0 \equiv A_1 B_1 \equiv A_2 B_2 \equiv \text{etc.}$$

Es folgt also hieraus

$$A_0 A_1 \equiv B_0 B_1 \;, \qquad A_1 A_2 \equiv B_1 B_2 \;, \qquad \text{etc.},$$

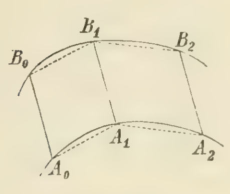


Fig. 6.

und man kann daher die Gleichheit der Bewegungen von A und B auch dadurch definiren, dass immer die Lage des Ortes A_0, welchen der Punkt A in irgend einem Zeitpunkte T_0 einnimmt, zu seinem Orte A_1 in irgend einem anderen Zeitpunkte T_1 dieselbe ist, wie die Lage, welche der Ort B_0 des Punktes B im ersteren Zeitpunkte zu seinem Orte B_1 im letzteren hat.

Man sagt, dass ein Punkt D gegen einen anderen C dieselbe Bewegung habe, welche ein dritter B gegen einen vierten A hat, wenn stets D gegen C dieselbe Lage, wie B gegen A, hat, also wenn

$$C_0 D_0 \equiv A_0 B_0 \;, \qquad C_1 D_1 \equiv A_1 B_1 \;, \qquad \text{etc.} \quad \text{(Fig. 7)}$$

und überhaupt

$$CD \equiv AB$$

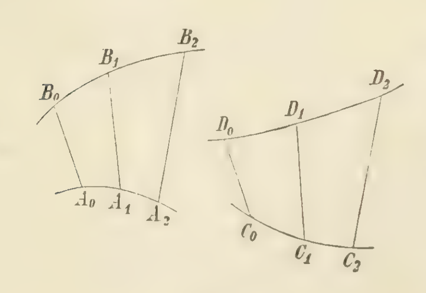


Fig. 7.

ist. Es folgt hieraus

$$CA \equiv DB \;;$$

mithin hat dann auch D gegen B dieselbe Bewegung, wie C gegen A. Die vier Punkte A, B, D, C bilden dann immer ein Parallelogramm.

Folgerungen. a) Haben zwei Punkte einander gleiche Bewegungen und fallen sie in irgend einem Zeitpunkte zusammen, so thun sie dies auch in jedem anderen.

b) Hat D gegen C dieselbe Bewegung, wie B gegen A, und sind A und C ruhende Punkte, oder ihre Bewegungen einander gleich, so sind auch die Bewegungen von B und D einander gleich.

Denn alsdann ist $BD \equiv AC \equiv$ einer Linie, deren Grösse und Richtung sich nicht ändert.

§. 5. Die Bewegung eines Punktes P (Fig. 8) heisst aus denen zweier anderer Punkte A und B zusammengesetzt, wenn die Lage von P gegen einen beliebig wo angenommenen festen Punkt F stets aus den Lagen von A und B gegen F zusammengesetzt ist, oder — was auf dasselbe hinauskommt — wenn der vierte Punkt F, mit welchem die sich bewegenden A, P, B in dieser Folge ein Parallelogramm bilden, ein ruhender ist. Denn weil FP aus FA und FB zusammengesetzt sein soll, und es FP immer aus FA und AP ist, so muss

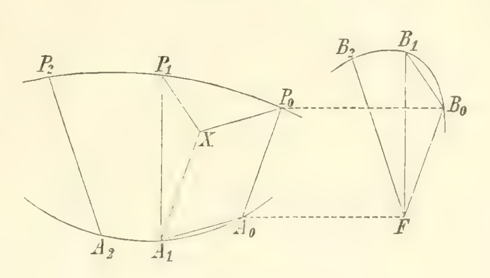


Fig. 8.

$$AP \equiv FB ,$$

und folglich $APBF$ ein Parallelogramm sein.

Sind hiernach für verschiedene Zeitpunkte T_0, T_1, T_2, ... die Oerter von A und B, und für einen derselben, T_0, der Ort P_0 von P gegeben, so findet man die Oerter von P für die übrigen, wenn man zuerst

$$B_0F \equiv P_0A_0 ,$$

und, nachdem somit F bestimmt worden,

$$A_1P_1 \equiv FB_1 , \qquad A_2P_2 \equiv FB_2 , \qquad \text{etc.}$$

macht.

Ohne zu F zurückzugehen, kann man aus P_0 jeden der übrigen Oerter von P, wie P_1, auch dadurch finden, dass man

$$P_0X \equiv A_0A_1 \quad \text{und} \quad XP_1 \equiv B_0B_1$$

macht, dass man also P_0P_1 aus A_0A_1 und B_0B_1 zusammensetzt. In der That ist nach dieser Construction

$$A_1X \equiv A_0P_0 \equiv FB_0 ,$$

zugleich aber

$$XP_1 \equiv B_0B_1 ,$$

folglich (§. 1, III)

$$A_1P_1 \equiv FB_1 ,$$

wie vorhin. Auf gleiche Weise lässt sich P_2 finden, indem man

$P_0 P_2$ aus $A_0 A_2$ und $B_0 B_2$, oder auch $P_1 P_2$ aus $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ zusammensetzt; u. s. w.

Die Lage von P gegen P_0 ist hiernach aus den gleichzeitigen Lagen von A gegen A_0 und von B gegen B_0 stets vollkommen bestimmt, und es müssen daher alle Bewegungen von P, die man für verschiedene Annahmen von P_0, mithin auch von F, erhält, also alle aus den Bewegungen von A und B zusammengesetzten Bewegungen, einander gleich sein.

Zusätze. *a*) Nach der Formel

$$AP \equiv FB$$

kann man die aus den Bewegungen von A und B zusammengesetzte Bewegung von P auch als diejenige erklären, bei welcher die Bewegung von P gegen den einen (A) der beiden Punkte A und B dieselbe ist, welche der andere (B) gegen einen festen Punkt F hat. Um sich dieses noch anschaulicher zu machen, stelle man sich vor, dass, während B seine Bewegung gegen F unverändert behält, dem F die Bewegung von A ertheilt wird; oder auch dass, während B in seiner ursprünglichen Bahn fortgeht, diese Bahn selbst in paralleler Lage so fortgeführt wird, dass einer ihrer Punkte, und damit auch alle übrigen, eine der Bewegung von A gleiche Bewegung erhalten. Denn dadurch wird B in eine aus seiner ursprünglichen und aus der Bewegung von A zusammengesetzte Bewegung gebracht.

b) Sind die Bewegungen von A und P gegeben, so kann man daraus umgekehrt die Bewegung von B gegen einen beliebig wo angenommenen festen Punkt construiren. Von beliebigen Bewegungen zweier Punkte A und P kann man daher immer die Bewegung des einen P als zusammengesetzt betrachten aus der des anderen A und aus der von P gegen A, d. i. aus der Bewegung (von B), welche P haben würde, wenn bei seiner Bewegung gegen A letzterer Punkt in Ruhe wäre. So ist z. B. die Bewegung des Mondes zusammengesetzt aus der Bewegung der Erde und aus seiner Bewegung gegen die Erde.

§. 6. Eben so, wie von zwei, können die Bewegungen auch von drei und mehreren Punkten $A, B, C, \ldots$ (Fig. 9) zusammengesetzt werden. Man beziehe nämlich den zweiten und die folgenden auf willkürliche feste Punkte $F, G, \ldots$ und lasse hierauf die Punkte $P, Q, \ldots$ sich so bewegen, dass P gegen A dieselbe Bewegung, wie B gegen F; Q gegen P dieselbe, wie C gegen G; u. s. w. hat. Denn damit ist die Bewegung von P aus denen von A und B, die Bewegung von Q aus denen von P und C, d. i. aus denen von A, B

und C, u. s. w. zusammengesetzt. Dabei ist, wie vorhin, für je zwei Zeitpunkte T_0 und T_1 die Linie $P_0 P_1$ aus $A_0 A_1$ und $B_0 B_1$, und so auch $Q_0 Q_1$ aus $P_0 P_1$ und $C_0 C_1$, d. i. aus $A_0 A_1$, $B_0 B_1$ und $C_0 C_1$ zusammengesetzt, u. s. w.

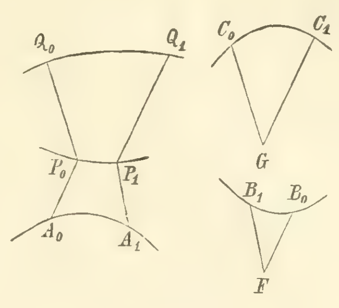


Fig. 9.

Letztere Eigenschaft der zusammengesetzten Bewegung kann man auch geradezu als Definition derselben gebrauchen, und hiernach *die Bewegung von X aus denen von A, B, C, ... zusammengesetzt nennen, wenn für je zwei Zeitpunkte die Lage des Ortes des Punktes X in dem einen gegen seinen Ort in dem anderen Zeitpunkte zusammengesetzt ist aus den Lagen, welche die Oerter der Punkte A, B, C, ... im ersteren Zeitpunkte resp. gegen die Oerter derselben im letzteren haben.*

Will man nach dieser Definition die Bewegung von X construiren, so bleibt der Ort von X für einen gewissen Zeitpunkt der Willkür überlassen; die Oerter von X für alle anderen Zeitpunkte sind damit vollkommen bestimmt, und alle bei verschiedener Annahme jenes willkürlichen Ortes sich ergebenden Bewegungen sind einander gleich. Auch giebt diese Definition noch zu erkennen, dass eben so, wie bei mehreren geraden Linien (§. 2), so auch bei mehreren Bewegungen die Ordnung, in welcher man sie nach und nach zusammensetzt, ganz willkürlich ist.

Da endlich nach §. 5, *b*) die Bewegung von P aus der von A und aus der von P gegen A, und eben so die von Q aus der von P und aus der von Q gegen P zusammengesetzt ist, so ist es auch die Bewegung von Q aus der von A und aus denen von P gegen A und von Q gegen P; und ähnlicherweise bei noch mehreren Bewegungen, welches auch dieselben sein mögen.

§. 7. *Die Bewegung eines Punktes P in zwei oder mehrere Bewegungen zerlegen, heisst Bewegungen von Punkten A, B, C, ... finden, durch deren Zusammensetzung die Bewegung von P wieder hervorgeht.* Aus den Oertern A_0, B_0, ..., welche A, B, ... in irgend einem Zeitpunkte T_0 einnehmen, müssen hiernach die Oerter A_1, B_1, ... für irgend einen anderen Zeitpunkt T_1 so bestimmt werden, dass die Linien $A_0 A_1$, $B_0 B_1$, ..., zusammengesetzt, die Linie $P_0 P_1$ geben (§. 6), d. h. man muss $P_0 P_1$ in $A_0 A_1$, $B_0 B_1$, ... zerlegen (§. 3). Die Aufgabe der Zerlegung einer gegebenen Be-

wegung wird daher eben so, wie die Aufgabe für die Zerlegung einer geraden Linie, im Allgemeinen unbestimmt sein, und durch Beifügung derselben Bedingungen, unter denen die letztere Aufgabe in eine bestimmte überging, wird auch die erstere eine solche werden.

Hiernach kann erstens eine in einer Ebene enthaltene Bewegung des Punktes P immer und nur auf Eine Weise in zwei geradlinige Bewegungen zerlegt werden, deren Richtungen a und b in derselben Ebene enthalten und nicht mit einander parallel sind. — In der That, sind A und B die Projectionen von P auf a und b durch Parallelen mit b und a, so sind mit der Bewegung von P auch die von A und B gegeben; und da hierbei für je zwei Zeitpunkte T_0, T_1 die Linie P_0P_1 aus A_0A_1 und B_0B_1 zusammengesetzt ist §. 3, Zus.), so sind die Bewegungen von A und B die gesuchten.

Eben so wird ferner die Bewegung eines Punktes im Raume überhaupt in zwei zerlegt, von denen die eine in einer Ebene ε, die andere in einer mit ε nicht parallelen Geraden c geschieht, oder in drei Bewegungen, welche in drei sich in einem Punkte schneidenden und nicht in einer Ebene liegenden Geraden a, b, c vor sich gehen, wenn man den Punkt auf die in §. 3, Zus. besagte Art im ersteren Falle auf ε und c, im letzteren auf a, b und c projicirt. Denn wie vorhin, werden auch hier diese Projectionen die gesuchten und nur auf Eine Weise bestimmbaren Bewegungen haben.

Von der Geschwindigkeit.

---

§. 8. *Die Bewegung eines Punktes wird gleichförmig genannt, wenn je zwei Theile des von ihm beschriebenen Weges sich wie die Zeiten verhalten, in denen sie beschrieben werden.*

Wenn zwei sich gleichförmig bewegende Punkte A und B in derselben Zeit gleich lange Wege durchlaufen, so sagt man, dass sie sich mit gleicher Geschwindigkeit bewegen. Ist aber der von A durchlaufene Weg das m-fache des Weges, den B in derselben Zeit zurücklegt, so sagt man, dass A eine m-mal so grosse Geschwindigkeit, als B, habe, und versteht hiernach unter dem Verhältnisse der Geschwindigkeiten der beiden Punkte das Verhältniss der von ihnen in derselben Zeit beschriebenen Wege. Indem man daher einer gewissen gleichförmigen Bewegung eine Geschwindigkeit gleich 1

beilegt, kann man die Geschwindigkeit jeder anderen gleichförmigen Bewegung durch eine Zahl ausdrücken. Man pflegt aber, nach Festsetzung der Maasseinheiten für Zeit und Raum, diejenige Geschwindigkeit = 1 zu setzen, mit welcher in jeder Zeitlänge = 1 ein Weg = 1 beschrieben wird.

Ein Punkt, der in jeder Zeiteinheit einen Weg $= c$ beschreibt, hat hiernach eine Geschwindigkeit $= c$, und legt in jeder Zeit $= t$ einen Weg

$$s = ct$$

zurück; woraus noch folgt, dass die Geschwindigkeit c eines sich gleichförmig bewegenden Punktes erhalten wird, wenn man die Zahl s, welche irgend einen vom Punkte beschriebenen Weg ausdrückt, durch die Zahl t dividirt, welche die Zeit ausdrückt, in der dieser Raum beschrieben worden.

Da die Geschwindigkeit und der in der Zeiteinheit beschriebene Weg durch einerlei Zahl ausgedrückt werden, so pflegt man die Geschwindigkeit auch geradezu durch die Länge dieses Weges, also durch eine benannte Zahl, anzugeben, z. B. eine Geschwindigkeit von Einem Meter, von 30 Fuss, von 4 Meilen, u. s. w.

§. 9. *Die einfachste unter allen Bewegungen ist die gleichförmige und geradlinige.* Sind die Oerter A_0 und A_1 gegeben, welche ein sich auf solche Weise bewegender Punkt A in den Zeitpunkten T_0 und T_1 einnimmt, so kann man damit seinen Ort A_2 für jeden dritten Zeitpunkt T_2 finden. Denn es liegt A_2 mit A_0 und A_1 in gerader Linie, und es verhält sich

$$A_0 A_1 : A_1 A_2 = T_0 T_1 : T_1 T_2$$

(wo $T_0 T_1$ die von den Zeitpunkten T_0 und T_1 begrenzte Zeitlänge bedeutet). Beides zugleich wird durch die Formel

$$T_1 T_2 . A_0 A_1 \equiv T_0 T_1 . A_1 A_2$$

dargestellt, welche daher der charakteristische Ausdruck für die geradlinige und gleichförmige Bewegung des Punktes A ist, sobald darin die drei Zeitpunkte T_0, T_1 und T_2 ganz beliebig angenommen werden können.

Im Folgenden wollen wir in den Begriff der Geschwindigkeit eines sich geradlinig und gleichförmig bewegenden Punktes, ausser ihrer Grösse, stets noch die Richtung mit aufnehmen, nach welcher sich der Punkt bewegt, und daher die Geschwindigkeit durch eine gerade Linie ausdrücken, welche die Richtung der Bewegung hat, und deren Länge dem in der Zeiteinheit beschriebenen Wege gleich ist. Hiernach werden wir eine Geschwindigkeit aus zwei oder

mehreren Geschwindigkeiten zusammengesetzt nennen, wenn die Linie, welche die erstere ausdrückt, aus den die letzteren ausdrückenden Linien zusammengesetzt ist.

§. 10. Ist die Bewegung eines Punktes A nicht gleichförmig, oder nicht geradlinig, oder keines von beiden, so kann man doch immer die Zeit in so kleine Theile getheilt annehmen, dass die Bewegung während jedes dieser Theilchen oder Zeitelemente, wie man sie nennt, einzeln als geradlinig und gleichförmig betrachtet werden kann; und man wird daher unter der Geschwindigkeit des Punktes A zur Zeit T_0 diejenige zu verstehen haben, mit welcher er in dem auf T_0 nächstfolgenden oder in dem nächstvorhergehenden Zeitelemente geradlinig und gleichförmig fortgeht. Ist also $T_0 T_1$ solch ein Zeitelement, so ist $A_0 A_1$ die Richtung der Geschwindigkeit von A zur Zeit T_0, und ihre Grösse (§. 8)

$$= \frac{A_0 A_1}{T_0 T_1}, \qquad \text{oder auch} \quad = m \,.\, A_0 A_1 ,$$

wenn m die (unendlich grosse) Anzahl der in der Zeiteinheit enthaltenen und dem $T_0 T_1$ gleichen Elemente bedeutet.

Mit anderen Worten und schärfer: Je näher einem bestimmten Zeitpunkte T_0 ein anderer T_1 genommen wird, und je näher damit der Ort A_1 dem A_0 zu liegen kommt, desto mehr und über alle Grenzen hinaus nähert sich der Quotient $A_0 A_1 : T_0 T_1$ einem bestimmten Werthe und die Gerade $A_0 A_1$ einer bestimmten Richtung. Es sind dies die Grösse und die Richtung der Geschwindigkeit des Punktes A zur Zeit T_0. — Zugleich sieht man daraus, dass die Richtung der Geschwindigkeit einerlei mit der Richtung der in A_0 an die Bahn von A gelegten geradlinigen Tangente ist.

Um die Bestimmung der Grösse der Geschwindigkeit durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir eine geradlinige Bewegung betrachten, bei welcher der von einem gewissen Zeitpunkte Θ bis zu irgend einem anderen T_0 zurückgelegte Weg s stets dem Quadrate der seit Θ verflossenen Zeit ΘT_0, welche t heisse, proportional ist, also

$$s = at^2 ,$$

wo daher a den Weg bezeichnet, der in der ersten auf Θ folgenden Zeiteinheit beschrieben wird. Setzen wir nun zur Abkürzung den Zeitraum $T_0 T_1 = \tau$, so ist der während ΘT_1 oder $t + \tau$ beschriebene Weg gleich $a(t+\tau)^2$, folglich der während $T_0 T_1$ oder τ beschriebene

$$A_0 A_1 = a(t+\tau)^2 - at^2 = 2at\tau + a\tau^2 .$$

Die Division desselben durch τ giebt $2at + a\tau$, als die Geschwindigkeit des Punktes, wenn er den Weg $A_0 A_1$ während τ gleichförmig

beschrieben hätte. Ihr Werth nähert sich desto mehr dem $2at$, je kleiner der Zeittheil τ genommen wird, und geht für ein unendlich kleines oder verschwindendes τ in $2at$ selbst über, welches daher die Geschwindigkeit im Zeitpunkte T_0 ist. Sie ist hiernach der seit Θ verflossenen Zeit proportional, also in Θ selbst gleich Null, und am Ende der ersten Zeiteinheit nach Θ, gleich $2a$, d. h. doppelt so gross, als der während derselben beschriebene Weg.

Man nennt eine solche Bewegung, bei welcher die Geschwindigkeit im Verhältnisse der Zeit, also in gleichen Zeiten um gleich viel (in jeder Zeiteinheit um $2a$) zunimmt, eine gleichförmig beschleunigte Bewegung. Jeder frei fallende Körper zeigt eine solche. Seine Geschwindigkeit am Ende der ersten Secunde nach dem Anfange des Falls ist gleich 30 paris. Fuss (nahe wenigstens*)), am Ende der zweiten gleich 60 Fuss, am Ende der dritten gleich 90 Fuss, etc. Der Fallraum aber in der ersten Secunde beträgt $\frac{1}{2} . 30 = 15$ Fuss, der Fallraum in den zwei ersten Secunden $2 . 2 . 15 = 60$ Fuss, in den drei ersten $3 . 3 . 15 = 135$ Fuss, u. s. w.

Zusatz. Auf ganz ähnliche Weise, nach welcher wir bei der durch die Formel $s = at^2$ dargestellten Bewegung verfuhren, lässt sich auch in jedem anderen Falle die Geschwindigkeit finden, wenn das Stück s der von einem Punkte A beschriebenen Bahn, welches sich von einem beliebig darin gewählten Anfangspunkte bis zu dem Orte erstreckt, wo sich A am Ende der Zeit t befindet, als eine analytische Function von t gegeben ist.

Die einfachste Function von t ist $a + bt$. Setzen wir

$$s = a + bt ,$$

so wächst s um $b\tau$, wenn t um τ zunimmt. Die Geschwindigkeit ist daher gleich b, also constant; die andere Constante a ist der Werth von s für $t = 0$.

Bei der zusammengesetzteren, durch

$$s = a + bt + ct^2$$

ausgedrückten Bewegung ist das Wachsthum von s während des auf t folgenden τ, gleich

$$b\tau + 2ct\tau + c\tau^2 = (b + 2ct + c\tau)\,\tau ,$$

---

*) Genauer ist diese Geschwindigkeit g im luftleeren Raume unter dem Aequator gleich 30·108, unter den Polen gleich 30·264 paris. Fuss. *Allgemeine Uebersicht des Sonnensystems* in Schumacher's *Jahrbuch für* 1837, Seite 97. Aus diesem Aufsatze Hansen's sind auch die meisten der später folgenden numerischen Angaben genommen. [Nach Helmert (*Geodäsie*, Bd. II, S. 241) ist unter der Breite B in Metern $g = 9^{m}7800\,(1 + 0{\cdot}005310 \sin B^2)$. Vergl. das Vorwort des Herausgebers.]

mithin die Geschwindigkeit gleich dem Grenzwerthe von $b + 2ct + c\tau$ für ein verschwindendes τ, d. i.

$$= b + 2ct \ .$$

Hier nimmt also die Geschwindigkeit der Zeit proportional zu, in jeder Zeiteinheit um $2c$, wie oben; ihr Werth für $t = 0$ ist gleich b, und die Constante a ist der Werth von s zu derselben Zeit.

Eben so findet sich für

$$s = a + bt + ct^2 + dt^3$$

die Geschwindigkeit

$$= b + 2ct + 3dt^2 \ ;$$

u. s. w.

Anmerkung. Wie man leicht im Voraus übersieht, muss sich die Form $s = a + bt + ct^2$ auf die einfachere $s_1 = ct_1^2$ reduciren lassen, wo s_1 und t_1 gleichfalls den Raum und die Zeit, nur von anderen Punkten angefangen, bedeuten; t_1 nämlich von dem Zeitpunkte, wo die Geschwindigkeit, gleich $b + 2ct$, Null ist, und s_1 von dem Punkte des Raumes, wo sich der bewegende Punkt für $t_1 = 0$ befindet. In der That geht die erstere Form in die letztere über, wenn man

$$s = s_1 + a - \frac{b^2}{4c} \quad \text{und} \quad t = t_1 - \frac{b}{2c}$$

setzt.

§. 11. Nicht bloss bei der Bewegung eines Punktes, sondern überhaupt bei jeder mit der Zeit sich ändernden und daher als Function von t darstellbaren Grösse x, kann nach der Geschwindigkeit ihrer Aenderung gefragt werden. Aendert sich x gleichförmig, d. h. in gleichen Zeiten um gleich viel, so wird man unter der Geschwindigkeit von x die Aenderung in der Zeiteinheit zu verstehen haben und ihren constanten Werth finden, wenn man die irgend einem Zeitraume $T_0 T_1 = \Delta t$ zugehörige Aenderung von x, gleich Δx, durch Δt dividirt. Aendert sich x ungleichförmig, so hat dieser Quotient nach verschiedener Annahme der Zeitpunkte T_0 und T_1 verschiedene Werthe. Er wird sich aber, wenn man T_0 unverändert behält und T_1 dem T_0 immer näher, also Δt immer keiner, annimmt, immer mehr einem von Δt unabhängigen Grenzwerthe nähern, und dieser wird als die Geschwindigkeit zur Zeit T_0 zu betrachten sein.

Bedeuten $x, y, z, \ldots$ die Werthe mehrerer veränderlicher Grössen zur Zeit t, und $x', y', z', \ldots$ die gleichzeitigen Werthe ihrer Ge-

schwindigkeiten. Sind nun x, y, z, ... durch eine für jeden Werth von t bestehende algebraische Gleichung mit einander verbunden, so kann daraus stets ohne Schwierigkeit eine Gleichung zwischen x', y', z', ... hergeleitet werden. Seien zu dem Ende Δx, Δy, ... die Incremente von x, y, ..., wenn t um Δt wächst. Die gegebene Gleichung wird daher noch bestehen, wenn man darin für x, y, ... resp. $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, ... setzt und damit von der Zeit t zur Zeit $t + \Delta t$ übergeht. Von der solchergestalt geänderten Gleichung ziehe man die ursprüngliche ab und dividire die restirende durch Δt. Indem man nun das Increment Δt über alle Grenzen klein werdend annimmt, und deshalb alle mit dieser Annahme verschwindenden Glieder weglässt und für $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, $\frac{\Delta y}{\Delta t}$, ... resp. x', y', ... schreibt, hat man die Gleichung zwischen den Geschwindigkeiten gefunden.

Beispiele. Sei zwischen x, y, z, ... die Gleichung

$$z = a + bx + cy + \dots \tag{1}$$

gegeben. Hieraus folgen der Reihe nach die Gleichungen

$$z + \Delta z = a + b(x + \Delta x) + c(y + \Delta y) + \dots,$$

$$\Delta z = b\Delta x + c\Delta y + \dots, \qquad \frac{\Delta z}{\Delta t} = b\frac{\Delta x}{\Delta t} + c\frac{\Delta y}{\Delta t} + \dots,$$

also zuletzt

$$z' = bx' + cy' + \dots \tag{1*}$$

Eben so findet sich aus der Gleichung

$$z = xy, \tag{2}$$

nachdem man die gedachten Operationen vorgenommen hat:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = x\frac{\Delta y}{\Delta t} + y\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\Delta x}{\Delta t}\Delta y.$$

Lässt man nun Δt unendlich klein werden, so verschwindet das letzte Glied gegen die übrigen, und es kommt:

$$z' = xy' + yx'; \tag{2*}$$

oder, wie wir dieses Resultat noch ausdrücken können: Sind x' und y' die Geschwindigkeiten, mit denen sich x und y ändern, oder kurz die Geschwindigkeiten von x und y, so ist $xy' + yx'$ die Geschwindigkeit des Productes xy.

Setzt man in (2) $y = x$, so wird $z = x^2$, und (2*) geht über in

$$z' = 2xx',$$

d. h. $2xx'$ ist die Geschwindigkeit von x^2.

Ist $1 = xy$ die vorgegebene Gleichung, also das vorige z constant, gleich 1, so wird $z' = 0$, mithin

$$xy' + yx' = 0 \quad \text{und} \quad y' = -\frac{yx'}{x} = -\frac{x'}{x^2},$$

wegen $y = \frac{1}{x}$; d. h. $-\frac{x'}{x^2}$ ist die Geschwindigkeit von $\frac{1}{x}$.

Die weitere Entwickelung dieses Gegenstandes gehört, wie die meisten meiner Leser schon wissen werden, in das Gebiet der Differentialrechnung. Newton, welcher diese Wissenschaft ähnlicherweise, wie hier, auf die Begriffe von Zeit und Bewegung gründete, nannte die Function von t, welche die Geschwindigkeit einer anderen Function von t ausdrückt, die Fluxion der anderen; die neueren Geometer nennen sie schlechthin die aus der anderen abgeleitete Function [ihren ersten Differentialquotienten].

§. 12. Lehrsatz. *Ist die Bewegung eines Punktes P aus den Bewegungen mehrerer anderer Punkte A, B, ... zusammengesetzt, so ist auch in jedem Zeitpunkte T_0 die Geschwindigkeit von P aus den Geschwindigkeiten von A, B, ... zusammengesetzt.*

Beweis. Nach §. 6 ist die gerade Linie $P_0 P_1$ aus den geraden $A_0 A_1$, $B_0 B_1$, ..., folglich auch §. 2, e

$$m \, . \, P_0 P_1 \quad \text{aus} \quad m \, . \, A_0 A_1 \,, \quad m \, . \, B_0 B_1 \,, \quad \ldots$$

zusammengesetzt. Es ist aber, wenn $T_0 T_1$ als Zeitelement genommen wird, und m, wie in §. 10, die Anzahl der in der Zeiteinheit enthaltenen Elemente bedeutet, $m \, . \, A_0 A_1 \equiv$ der Geschwindigkeit von A zur Zeit T_0, $m \, . \, B_0 B_1 \equiv$ der Geschwindigkeit von B zu derselben Zeit, etc.; folglich u. s. w.

Folgerungen. a) Wenn die Geschwindigkeiten von A, B, ... im Verlauf der Zeit weder ihre Richtung noch ihre Grösse ändern, so wird auch die Geschwindigkeit von P eine constante Richtung und Grösse haben, d. h.:

Bewegen sich mehrere Punkte geradlinig und gleichförmig, so ist auch die aus ihnen zusammengesetzte Bewegung geradlinig und gleichförmig.

b) Wird eine in einer Ebene vor sich gehende Bewegung nach zwei in der Ebene sich schneidenden Geraden a und b zerlegt, so finden sich die Geschwindigkeiten der Bewegungen in a und b, wenn man die Geschwindigkeit der ersteren Bewegung nach denselben Geraden zerlegt. — Denn nach dem obigen Satze müssen die Geschwindigkeiten der zwei durch Zerlegung erhaltenen Bewegungen, wenn sie zusammengesetzt werden, die Geschwindigkeit der ursprüng-

lichen Bewegung wieder geben. Letztere Geschwindigkeit muss folglich in die zwei ersteren zerlegt werden können. Eine gerade Linie in der Ebene, und folglich auch die durch sie ausgedrückte Geschwindigkeit, kann aber nach den zwei Geraden a und b der Ebene nur auf Eine Weise zerlegt werden (§. 3).

Eben so zeigt sich, dass auch bei Zerlegung einer Bewegung nach einer Ebene und einer sie schneidenden Geraden, oder nach drei sich in einem Punkte schneidenden und nicht in einer Ebene liegenden Geraden, die Geschwindigkeiten der somit entstehenden Bewegungen gefunden werden, wenn man die Geschwindigkeit der gegebenen Bewegung nach derselben Ebene und Geraden, oder nach denselben drei Geraden zerlegt.

c) Da die Zerlegung einer Bewegung sowohl, als einer geraden Linie, in jedem der gedachten drei Fälle durch Projection bewerkstelligt werden kann (§§. 3 und 7), so lässt sich die eben gemachte Folgerung auch also aussprechen: Wird eine Bewegung auf eine Gerade oder eine Ebene projicirt, so findet sich die Geschwindigkeit der projicirten Bewegung, wenn man die Geschwindigkeit der ursprünglichen Bewegung auf dieselbe Gerade oder Ebene projicirt; oder kurz:

Die Geschwindigkeit der projicirten Bewegung ist der Projection der Geschwindigkeit der ursprünglichen Bewegung gleich.

Dasselbe erhellet unmittelbar und noch einfacher folgendergestalt: Ist der Punkt A die Projection des Punktes P, so ist auch für je zwei Zeitpunkte T_0 und T_1, A_0A_1 von P_0P_1, und $m.A_0A_1$ von $m.P_0P_1$ die Projection. Es sind aber letztere Linien, wenn T_0T_1 als Zeitelement und m in der obigen Bedeutung genommen wird, $\equiv$ den Geschwindigkeiten von A und P zur Zeit T_0; folglich u. s. w.

§. 13. Lehrsatz. *Wenn von zwei sich bewegenden Punkten A und B die Geschwindigkeiten (sowohl der Richtung, als der Grösse nach* (§. 9)*) stets einander gleich sind, so sind die Bewegungen selbst einander gleich.*

Beweis. Seien T_0T_1, T_1T_2, ... mehrere auf einander folgende Zeitelemente, so sind während des ersten die Geschwindigkeiten von A und B, $\equiv \frac{A_0A_1}{T_0T_1}$ und $\equiv \frac{B_0B_1}{T_0T_1}$. Da diese einander gleich und gleichgerichtet sein sollen, so müssen A_0A_1 und B_0B_1 selbst einander gleich sein und einerlei Richtung haben, also

$$A_0A_1 \equiv B_0B_1 , \qquad \text{folglich} \quad A_0B_0 \equiv A_1B_1 .$$

Eben so wird bewiesen, dass $A_1B_1 \equiv A_2B_2$, u. s. w. Die Linie AB

bleibt sich daher stets gleich und parallel, und die Bewegungen von A und B sind folglich einander gleich (§. 4).

Folgerung. Haben zwei Punkte stets einander gleiche Geschwindigkeiten und fallen sie in irgend einem Zeitpunkte zusammen, so werden sie dies auch in jedem anderen (§. 4).

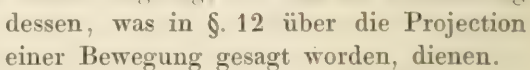
Beispiel. Bewege sich A in einer Geraden nach dem Gesetz, dass

$$s = a + bt + ct^2 \,. \tag{1}$$

Der Punkt B bewege sich in derselben Geraden und sei für $t = 0$ vom Anfangspunkte der Geraden um a entfernt; seine Geschwindigkeit in demselben Zeitpunkte sei gleich b und wachse in jeder Zeiteinheit um $2c$. Nach dem, was über die durch (1) ausgedrückte Bewegung in §. 10 gesagt worden, fallen daher A und B für $t = 0$ zusammen, haben für $t = 0$ gleiche Geschwindigkeiten, und so auch zu jeder anderen Zeit, weil auch die Geschwindigkeit von A in jeder Zeiteinheit um $2c$ wächst. Die Bewegungen von A und B sind mithin identisch, und wir folgern hieraus umgekehrt: Bewegt sich ein Punkt in einer Geraden so, dass er für $t = 0$ vom Anfangspunkte der Geraden um a entfernt ist und eine Geschwindigkeit gleich b hat, und dass letztere in jeder Zeiteinheit um $2c$ wächst, so ist seine Entfernung vom Anfangspunkte zur Zeit t,

$$= a + bt + ct^2 \,.$$

§. 14. Nach der geradlinigen und gleichförmigen Bewegung sind die einfachsten Bewegungen die geradlinige, bei welcher sich die Grösse der Geschwindigkeit proportional der Zeit ändert, und die gleichförmige, bei welcher sich die Richtung der Geschwindigkeit proportional der Zeit, in gleichen Zeiten um gleiche Winkel, ändert. Erstere Bewegung haben wir bereits in den §§. 10 und 13 betrachtet: letztere, oder die gleichförmige Kreisbewegung, soll uns zur Erläuterung



dessen, was in §. 12 über die Projection einer Bewegung gesagt worden, dienen.

Bewege sich demnach P (Fig. 10) um den festen Punkt O in einem Kreise, dessen Halbmesser $OP = a$, von der Rechten nach der Linken mit der constanten Geschwindigkeit c. Ist die Umlaufszeit im Kreise, gleich $2U$, gegeben, so findet sich

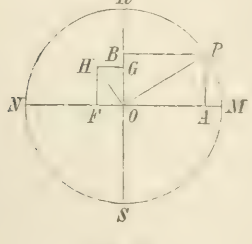


Fig. 10.

$$c = \frac{\pi a}{U} \,,$$

wo π die Ludolph'sche Zahl bezeichnet.

Man projicire nun diese Bewegung rechtwinklig auf einen Durchmesser MN des Kreises und nenne A den Punkt, welcher die projicirte Bewegung hat. A ist hiernach der Fusspunkt des von P auf MN gefällten Perpendikels, bewegt sich zwischen M und N hin und her und gebraucht zu jedem Hin- oder Hergange die halbe Umlaufszeit U.

Die Richtung, nach welcher sich P bewegt, ist die Richtung der an den Kreis in P nach der Linken hin gezogenen (auf OP perpendikularen) Tangente. Setzt man daher nach derselben Seite hin eine Linie $OH = c$ perpendikular auf OP, und fällt von H auf MN das Perpendikel HF, so wird durch OH die Geschwindigkeit von P ihrer Grösse und Richtung nach dargestellt, durch OF aber, als die Projection von OH auf MN, die Geschwindigkeit von A. Weil die Dreiecke OPA und HOF gleichwinklig sind, so verhält sich

$$AP : OF = OP : OH = a : c \ .$$

Die Geschwindigkeit von A ist hiernach gleich $AP \,.\, c : a$, also dem Perpendikel AP proportional, und daher Null, wenn A in M oder in N ist, am grössten aber, gleich c, wenn A auf der Mitte O seines Weges ist.

Die Bewegung und die Geschwindigkeit von A lassen sich auch leicht durch trigonometrische Functionen ausdrücken. Zu dem Ende werde die Zahl $\frac{c}{a} = \frac{\pi}{U}$ kurz mit n bezeichnet. Sie ist der in Theilen des Halbmessers ausgedrückte Bogen, um welchen P in der Zeiteinheit fortgeht. Nimmt man daher den Winkel von

$$57^\circ 17' 44''8 = 206264''8 \ ,$$

der durch einen dem Halbmesser gleichen Bogen gemessen wird, zur Maasseinheit der Winkel, so bedeutet dieselbe Zahl n auch den Winkel, um welchen sich der Halbmesser OP in der Zeiteinheit dreht, und wird deshalb die Winkelgeschwindigkeit von P genannt. Indem man nun alle Winkel von der Rechten nach der Linken rechnet, sei α der Winkel, den der sich drehende Halbmesser OP mit dem festen OM zur Zeit $t = 0$ macht; am Ende von t ist daher dieser Winkel gleich $\alpha + nt$, und zu eben der Zeit

$$OA = OP \,.\, \cos MOP = a \cos(\alpha + nt)$$

und

$$OF = OH \cos MOH \ ,$$

oder, weil

$$OH = c = na \quad \text{und} \quad MOH = MOP + POH = \alpha + nt + 90^\circ$$

ist,

$$OF = -na \sin(\alpha + nt) \ .$$

Wenn man daher für die Zeit t den Werth von OA gleich x und die Geschwindigkeit von A gleich x' setzt, und die Richtung von N nach M für die positive nimmt, so hat man die Formeln:

$$\text{I.} \quad x = a\cos(\alpha + nt) \quad \text{und} \quad x' = -na\sin(\alpha + nt)\ ,$$

wodurch sich für jeden Zeitpunkt der Ort des Punktes A und seine Geschwindigkeit bestimmen lassen. Je nachdem sich dabei die Werthe von x und x' positiv oder negativ finden, sind die Richtung OA und die der Geschwindigkeit von A mit der Richtung NM einerlei oder ihr entgegengesetzt.

Projicirt man gleicherweise die Bewegung von P auf den Durchmesser RS, welcher den vorigen MN rechtwinklig schneidet, und fällt deshalb von P und H auf RS die Perpendikel PB und HG, so ist B der Punkt, welcher die projicirte Bewegung hat, und OG seine Geschwindigkeit. Nimmt man ferner diejenige Richtung des neuen Durchmessers, welche mit NM einen Winkel von 90°, nicht von 270°, macht, also die Richtung SR, für die positive, so ist

$$OB = OP\cos POR \quad \text{und} \quad OG = OH\cos ROH\ ,$$

oder, weil

$$POR = 90^\circ - MOP \quad \text{und} \quad ROH = MOP = \alpha + nt$$

ist, wenn man, analog mit dem Vorigen, $OB = y$ und $OG = y'$ setzt:

$$\text{II.} \quad y = a\sin(\alpha + nt) \quad \text{und} \quad y' = na\cos(\alpha + nt)\ .$$

Formeln, welche in die vorigen übergehen, wenn man y und y' in x und x' verwandelt und α um 90° wachsen lässt.

Man bemerke nur noch, dass durch die zwei rechtwinkligen Projectionen der Bewegung von P auf zwei sich rechtwinklig schneidende Gerade, sie zugleich nach diesen zwei Geraden zerlegt worden ist.

Zusatz. Ganz ähnliche Formeln finden statt, wenn P sich im Kreise nicht gleichförmig bewegt. Ist überhaupt l die Function von t, welche den Werth des Winkels MOP am Ende der Zeit t angiebt, und l' die Geschwindigkeit dieser Function (§. 11), so ist zu eben der Zeit der Bogen $MP = al$, also die Geschwindigkeit, mit der er sich ändert, oder die Geschwindigkeit von P, gleich al', und die in P an den Kreis gezogene Tangente ist ihre Richtung. Macht man daher, wie vorhin, OH parallel mit dieser Richtung und gleich al', und projicirt P sowohl als H rechtwinklig auf MN und RS, so sind OF und OG die Geschwindigkeiten von A und B, und man erhält für die Bewegung dieser Punkte, wenn man wiederum

$OA = x$ und $OB = y$ und ihre Geschwindigkeiten gleich x' und y' setzt:

$$x = a \cos l \;, \qquad x' = -a l' \sin l \;,$$
$$y = a \sin l \;, \qquad y' = a l' \cos l \;.$$

Ziehen wir hieraus noch den Schluss, dass überhaupt, wenn l eine veränderliche Zahl und l' ihre Geschwindigkeit bezeichnet, die Geschwindigkeiten der trigonometrischen Functionen $\cos l$ und $\sin l$ resp. gleich $-l' \sin l$ und $l' \cos l$ sind, — zwei Resultate, von denen das eine in das andere übergeht, wenn man l in $90^\circ - l$ und damit l' in $-l'$ verwandelt.

Zweites Kapitel.

Von den Wirkungen der Kräfte.

§. 15. Unsere bisher rein mathematischen Untersuchungen über die Bewegung wollen wir jetzt auf die uns umgebende Körperwelt anwenden, und statt der sich bewegenden mathematischen Punkte die Bewegung physischer Körper in Betrachtung ziehen, die wir aber, vor der Hand wenigstens, gleichfalls nur als Punkte, oder doch so klein annehmen wollen, dass ihre Dimensionen ganz ausser Acht gelassen werden können.

Hier tritt uns nun sogleich die der reinen Mathematik fremde Relation zwischen Ursache und Wirkung entgegen. Es ist nämlich nicht möglich, dass ein physischer Körper, welcher in Ruhe ist, ohne äussere Ursache sich zu bewegen anfange, und eben so wenig, dass ein sich bewegender Körper ohne äussere Ursache die Richtung und Geschwindigkeit seiner Bewegung ändere. Ohne eine fremde Einwirkung wird ein ruhender Körper fortwährend in Ruhe bleiben, und ein sich bewegender ohne Aufhören in gerader Linie und mit unveränderter Geschwindigkeit fortgehen. Diese allgemeine Eigenschaft der Körper, der zufolge sie ihren Zustand, er bestehe in Ruhe oder Bewegung, nicht selbstthätig zu ändern im Stande sind, wird die Trägheit der Körper genannt.

Welches die den Zustand der Körper ändernden Ursachen sind, untersuchen wir hier nicht näher, sondern ziehen bloss die Wirkungen derselben in Betracht, und legen uns daher Fragen von etwa

folgender Art zur Beantwortung vor: Es sind zwei oder mehrere Bewegungen gegeben; welches wird die Bewegung eines Körpers sein, wenn die Ursachen, welche einzeln ihm die gegebenen Bewegungen mittheilen, gleichzeitig auf ihn einwirken? — Oder: ein Körper, der sich bisher geradlinig und gleichförmig bewegte, ändert plötzlich seine Richtung und seine Geschwindigkeit; nach welcher Richtung und mit welcher Geschwindigkeit wird er sich bewegen, wenn die Ursache, welche jene Aenderungen hervorbrachte, auf denselben in Ruhe sich befindenden, oder sich irgendwie anders bewegenden, Körper wirkt?

Es leuchtet ein, dass die Lösung dieser und ähnlicher Aufgaben ohne die Zuhülfenahme eines neuen Grundsatzes nicht möglich ist, eines Grundsatzes, der aus der Erfahrung geschöpft ist und die Lösung der einfachsten unter diesen Aufgaben in sich schliesst. Die Entwickelung dieses Grundsatzes und seiner unmittelbaren Folgen wird der Gegenstand der nächsten Paragraphen sein.

§. 16. Die Ursache, welche einen ruhenden Körper in Bewegung setzt und die Richtung und Geschwindigkeit eines sich bewegenden zu ändern vermag, nennt man Kraft. Die Richtung, nach welcher ein vorher ruhender Körper, durch eine Kraft getrieben, sich zu bewegen anfängt, heisst die Richtung der Kraft.

Zwei Kräfte heissen einander gleich, wenn sie, nach entgegengesetzten Richtungen auf einen Körper wirkend, mit einander im Gleichgewichte sind. Von zwei Kräften nennt man die eine das n-fache der anderen, wenn n der anderen gleiche und nach einerlei Richtung auf einen Körper wirkende Kräfte der ersteren Kraft, sobald diese nach entgegengesetzter Richtung am Körper angebracht wird, das Gleichgewicht halten.

Hiernach kann man das Verhältniss zwischen Kräften immer durch Zahlen, so nahe als man will, ausdrücken: denn man wird von zwei Kräften sagen, dass sie sich wie die Zahlen m und n verhalten, wenn es eine dritte Kraft giebt, von welcher die eine jener beiden das m-fache, die andere das n-fache ist. Kräfte können daher sehr passend auch durch gerade Linien ausgedrückt werden, welche die Richtungen der Kräfte haben, und deren Längen den Zahlenwerthen der Kräfte proportional sind. Eine Kraft wird man hiernach aus zwei oder mehreren anderen Kräften zusammengesetzt nennen, wenn die Linie, welche die erstere ausdrückt, aus den die letzteren darstellenden Linien zusammengesetzt ist.

Dieses vorausgeschickt, zeigt nun die Statik, dass, wenn Kräfte in beliebiger Anzahl sich an einem Körper A das Gleichgewicht

halten, man, ohne das Gleichgewicht aufzuheben, statt zweier oder mehrerer derselben die aus ihnen zusammengesetzte substituiren kann; — also statt zweier Kräfte, welche nach einerlei, oder nach entgegengesetzter Richtung wirken, eine Kraft, welche im ersteren Falle der Summe, im letzteren der Differenz jener zwei Kräfte gleich ist und die Richtung der grösseren hat. Machen aber zwei der auf A wirkenden Kräfte, AB und AC (Fig. 11), einen Winkel mit einander, so ergänze man denselben zu einem Parallelogramm $BACD$, und es wird die aus A zu ziehende Diagonale AD des letzteren die statt AB und AC zu setzende Kraft darstellen. Denn es ist AD aus AB und BD, folglich auch, weil $BD \equiv AC$, aus AB und AC zusammengesetzt [Satz vom Parallelogramm der Kräfte].

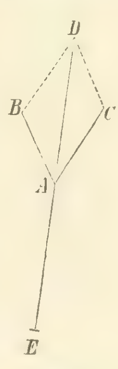


Fig. 11.

Noch folgt hieraus, dass eine Kraft AE, welche mit AB und AC das Gleichgewicht halten soll, der Kraft AD gleich und entgegengesetzt sein muss; und überhaupt: Sollen mehrere auf einen Körper wirkende Kräfte sich das Gleichgewicht halten, so muss jede derselben der aus den jedesmal übrigen zusammengesetzten gleich und entgegengesetzt sein, oder, was dasselbe ist, die Zusammensetzung aller Kräfte muss Null geben.

Sind mehrere auf einen Körper A wirkende Kräfte nicht im Gleichgewichte, sondern bewegen sie ihn, und sind AB, AC irgend zwei derselben, so füge man noch die aus letzteren beiden zusammengesetzte Kraft und die dieser gleiche und entgegengesetzte AE hinzu. Weil AD und AE für sich im Gleichgewichte sind, so wird durch diese Hinzufügung die Bewegung von A nicht geändert. Eben so wenig aber wird dieses geschehen, wenn man AB, AC und AE, als drei für sich im Gleichgewichte stehende Kräfte, entfernt, so dass AD anstatt der anfänglichen AB und AC zurückbleibt. So wie vorhin das Gleichgewicht, bleibt daher auch die von mehreren Kräften hervorgebrachte Bewegung eines Körpers ungeändert, wenn man statt zweier, oder statt dreier, etc. oder auch statt aller, die aus ihnen zusammengesetzte Kraft substituirt.

§. 17. Jede Kraft wirkt auf einen Körper längere oder kürzere Zeit ununterbrochen fort. Zur Erleichterung der Untersuchung wollen wir uns aber fürs Erste jede Kraft nur augenblicklich oder stossweise wirkend denken. Ein vorher ruhender Körper wird daher von dem Zeitpunkte an, in welchem er einen solchen Stoss empfängt, nach der Richtung desselben mit einer von dessen Stärke abhängenden

constanten Geschwindigkeit fortgehen, und dieses so lange, bis ein anderer Stoss seine Bewegung ändert, oder ganz aufhebt.

Ob nun die einem Körper durch einen Stoss ertheilte Geschwindigkeit dem Stosse geradezu proportional ist, so dass z. B. ein Stoss, doppelt so gross als ein anderer, oder zwei dem anderen gleiche und nach einerlei Richtung erfolgende Stösse, eine doppelt so grosse Geschwindigkeit als der andere hervorbringen, oder ob die Geschwindigkeit nach irgend einem anderen weniger einfachen Gesetze von der Stärke des Stosses abhängt, darüber können wir nicht a priori, sondern erst durch Erfahrung entscheiden. Diese aber stimmt in der That mit allen Resultaten überein, welche sich theoretisch unter Annahme jenes einfachsten Verhältnisses zwischen Stoss und Geschwindigkeit ergeben. Wir stellen daher, als wahres Naturgesetz, und zugleich als das nach §. 15 noch nöthige Axiom, den Satz auf:

Die von verschiedenen Kräften einem Körper ertheilten Geschwindigkeiten sind den Kräften selbst proportional.

§. 18. Folgerungen. *a*) Empfängt ein ruhender Körper gleichzeitig mehrere Stösse a, b, c, ..., sei es nach einerlei oder nach verschiedenen Richtungen, so ist die Geschwindigkeit, mit welcher er sich zu bewegen anfängt, aus den Geschwindigkeiten, welche ihm die Stösse einzeln ertheilen, zusammengesetzt. Denn die Stösse a, b, c, ... sind (§. 16 zu Ende) gleichwirkend mit einem einzigen aus ihnen zusammengesetzten Stosse x, und dem Grundsatze zufolge sind die von a, b, c, ... und x erzeugten Geschwindigkeiten den Stössen a, b, c, ... und x selbst proportional: folglich u. s. w.

b) Empfängt ein anfangs ruhender Körper nicht gleichzeitig, sondern in auf einander folgenden Zeitpunkten T_0, T_1, T_2, ... Stösse, welche einzeln dem ruhenden die (ihrer Grösse und Richtung nach gegebenen) Geschwindigkeiten c_0, c_1, c_2, ... resp. ertheilen würden, so wird er sich während des Zeitraumes $T_0 T_1$ mit der Geschwindigkeit c_0 bewegen. Für seine fernere Bewegung ist es nun offenbar gleichgültig, wie lange vor T_1 er die Geschwindigkeit c_0 gehabt hat, und man kann daher in dieser Hinsicht auch annehmen, dass er erst zur Zeit T_1 diese Geschwindigkeit erhält. Hiermit verbindet sich die ihm zu derselben Zeit mitgetheilte Geschwindigkeit c_1, und er bewegt sich daher während $T_1 T_2$ mit der aus c_0 und c_1 zusammengesetzten Geschwindigkeit. Eben so ist seine Geschwindigkeit während $T_2 T_3$ aus c_0, c_1, c_2 zusammengesetzt. u. s. w. Die Bahn, die der Körper somit beschreibt, ist im Allgemeinen eine gebrochene gerade Linie, und nur dann eine einfache Gerade, wenn

die Stösse nach einerlei Richtung, oder auch zum Theil nach entgegengesetzter Richtung, geschehen. Die Geschwindigkeiten während $T_0 T_1$, $T_1 T_2$, $T_2 T_3$, etc. sind in diesem Falle

$$c_0 \,, \quad c_0 + c_1 \,, \quad c_0 + c_1 + c_2 \,, \quad \text{etc.} \,,$$

wo diejenigen c, welche von entgegengesetzten Stössen hervorgebracht werden, mit negativen Zeichen zu nehmen sind. — Haben alle Stösse nicht nur einerlei Richtung, sondern auch einerlei Stärke, so ist $c_0 = c_1 = c_2 =$ etc., und die successiven Geschwindigkeiten sind gleich c_0, $2c_0$, $3c_0$, $4c_0$, etc.

§. 19. Suchen wir jetzt die umgekehrte Aufgabe zu lösen und den Stoss zu bestimmen, welcher erfolgen muss, wenn ein anfänglich in der Geraden MB (Fig. 12) mit einer Geschwindigkeit gleich AB sich bewegender Körper von B aus in der Richtung BN mit einer Geschwindigkeit gleich BC fortgeht. Nach dem Vorigen muss der gesuchte Stoss dem Körper, wenn er in B ist, eine Geschwindigkeit beibringen, welche, mit der Geschwindigkeit AB zusammengesetzt, die BC giebt. Man mache deshalb in der Verlängerung von MB das Stück $BD = AB$, und es wird die Linie DC, weil sie, mit $AB = BD$ zusammengesetzt, die BC giebt, die von dem Stoss zu erzeugende Geschwindigkeit ihrer Grösse und Richtung nach darstellen; oder: man mache $AE = BC$, so ist BC aus AB und BE zusammengesetzt, und daher BE ($= DC$) die gesuchte Geschwindigkeit.

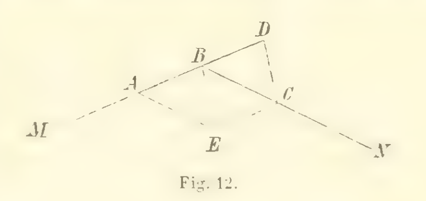


Fig. 12.

Die letztere Construction lässt sich auch durch die Vorstellung begründen, der Körper erhalte, in B angelangt, einen Stoss BA, welcher die anfängliche Geschwindigkeit aufhebt, und einen Stoss BC, welcher ihm die nachherige ertheilt. Der gesuchte Stoss wird folglich aus diesen beiden zusammengesetzt und mithin die Diagonale BE des zu einem Parallelogramm ergänzten Winkels ABC sein.

In dem besonderen Falle, wenn MB und BN eine Gerade ausmachen, liegen auch D und E in dieser Geraden, und es ist die Geschwindigkeit, welche der Stoss in B dem Körper beibringt, gleich

$$DC = BE = BC - AB \,,$$

und nach N oder M gerichtet, je nachdem BC oder AB die grössere Geschwindigkeit ist.

§. 20. Bei den in der Folge zu betrachtenden Bewegungen ändern sich die Richtung und die Geschwindigkeit nicht, wie vorhin, mit einem Male, sondern stetig. Wie aber schon bemerkt worden, kann man auch die Aenderungen einer stetigen Bewegung als plötzlich eintretend sich vorstellen, wenn man nur die Zeitpunkte ihres Eintrittes unendlich nahe auf einander folgend annimmt. Wir denken uns demnach die Zeit in einander gleiche Elemente $T_0 T_1$, $T_1 T_2$, $T_2 T_3$, ... getheilt, deren stets eine und dieselbe Anzahl, gleich m, auf die Zeiteinheit gehen, und substituiren für die wirkliche Bewegung eines Körpers A eine andere, bei welcher A in den Zeitpunkten T_0, T_1, T_2, ... dieselben Oerter A_0, A_1, A_2, ... (Fig. 13), wie bei der wirklichen, einnimmt, von jedem derselben aber zum nächstfolgenden sich geradlinig und gleichförmig bewegt. Hiernach sind die Geschwindigkeiten von A während $T_0 T_1$, $T_1 T_2$, etc. $= m . A_0 A_1$, $m . A_1 A_2$, etc. Man mache nun

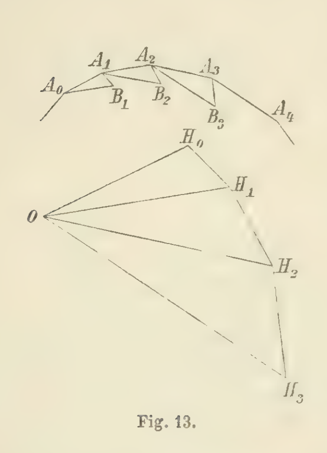


Fig. 13.

$$A_0 B_1 = A_1 A_2 \,,$$
$$A_1 B_2 = A_2 A_3 \,,$$
$$A_2 B_3 = A_3 A_4 \,, \qquad \text{etc.}$$

so ist (§. 19) $m . A_1 B_1$ die Geschwindigkeit, die dem Körper in A_1, also zur Zeit T_1, durch einen Stoss ertheilt werden muss, damit sich seine vorhergehende Geschwindigkeit $m . A_0 A_1$ in die nachfolgende $m . A_1 A_2$ umwandelt. Eben so muss der Körper in A_2, A_3, ... Stösse erhalten, die ihm die Geschwindigkeiten $m . A_2 B_2$, $m . A_3 B_3$, ... beibringen.

Nehmen wir nun zuvörderst an, dass alle diese Geschwindigkeiten, und folglich auch die zu Anfang jedes der einander gleichen Zeitelemente erfolgenden Stösse, einander gleich und gleichgerichtet seien. Man sagt alsdann, dass auf den Körper nach derselben Richtung eine constante beschleunigende Kraft wirke. Der Körper wird dann, wenn er anfangs in Ruhe war, nach der Richtung der Kraft geradlinig fortgehen, und seine Geschwindigkeit während des zweiten, dritten, ... m-ten Zeitelements wird gleich 2γ, 3γ, ... $m\gamma$ sein, wenn γ die Geschwindigkeit während des ersten Elementes oder diejenige bedeutet, welche ein einzelner Stoss ertheilt (§. 18). Die Geschwindigkeit wird mithin der Zeit proportional, in jeder Zeiteinheit um $m\gamma$, wachsen, und die Bewegung des Körpers wird eine gleichförmig beschleunigte sein (§. 10).

Zwei constante beschleunigende Kräfte haben wir einander gleich zu nennen, wenn jeder Stoss der einen Kraft jedem Stosse der anderen gleich ist. Der anfangs ruhende Körper wird hiernach, unter dem Einflusse der einen, dieselbe gleichförmig beschleunigte Bewegung, wie unter dem Einflusse der anderen, annehmen, d. h. seine Geschwindigkeit wird in jeder Zeiteinheit das eine Mal um eben so viel, als das andere Mal, wachsen.

Eine constante beschleunigende Kraft P ist nach §. 16 das p-fache einer anderen Kraft Q derselben Art zu nennen, wenn p der anderen gleiche und nach einerlei Richtung wirkende Kräfte dieselbe Bewegung, wie P allein, hervorbringen. Wirken aber die p Kräfte zusammen, so empfängt der Körper zu Anfang jedes Zeitelementes p Stösse, welche in Vereinigung ihm eine p-mal so grosse Geschwindigkeit, als jeder Stoss einzeln, beibringen. Es wird daher unter der Wirkung der Kraft P, wenn sie das p-fache von Q ist, und wenn der Körper, wie vorhin, jedesmal ruhend vorausgesetzt wird, die constante Zunahme der Geschwindigkeit in jeder Zeiteinheit p-mal so gross sein, als wenn die Kraft Q wirkt. Constante beschleunigende Kräfte verhalten sich hiernach, wie die von ihnen in der Zeiteinheit (oder überhaupt in gleicher Zeit) erzeugten Incremente der Geschwindigkeit; und wenn man daher, wie es gebräuchlich ist, und auch hier geschehen soll, diejenige constante Kraft $= 1$ setzt, unter deren Wirkung das Increment der Geschwindigkeit in jeder Zeiteinheit $= 1$ ist, so wird man jede andere constante Kraft durch dieselbe Zahl auszudrücken haben, welche das von der Kraft in jeder Zeiteinheit bewirkte Increment der Geschwindigkeit ausdrückt, — also durch $m\gamma$, wenn γ die von einem einzelnen Stosse erzeugte Geschwindigkeit ist, — oder durch $mm \,.\, A_1B_1$, wo A_1B_1 den Weg vorstellt, den der von einem einzelnen Stosse getriebene Körper (mit der Geschwindigkeit $\gamma = m \,.\, A_1B_1$) in jedem Zeitelemente zurücklegt.

So ist z. B. beim freien Falle der Körper, als einer geradlinigen nach unten gerichteten Bewegung, deren Geschwindigkeit in jeder Secunde um 30 Fuss wächst, eine nach unten gerichtete constante Kraft, gleich 30, thätig, wenn die Secunde zur Zeiteinheit und der Fuss zur Linieneinheit genommen wird. Man nennt diese Kraft die Schwerkraft.

§. 21. Im Allgemeinen sind bei einer gegebenen Bewegung $A_0A_1A_2\ldots$ die Geschwindigkeiten $m \,.\, A_1B_1$, $m \,.\, A_2B_2, \ldots$, und mithin auch die in gleichen Zeitelementen auf einander folgenden Stösse, welche zur Erzeugung jener Bewegung dem Körper ertheilt werden

müssen, von einem Elemente zum anderen entweder ihrer Richtung, oder ihrer Grösse nach, oder in beiderlei Hinsicht, verschieden. Man sagt alsdann, dass der Körper von einer veränderlichen beschleunigenden Kraft getrieben werde, und bestimmt deren Richtung und Grösse zu einer gewissen Zeit aus dem gleichzeitig stattfindenden Stosse eben so, als wie die Richtung und Grösse einer constanten Kraft aus einem der einander dann gleichen und gleichgerichteten Stösse bestimmt wird. Die den Körper A treibende veränderliche Kraft hat hiernach in den Zeitpunkten T_1, T_2, ... die Richtungen $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, ... und die Werthe $mm \,.\, A_1 B_1$, $mm \,.\, A_2 B_2$, ...

In dem Falle, wenn die Bewegung von A geradlinig ist, liegen A_0, A_1, A_2, ..., mithin auch B_1, B_2, ... in derselben Geraden, und es ist

$$A_1 B_1 = A_1 A_2 - A_0 A_1 \ .$$

Die beschleunigende Kraft hat dann folglich dieselbe Linie, in welcher sich der Körper bewegt, zu ihrer Richtung, und ihre Grösse zur Zeit T_1 ist gleich

$$mm \,.\, A_1 B_1 = m\,(m \,.\, A_1 A_2 - m \,.\, A_0 A_1) \ ,$$

gleich dem m-fachen des Wachsthums von $m \,.\, A_0 A_1$ während des Elements $T_0 T_1$, also gleich der Geschwindigkeit, mit welcher $m \,.\, A_0 A_1$ wächst (§. 11), d. h.:

Bei der Bewegung eines Körpers in gerader Linie ist die beschleunigende Kraft stets der Geschwindigkeit gleich, mit welcher sich die Geschwindigkeit des Körpers ändert.

Ist daher die Entfernung x des Körpers zur Zeit t von einem beliebig gewählten Anfangspunkte der Linie, als eine Function von t gegeben, und heisst x', wie in §. 11, die daraus abzuleitende Geschwindigkeit von x, sowie x'' die Geschwindigkeit von x', so ist x' die Geschwindigkeit des Körpers zur Zeit t, und x'' die ihn zu derselben Zeit beschleunigende Kraft.

Beispiele. 1) Sei

$$x = a + bt + ct^2 \ ,$$

so ist

$$x' = b + 2ct \quad \text{und} \quad x'' = 2c \ ,$$

also die Kraft constant und der Zunahme von x' in der Zeiteinheit gleich, wie uns schon bekannt war.

2) Bewegt sich ein Körper A (Fig. 10) zwischen den Punkten M und N nach dem in §. 14 geometrisch dargestellten und durch die Formel

$$x = a \cos{(\alpha + nt)}$$

ausgedrückten Gesetze hin und zurück, so ist

$$x' = -na \sin(\alpha + nt) \ ,$$

und da nach den Formeln II. ebds. von $a \sin(\alpha + nt)$ die Geschwindigkeit gleich $na \cos(\alpha + nt)$ ist, so wird

$$x'' = -nna \cos(\alpha + nt) = -nnx = -nn \, . \, OA = nn \, . \, AO \ .$$

Die Kraft treibt daher den Körper A stets nach dem Mittelpunkte O hin und ist dem Abstande des A von O proportional.

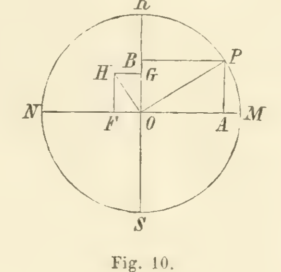


Fig. 10.

Dasselbe folgt aus der Formel

$$y = a \sin(\alpha + nt)$$

für den zwischen R und S sich bewegenden Körper B. Denn seine Geschwindigkeit ist

$$y' = na \cos(\alpha + nt) \ ,$$

und mithin die ihn beschleunigende Kraft

$$y'' = -nna \sin(\alpha + nt) = -nny = nn \, . \, BO \ .$$

§. 22. Ein Resultat, welches dem im vorigen Paragraphen für die geradlinige Bewegung erhaltenen ganz analog ist, ergiebt sich auch für die krummlinige. Zu dem Ende lasse man einen Punkt H (Fig. 13) sich so bewegen, dass sein Abstand OH von einem festen Punkte O stets gleich und gleichgerichtet der Linie ist, welche die Geschwindigkeit des Körpers A ausdrückt, dass also

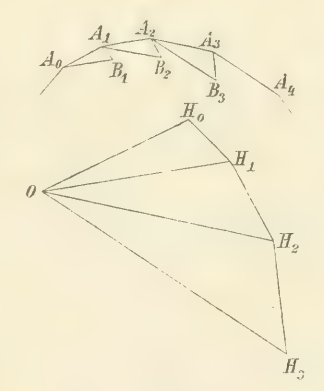


Fig. 13.

$$OH_0 \equiv m \, . \, A_0 A_1 \ ,$$

$$OH_1 \equiv m \, . \, A_1 A_2 \equiv m \, . \, A_0 B_1 \ , \quad \text{etc.}$$

Es folgt hieraus (§. 1, IV)

$$H_0 H_1 \equiv m \, . \, A_1 B_1$$

und

$$m \, . \, H_0 H_1 \equiv mm \, . \, A_1 B_1 \ ,$$

d. h. *die einen beliebig sich bewegenden Körper beschleunigende Kraft wird ihrer Grösse und Richtung nach durch die Geschwindigkeit eines Punktes H ausgedrückt, der sich so bewegt, dass sein Abstand von einem festen Punkte O stets gleich und gleichgerichtet der Geschwindigkeit des Körpers ist.*

So hatten wir in §. 14 bei dem sich gleichförmig um O (Fig. 10) in einem Kreise nach der Linken bewegenden Körper P die Linie

$OH =$ der constanten Geschwindigkeit von P gemacht, also den Winkel $POH = 90^0$ und $OH = c$. Bei der gleichförmigen Kreisbewegung von P wird sich daher der Punkt H in derselben Zeit, wie P, gleichförmig um O nach der Linken in einem Kreise bewegen, dessen Halbmesser gleich c ist. Da sich bei gleichen Umlaufszeiten die Geschwindigkeiten gleichförmiger Kreisbewegungen (von P und H) offenbar wie die Halbmesser der Kreise (a und c) verhalten, und da die Geschwindigkeit von P gleich c ist, so ist die von H gleich $cc:a$; die Richtung derselben ist perpendikular auf OH nach der Linken zu, also parallel mit PO. Nach dem vorigen Satze wird daher die Bewegung eines Körpers mit der constanten Geschwindigkeit c in einem Kreise, dessen Halbmesser a ist, durch eine Kraft gleich

$$\frac{cc}{a} = \frac{\pi\pi}{UU} a = nna \quad (\S. 14)$$

hervorgebracht, welche den Körper stets nach dem Mittelpunkte des Kreises treibt.

Anmerkung. Wie aus den §§. 10 und 11 hervorgeht, ist die Geschwindigkeit einer sich mit der Zeit ändernden Grösse x das m-fache der Aenderung von x während eines Zeitelementes. Ist nun das sich Aendernde eine gerade Linie OH, die nicht bloss ihre Grösse, sondern auch ihre Richtung ändert, zur Zeit T_0, $= OH_0$, und zur Zeit T_1, $= OH_1$ ist, so wird man unter ihrer Aenderung während des Elementes $T_0 T_1$, wenn man dabei die Grösse und Richtung zugleich berücksichtigt, nicht den bloss arithmetisch zu bestimmenden Ueberschuss von OH_1 über OH_0, sondern die Linie $H_0 H_1$ zu verstehen haben, als welche, mit OH_0 geometrisch zusammengesetzt, OH_1 giebt. Die Geschwindigkeit, mit der sich die Linie OH (zur Zeit T_0 oder T_1) ändert, wird folglich $= m . H_0 H_1$, also eine Linie sein, die wiederum nicht bloss ihrer Grösse, sondern auch ihrer Richtung nach, im Allgemeinen sich ändert. Es ist aber $OH =$ der Geschwindigkeit von A, und

$$m . H_0 H_1 = \text{der auf } A \text{ wirkenden Kraft;}$$

mithin können wir in dem erklärten Sinne, wie bei jeder geradlinigen, so auch bei jeder krummlinigen Bewegung sagen, *dass die beschleunigende Kraft, welche sie hervorbringt, gleich und gleichgerichtet der Geschwindigkeit ist, mit welcher sich die Geschwindigkeit des Körpers ändert.*

§. 23. Zusätze. *a*) Der vorhin erhaltene und für die ganze Folge sehr wichtige Satz,

dass bei einer gleichförmigen Kreisbewegung die beschleunigende Kraft stets nach dem Mittelpunkte des Kreises gerichtet und dem Quadrate der Geschwindigkeit c, dividirt durch den Halbmesser a des Kreises, gleich ist,

lässt sich folgendergestalt noch etwas anschaulicher darthun. — Wegen der Gleichförmigkeit der Bewegung sind $A_0 A_1$, $A_1 A_2$, ... von

gleicher Länge, und es lässt sich daher die Bahn $A_0 A_1 A_2 \ldots$ als ein in den Kreis (Fig. 14) beschriebenes reguläres Vieleck betrachten; die Linie $A_1 O$ nach dem Mittelpunkte O des Kreises halbirt folglich den Winkel $A_0 A_1 A_2$. Ferner ist hier das Parallelogramm $A_0 A_1 A_2 B_1$ ein Rhombus; die Diagonale $A_1 B_1$, oder die Richtung der Kraft, halbirt mithin gleichfalls den Winkel $A_0 A_1 A_2$ und ist daher nach dem Mittelpunkte O gerichtet. Dabei sind die Dreiecke $A_1 A_0 B_1$ und $A_0 O A_1$ einander ähnlich, weil sie gleichschenklig sind und den Winkel $A_0 A_1 B_1$ gemein haben. Es verhält sich daher

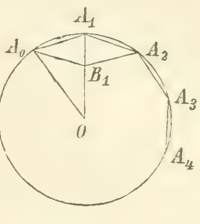


Fig. 14.

$$O A_0 : A_0 A_1 = A_0 A_1 : A_1 B_1 ,$$

mithin auch

$$O A_0 : m \,.\, A_0 A_1 = m \,.\, A_0 A_1 : mm \,.\, A_1 B_1 ,$$

folglich etc.

b) Ganz durch dieselben Schlüsse zeigt sich, dass auch bei jeder anderen krummlinigen Bewegung, wenn sie gleichförmig, und daher $A_0 A_1 = A_1 A_2 = \ldots$ ist, die Kraft in A_1 nach dem Mittelpunkte O des durch A_0, A_1, A_2 zu beschreibenden Kreises gerichtet und

$$= mm \cdot \frac{A_0 A_1^2}{O A_0}$$

ist; d. h. bei einer gleichförmigen krummlinigen Bewegung ist die beschleunigende Kraft nach dem Mittelpunkte des an die Bahn durch den jedesmaligen Ort des Körpers beschriebenen Krümmungskreises gerichtet, also in der Krümmungsebene enthalten und darin, normal auf der Bahn, von der erhabenen nach der hohlen Seite gerichtet; ihre Stärke aber ist dem Quadrate der Geschwindigkeit, dividirt durch den Krümmungshalbmesser, gleich, und daher der Krümmung selbst proportional.

c) Ist die krummlinige Bewegung ungleichförmig, so muss, ausser der eben so wie vorhin im Punkte A_1 bestimmten Kraft, noch eine zweite thätig sein. Denn erstere würde zwar bewirken, dass der Körper in dem nächstfolgenden Zeitelemente nach der veränderten Richtung $A_1 A_2$ fortginge; allein die Grösse der Geschwindigkeit würde unverändert gleich $m \,.\, A_0 A_1$ geblieben sein. Mithin muss noch in der Richtung $A_1 A_2$, d. h. in tangentieller Richtung, eine Kraft wirken, welche die Veränderung der Grösse der Geschwindigkeit in $m \,.\, A_1 A_2$ hervorbringt, also eine Kraft

$$= mm \,(A_1 A_2 - A_0 A_1) .$$

Dies führt uns zu folgendem Resultate:

Die beschleunigende Kraft, durch welche eine sich stetig ändernde Bewegung hervorgebracht wird, ist stets in der Krümmungsebene der Bahn enthalten. Zerlegt man diese Kraft, wie sie zu einer gewissen Zeit T_1 *statt hat, in zwei Kräfte, von denen die eine normal auf der Bahn ist und daher Normalkraft heisst, die andere in tangentieller Richtung wirkt und daher Tangentialkraft genannt wird, so ist die Normalkraft eben so gross, als wenn von* T_1 *an sich nicht mehr die Geschwindigkeit, sondern bloss die Richtung änderte, also eben so gross, als bei einer Bewegung mit derselben Geschwindigkeit in einem Kreise, der dieselbe Krümmung hat, wie die Bahn zur Zeit* T_1*; die Tangentialkraft aber ist eben so gross, als wenn von* T_1 *an sich nicht mehr die Richtung, sondern bloss die Geschwindigkeit änderte, also eben so gross, als bei einer geradlinigen Bewegung, deren Geschwindigkeit sich nach demselben Gesetze, wie bei der krummlinigen, ändert.*

§. 24. Lehrsatz. *Ist eine Bewegung (von A) aus zwei oder mehreren Bewegungen (von C, D, ...) zusammengesetzt, so ist auch in jedem Zeitpunkte die Kraft, durch welche die erstere Bewegung hervorgebracht wird, zusammengesetzt aus den Kräften, welche die letzteren hervorbringen.*

Beweis. Die auf A zur Zeit T_1 wirkende Kraft ist $\equiv mm \,.\, A_1 B_1$ $\equiv$ dem mm-fachen einer Linie, sie heisse a, welche aus $A_1 A_0$ und $A_0 B_1$ oder $A_1 A_2$ zusammengesetzt ist (§. 21); und eben so sind die gleichzeitig auf $C, D, \ldots$ wirkenden Kräfte $\equiv$ den mm-fachen von Linien $c, d, \ldots$, von denen c aus $C_1 C_0$ und $C_1 C_2$, d aus $D_1 D_0$ und $D_1 D_2$ zusammengesetzt ist. Es ist daher nur zu beweisen, dass die aus $A_1 A_0$ und $A_1 A_2$ zusammengesetzte Linie a durch Zusammensetzung von $c, d, \ldots$ d. i. von $C_1 C_0$, $C_1 C_2$, $D_1 D_0$, $D_1 D_2, \ldots$ gefunden wird. Dies folgt aber sogleich daraus, dass nach der Voraussetzung $A_1 A_0$ aus $C_1 C_0$, $D_1 D_0, \ldots$ und $A_1 A_2$ aus $C_1 C_2$, $D_1 D_2, \ldots$ zusammengesetzt ist (§. 6).

Anderer Beweis. Weil die Bewegung von A aus denen von $C, D, \ldots$ zusammengesetzt ist, so ist es auch die Geschwindigkeit von A aus den Geschwindigkeiten von $C, D, \ldots$ (§. 12). Lässt man daher die Punkte $H, K, L, \ldots$ sich so bewegen, dass ihre Abstände von einem festen Punkte O resp. den Geschwindigkeiten von $A, C, D, \ldots$ stets gleich und gleichgerichtet sind, so ist stets OH aus OK, $OL, \ldots$, folglich die Bewegung von H aus denen von $K, L, \ldots$, folglich auch stets die Geschwindigkeit von H aus denen von $K, L, \ldots$ (§. 12), d. i. (§. 22) die auf A wirkende Kraft aus denen, welche auf $C, D, \ldots$ wirken, zusammengesetzt.

Folgerungen. *a*) Hat B (Fig. 8, S. 25) gegen einen festen Punkt F dieselbe Bewegung, welche P gegen A hat, so ist (§. 5) die Bewegung von P aus denen von A und B, folglich auch p aus a und b zusammengesetzt, wenn a, b, p die Kräfte bezeichnen, welche die Bewegungen von A, B, P hervorbringen; folglich ist b aus p und der nach entgegengesetzter Richtung genommenen Kraft a zusammengesetzt (§. 2, *d*). Aus den Kräften a und p, durch welche die Bewegungen zweier Körper A und P erzeugt werden, wird demnach, wenn man, die Bewegung von P gegen A unverändert lassend, A ruhend annimmt, die Kraft, welche dann auf P wirken muss, gefunden, wenn man p mit der nach entgegengesetzter Richtung genommenen Kraft a zusammensetzt.

b) Wird eine Bewegung auf eine der drei in §. 12, *b*) gedachten Arten in zwei oder drei zerlegt, so ergeben sich die Kräfte, welche die letzteren Bewegungen hervorbringen, wenn man die zur ersteren nöthige Kraft auf dieselbe Art zerlegt. — Der Beweis hiervon wird mittelst des obigen Lehrsatzes ähnlicherweise geführt, wie in §. 12 der entsprechende Satz von der Zerlegung der Geschwindigkeit dargethan wurde.

Eben so können wir mit Anwendung des Begriffes der Projection schliessen: *die Kraft bei einer auf eine Gerade oder eine Ebene projicirten Bewegung ist der auf dieselbe Gerade oder Ebene projicirten Kraft bei der ursprünglichen Bewegung gleich.*

Beispiele. 1) Ein sich gleichförmig in einem Kreise bewegender Körper P (Fig. 10, S. 53) wird von der ihn beschleunigenden Kraft stets nach dem Mittelpunkte O des Kreises getrieben. Drücken wir daher diese Kraft geradezu durch PO aus, so ist AO, als die rechtwinklige Projection von PO auf den Durchmesser MN, die Kraft, von welcher der Körper A bei seiner in §. 14 betrachteten Bewegung zwischen M und N getrieben wird. Es war aber die erstere Kraft gleich $nn\,.\,PO$ (§. 22); mithin ist die letztere gleich $nn\,.\,AO$, wie schon in §. 21, 2) auf andere Weise gefunden worden.

2) Projiciren wir dieselbe gleichförmige Kreisbewegung von P rechtwinklig, statt auf MN, auf eine durch MN gelegte und mit der Ebene des Kreises einen schiefen Winkel $= i$ machende Ebene, so bewegt sich die Projection von P, die wiederum A heisse, in einer Ellipse, deren Mittelpunkt O, deren grosse Axe

$$MN = 2a\,, \qquad \text{und deren kleine} \quad = 2a\cos i$$

ist. Die auf A wirkende Kraft ist, wie vorhin,

$$= nn\,.\,AO = \pi\pi \cdot \frac{AO}{UU}\,\cdot$$

Das Gesetz, nach welchem A in der Ellipse fortgeht, lässt sich hier auf eine eigenthümliche Weise bestimmen. Weil nämlich P im Kreise sich gleichförmig bewegt, so werden auch die vom Halbmesser OP in gleichen Zeiten überstrichenen Theile der Kreisfläche einander gleich sein. Da ferner, wenn irgend zwei einander gleiche Theile einer Ebene auf eine andere Ebene projicirt werden, auch die Theile in der Projection einander gleich sind, so wird von A die Ellipse dergestalt beschrieben werden, dass die Gerade OA in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht. — Hiernach, und weil sich jede Ellipse als die rechtwinklige Projection eines Kreises betrachten lässt, können wir folgenden Satz aufstellen:

Bewegt sich ein Körper A in einer Ellipse dergestalt, dass die vom Mittelpunkte O der Ellipse bis zu ihm gezogene Gerade OA in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht, so ist die auf den Körper wirkende Kraft stets nach O gerichtet und seinem Abstande von O proportional, nämlich gleich $\pi\pi \, . \, AO : UU$, *wo U die halbe Umlaufszeit (im Kreise und daher auch) in der Ellipse bedeutet.*

§. 25. Lehrsatz. *Ist für einen gewissen Zeitpunkt* T_0 *der Ort* A_0 *eines sich bewegenden Körpers A und seine Geschwindigkeit gegeben, für jeden Zeitpunkt aber die ihn beschleunigende Kraft ihrer Stärke und Richtung nach, sei es als eine unmittelbar von der Zeit, oder als eine von seinem jedesmaligen Orte, oder von seiner Geschwindigkeit abhängige Grösse, gegeben, so ist die Bewegung des Körpers vollkommen bestimmt.*

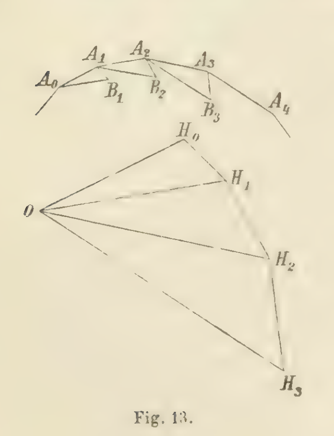


Fig. 13.

Beweis. Mit dem Orte A_0 und der Geschwindigkeit des Körpers zur Zeit T_0 ist sein Weg $A_0 A_1$ während des Elementes $T_0 T_1$, also auch sein Ort A_1 zur Zeit T_1, vollkommen bestimmt. Der Voraussetzung zufolge ist ferner für die Zeit T_1 die Grösse und Richtung der Kraft, also auch der Diagonale $A_1 B_1$ des Parallelogramms $A_0 A_1 A_2 B_1$ (Fig. 13), gegeben. Man kann daher dasselbe construiren und damit den Weg $A_1 A_2$ während $T_1 T_2$ finden. Gleicherweise lässt sich hieraus und aus der dann gegebenen Kraft zur Zeit T_2 der Weg während $T_2 T_3$, u. s. w. bestimmen.

Folgerung. Hat man aus der gegebenen Bewegung eines Körpers das Gesetz bestimmt, nach welchem die ihn beschleunigende Kraft wirkt, so kann man umgekehrt schliessen, dass, wenn den Körper eine Kraft nach dem gefundenen Gesetze treibt, und er zu irgend einer Zeit T_0 die Geschwindigkeit hat, welche ihm der gegebenen Bewegung gemäss zukommt, seine jetzige Bewegung der gegebenen gleich ist.

Beispiele. 1) Aus der Theorie der gleichförmigen Kreisbewegung, wo die beschleunigende Kraft $p = cc : a$ und stets nach dem Mittelpunkte gerichtet war (§. 22), folgern wir: Wirkt auf einen Körper eine nach einem festen Punkte O gerichtete Kraft von constanter Grösse gleich p, und ist die Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit perpendikular auf der Geraden, welche den anfänglichen Ort A_0 des Körpers mit O verbindet, die Geschwindigkeit selbst aber

$$= \sqrt{p \cdot OA_0},$$

so beschreibt der Körper mit sich gleich bleibender Geschwindigkeit um O als Mittelpunkt einen Kreis.

Weil der Körper von O stets in derselben Entfernung bleibt, so kann man hierbei, statt die Kraft constant zu setzen, auch annehmen, dass sie einen von der Entfernung des Körpers von O beliebig abhängigen Werth habe, d. i. irgend eine Function dieser Entfernung sei.

2) Die in §. 14 und §. 24, 1) betrachtete Projection einer gleichförmigen Kreisbewegung auf einen Durchmesser des Kreises führt uns zu folgendem Satze:

Wird ein Körper A von einer Kraft getrieben, welche stets nach einem festen Punkte O (Fig. 10) *gerichtet und dem Abstande des A von O proportional ist, also $= nn \cdot AO$ gesetzt werden kann, wo $n = \pi : U$ eine constante Zahl bedeutet, so bewegt sich der Körper, wenn er anfangs in M in Ruhe war, in gerader Linie nach O zu, sodann eben so weit über O hinaus bis N, hierauf durch O wieder zurück bis M, und fährt auf diese Weise fort zwischen M und N hin und her zu schwingen. Die Schwingungsdauer, d. i. die Dauer eines solchen Hin- oder Herganges, ist*

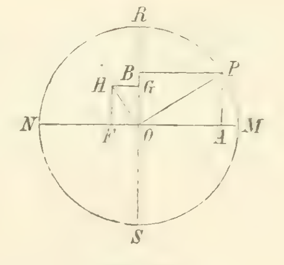


Fig. 10.

$$= U = \frac{\pi}{n}$$

und daher unabhängig von der Schwingungsweite MN. *Dabei ist die Geschwindigkeit von* A *gleich*

$$n \cdot AP = n\sqrt{OM^2 - OA^2}\,,$$

also Null, wenn A *in* M *oder* N *selbst sich befindet, am grössten aber, und* $= n \cdot OM$, *wenn* A *in* O *ist.*

3) Ist der Körper A, auf welchen die nach O gerichtete Kraft $nn \cdot AO$ wirkt, anfangs in A nicht in Ruhe, sondern hat er eine Geschwindigkeit $\equiv AC$, so wird er, wenn die Richtung derselben durch O geht, nach demselben Gesetze, wie vorhin, geradlinige Schwingungen, jede in einer Zeit $= \pi : n$, machen, und sich dabei von O zu beiden Seiten um eine Weite

$$= \sqrt{OA^2 + \frac{AC^2}{nn}}$$

entfernen. Trifft aber die Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit AC den Punkt O nicht, so wird der Körper, wie sich aus §. 24, 2) folgern lässt, nach dem dort angegebenen Gesetze sich in einer Ellipse bewegen, welche O zum Mittelpunkte hat und, durch A gehend, von AC daselbst berührt wird*). Die Umlaufszeit in der Ellipse ist $= 2\pi : n$.

§. 26. Die in §. 25 hinzugefügten Beispiele enthalten die ersten Gründe der für die Naturlehre so wichtigen Theorie der Pendelbewegung. — Denkt man sich einen schweren Körper durch eine nicht schwere gerade Linie von unveränderlicher Länge mit einem festen Punkte F (Fig. 15) verbunden, so dass sich der Körper auf der Oberfläche einer Kugel, welche F zum Mittelpunkte und die Länge der Linie, welche l heisse, zum Halbmesser hat, frei bewegen kann, so erhält man den Begriff eines mathematischen oder ein-

---

*) Es lässt sich diese elliptische Bewegung, wie in §. 24, als die Projection einer gleichförmigen Kreisbewegung betrachten. Der Kreis selbst hat O zum Mittelpunkte, schneidet das in A auf der Ebene OAC errichtete Perpendikel, es geschehe in Z, und berührt daselbst die auf OAC perpendikulare Ebene ZAC. Die zur Construction dieses Kreises, und damit auch der Ellipse, noch zu wissen nöthige Linie AZ findet sich durch die Gleichung:

$$n^2 z^2 (z^2 + r^2) = c^2 (z^2 + r^2 \cos\alpha^2)\,,$$

worin

$$z = AZ\,, \quad r = OA\,, \quad c = AC \text{ und } \alpha = OAC\,.$$

Diese Gleichung hat, nach z^2 aufgelöst, zwei reelle Wurzeln, von denen die eine positiv, die andere aber negativ ist und daher keinen reellen Werth für z selbst giebt. Die zwei einander gleichen und entgegengesetzten Werthe von z, welche aus dem positiven z^2 entspringen, führen aber ersichtlich zu einer und derselben Ellipse.

fachen Pendels. Vermöge der auf den Körper wirkenden Schwerkraft wird derselbe nur dann in stabiler Ruhe sein, wenn er sich in dem vertical unter F gelegenen Punkte O der Kugelfläche befindet. Ist er aber in irgend einem anderen Punkte M der Fläche, so wird er durch die Schwerkraft in dem aus F zu beschreibenden Bogen MO nach O zurückgetrieben. Es giebt nämlich diese constante Kraft, sie heisse g, wenn man sie nach der Richtung FM und nach der in M an den Bogen MO zu ziehenden Tangente zerlegt, die Kräfte

$$g' = g \cos MFO \quad \text{und} \quad g'' = g \sin MFO \;.$$

Da nun der Körper nach ersterer Richtung gar nicht, und nach letzterer vollkommen frei beweglich ist, so ist g' ganz unwirksam; dagegen wirkt die Kraft g'' in ihrer vollen Stärke auf die Bewegung des Körpers.

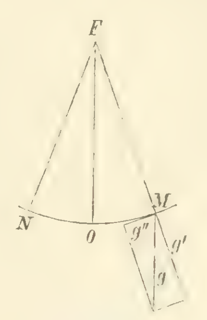


Fig. 15.

Nehmen wir jetzt noch den Winkel MFO so klein an, dass der Bogen MO als eine gerade Linie betrachtet werden kann, so wird

$$\sin MFO = \frac{MO}{l} \;,$$

und es wirkt daher auf den Körper, wenn er in M ist, nach der Richtung MO eine Kraft gleich $g \,.\, MO : l$, also eine seinem Abstande von O proportionale Kraft, und dasselbe geschieht auch in jedem anderen Orte, den er in der Nähe von O einnehmen kann. Der Körper wird folglich, wenn er nach M gebracht und hierauf sich selbst überlassen wird, nach dem vorhin beschriebenen Gesetze Schwingungen zu machen anfangen, deren Weite gleich $2\,OM = NM$, und deren Dauer

$$U = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \;,$$

indem das vorige nn hier $g : l$ ist. Wegen des Widerstandes der Luft und, wenn wir an die Stelle der mathematischen Linie etwa einen feinen Faden setzen, wegen der Steifheit desselben, welche sich seiner Biegung am Aufhängepunkte F fortwährend entgegensetzt, wird die Weite dieser Schwingungen immer kleiner werden, und der Körper zuletzt in O zur Ruhe kommen. Die Dauer der Schwingungen aber wird bis zuletzt unverändert bleiben, weil diese von der Weite unabhängig ist.

Man sieht hieraus, wie man mit Hülfe eines solchen Pendels die Grösse und Schwerkraft g mit ausserordentlicher Schärfe bestimmen

kann. Hat man nämlich seine Länge l gemessen und die Dauer U einer seiner Schwingungen durch Beobachtung der Zeit, welche über einer sehr grossen Anzahl auf einander folgender Schwingungen verstreicht, bestimmt, so findet sich

$$g = \frac{\pi\pi l}{UU} .$$

So ist z. B. nach Bessel's Messungen die Länge des Secundenpendels, d. h. eines Pendels, dessen Schwingungsdauer 1 Secunde beträgt, auf der Königsberger Sternwarte 440·8147 pariser Linien*) oder 3·0612 Fuss. Nimmt man daher die Secunde zur Zeiteinheit, so wird $U = 1$, und es findet sich damit für Königsberg:

$$g = (3{\cdot}14159)^2 . 3{\cdot}0162 = 30{\cdot}213 \text{ Fuss.}$$

Man kann noch bemerken, dass der in F aufgehängte Körper, wenn man ihn nach einer kleinen Ablenkung von O nicht sich selbst überlässt, sondern ihm einen kleinen horizontalen Seitenstoss giebt, in der horizontalen Fläche**), in welcher er um O herum frei beweglich ist, um O als Mittelpunkt eine Ellipse, oder auch einen Kreis, nach dem in §. 25 erklärten Gesetze zu beschreiben anfangen wird. Die Umlaufszeit in der Ellipse wird doppelt so gross als die Dauer einer einfachen Schwingung sein, so dass z. B. ein Secundenpendel zur Beschreibung seiner Ellipse zweier Secunden bedarf.

§. 27. Dass zufolge des §. 25 die Bewegung eines Körpers A vollkommen bestimmt ist, wenn es für jeden Zeitpunkt die beschleunigende Kraft, und für einen gewissen Zeitpunkt T_0 die Geschwindigkeit und der Ort von A ist, dies lässt sich, wenn die Kraft unmittelbar als Function der Zeit gegeben ist und daher schon im Voraus für jeden Zeitpunkt bestimmt werden kann, geradezu mittelst des entsprechenden Satzes in §. 13 darthun. Denn denkt man sich, wie in §. 22, einen Punkt H (Fig. 13, S. 52) hinzu, der sich dergestalt bewegt, dass sein Abstand von einem festen Punkte O der Geschwindigkeit von A gleich ist, so ist die Geschwindigkeit von $H \equiv$ der auf A wirkenden Kraft, und daher nach der Voraussetzung für jeden Zeitpunkt gegeben. Ferner ist die Linie $OH_0 \equiv$ der Geschwindigkeit von A zur Zeit T_0, und daher ebenfalls gegeben. Nach §. 13 ist folglich die Bewegung von H gegen O, oder die Grösse und Rich-

*) Bessel, *Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels*, Seite 55.

**) natürlich mit Rücksicht auf die Kleinheit der Schwingungen, vermöge deren MO als gerade Linie betrachtet worden ist. d. H.

tung von OH für jeden Zeitpunkt, vollkommen bestimmt; mithin ist es auch die Geschwindigkeit von A. Und da noch der Ort von A zur Zeit T_0 als gegeben vorausgesetzt wird, so ist nach dem nämlichen Satze die Bewegung von A selbst vollkommen bestimmt.

Nehmen wir z. B. an, dass die Kraft, also auch die Geschwindigkeit von H, ihrer Richtung und Grösse nach constant sei, und dass sich daher H gleichförmig in einer Geraden h (Fig. 16) bewege. Sind alsdann H_0 und H_1, als die Oerter von H in zwei beliebigen Zeitpunkten T_0 und T_1, und ausserdem noch die Oerter von O und A_0 gegeben, so ist damit die Bewegung von A vollkommen bestimmt. Liege nämlich, um hier nur den allgemeineren Fall in Betracht zu ziehen, O ausserhalb h. Man ziehe durch A_0 mit h und mit OH_0 die Parallelen x und y, so bewegt sich A in der Ebene xy, weil OH, $\equiv$ der Geschwindigkeit von A, in der damit parallelen Ebene OH_0, h liegt. Man denke sich nun A durch Parallelen mit y und x auf x und y projicirt und nenne B und C diese Projectionen, so sind die Geschwindigkeiten von B und C $\equiv$ der auf x und y projicirten Geschwindigkeit OH von A, also $\equiv H_0H$ und OH_0. Weil H_0H sich der Zeit proportional ändert, so wird, wenn man die Zeit t von T_0 an rechnet und T_0T_1 zur Zeiteinheit nimmt, H_0H oder die Geschwindigkeit von B, gleich $H_0H_1 \cdot t$; und weil für $t = 0$ diese Geschwindigkeit Null wird und B mit A_0 zusammenfällt, so kommt (§. 13)

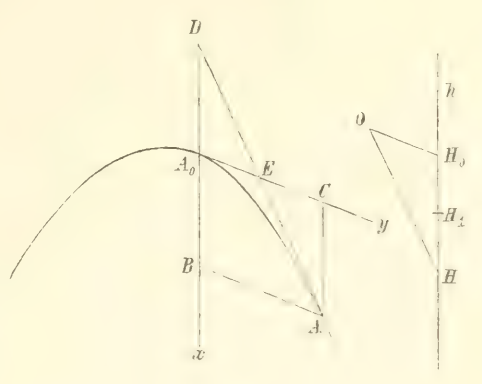


Fig. 16.

$$(1) \qquad A_0B = \tfrac{1}{2} H_0H_1 \cdot t^2 .$$

Die Geschwindigkeit von C ist constant, $\equiv OH_0$, und weil auch C für $t = 0$ mit A_0 zusammenfällt, so hat man

$$(2) \qquad A_0C = OH_0 \cdot t .$$

Durch diese zwei Gleichungen sind aber die Bewegungen von B und C, und damit auch die von A, bestimmt. Eliminirt man aus ihnen t, so findet sich:

$$(3) \qquad A_0C^2 = 2\frac{OH_0^2}{H_0H_1} \cdot A_0B ,$$

als die Gleichung zwischen den Coordinaten $A_0 B$ und $A_0 C$ der von A beschriebenen Curve.

Ein Körper, auf den eine constante beschleunigende Kraft $\equiv H_0 H_1$, *z. B. die Schwerkraft, wirkt, und dessen anfängliche Geschwindigkeit,* $\equiv OH_0$, *mit der Kraft nicht parallel ist, bewegt sich demnach in einer Parabel, welche eine mit der Richtung der Kraft parallele Axe und im Anfangspunkte der Bewegung die Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit zur Tangente hat, und deren Parameter, für den Anfangspunkt als Scheitel,*

$$= \frac{2\, OH_0^2}{H_0 H_1} .$$

Zusätze. *a*) Da der Anfangspunkt der Zeit willkürlich genommen werden kann, so erhellet, dass, wenn man für A_0 irgend einen anderen Punkt der von A beschriebenen Curve wählt, durch ihn eine Gerade x, parallel mit h, und eine die Curve daselbst berührende Gerade y zieht und die Bewegung von A nach diesen x und y in die Bewegungen von B und C zerlegt, auch in diesem neuen Systeme die Linie $A_0 B$ dem Quadrate der seit dem Durchgange des Körpers durch A_0 verflossenen Zeit, und die Linie $A_0 C$ dieser Zeit selbst, folglich wie vorhin die Abscisse $A_0 B$ dem Quadrate der Ordinate $A_0 C$ proportional sein wird, — eine bekannte Eigenschaft der Parabel, die somit sehr einfach sich dargethan findet.

b) Man ziehe in A an die Parabel eine Tangente, welche $A_0 B$ in D und $A_0 C$ in E schneide. Weil die Geschwindigkeit in $A \equiv OH$ ist, so ist DA parallel mit OH, und daher die Seiten der Dreiecke ABD und $OH_0 H$ parallel mit einander: mithin verhält sich

$$DB : BA = H_0 H : OH_0 = H_0 H_1 \,.\, t : OH_0$$

oder zufolge (1) und (2)

$$DB : BA = 2 A_0 B : A_0 C = 2 A_0 B : BA ,$$

und daher

$$DB = 2 A_0 B ,$$

was ebenfalls eine bekannte Eigenschaft der Parabel ist. — Es folgt hieraus weiter, dass, so wie DB in A_0, auch DA in E und $A_0 C$ in E halbirt wird.

c) Die Geschwindigkeiten in A_0 und A verhalten sich wie

$$OH_0 : OH = BA : DA = A_0 E : DE = A_0 E : EA ,$$

also wie die Theile der in A_0 und A gezogenen Tangenten zwischen diesen Punkten und dem gemeinschaftlichen Durchschnitte der Tangenten.

d) Bezeichnen A_1, B_1, C_1, E_1 die Oerter von A, B, C, E für $t = 1$, so hat man zufolge der Gleichung (2)

$$A_0 C_1 = O H_0 \,, \quad \text{also} \quad A_0 E_1 = E_1 C_1 = \tfrac{1}{2} O H_0$$

und, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $E_1 C_1 A_1$ und $O H_0 H_1$,

$$E_1 A_1 = \tfrac{1}{2} O H_1 \,.$$

Macht man daher in der Linie h (Fig. 17)

$$H_0 H_1 = H_1 H_2 = H_2 H_3 = \ldots \,,$$

wo $H_0, H_1, H_2, \ldots$ die Oerter von H für $t = 0, 1, 2, \ldots$ sind, und legt man durch $A_0, A_1, A_2, \ldots$, als die entsprechenden Oerter von A, Tangenten, von denen sich die erste und zweite in E_1, die zweite und dritte in E_2, die dritte und vierte in E_3, etc. schneiden, so ist

$$A_0 E_1 \equiv \tfrac{1}{2} O H_0 \,, \quad E_1 A_1 \equiv \tfrac{1}{2} O H_1 \,,$$

und eben so

$$A_1 E_2 \equiv \tfrac{1}{2} O H_1 \,, \quad E_2 A_2 \equiv \tfrac{1}{2} O H_2 \,,$$

u. s. w., folglich

$$E_1 E_2 \equiv O H_1 \,, \quad \text{und eben so} \quad E_2 E_3 \equiv O H_2 \,, \text{ etc.,}$$

welches nachstehenden Satz giebt:

Sind $H_0, H_1, H_2, \ldots$ (Fig. 17) *eine Reihe von Punkten in einer Geraden h, welche in gleichen Zwischenräumen auf einander folgen, und O ein Punkt ausserhalb dieser Geraden, so berühren die Linien $O H_0$, $O H_1$, $O H_2$, ..., wenn man sie in ihrer Folge parallel mit sich an einander setzt und desshalb*

$$E_0 E_1 \equiv O H_0 \,,$$
$$E_1 E_2 \equiv O H_1 \,,$$
$$E_2 E_3 \equiv O H_2 \,,$$
$$\ldots$$

macht, in ihren Mittelpunkten $A_0, A_1, A_2, \ldots$ eine Parabel, deren Axe mit h parallel ist. — Ein Körper, der, von einer constanten mit h parallelen Kraft getrieben, diese Parabel beschreibt, legt die Abschnitte $A_0 A_1$, $A_1 A_2$, ... derselben in gleichen Zeiträumen zurück, und wenn ein solcher Zeitraum zur Zeiteinheit genommen wird, so werden durch die Linien $E_0 E_1$, $E_1 E_2$, ... die Geschwindigkeiten in A_0, A_1, ... und durch $H_0 H_1$ die beschleunigende Kraft dargestellt.

Fig. 17.

Drittes Kapitel.

Theorie der epicyklischen Bewegung.

---

§. 28. Aufgabe. Um einen festen Punkt O (Fig. 18), als Mittelpunkt, bewege sich ein Körper A gleichförmig in einem Kreise; zu gleicher Zeit bewege sich in der Ebene dieses Kreises ein zweiter Körper A_1 gleichförmig um A, als Mittelpunkt, in einem Kreise; eben so ein dritter Körper A_2 um den zweiten, ein vierter A_3 um den dritten, u. s. w. Es seien die Halbmesser

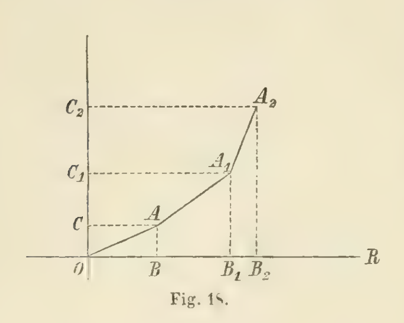


Fig. 18.

$$OA = a\,,$$
$$AA_1 = a_1\,,$$
$$A_1A_2 = a_2\,, \quad \text{etc.}$$

dieser Kreise, die constanten Winkelgeschwindigkeiten $n, n_1, n_2, \ldots$ der Körper $A, A_1, A_2, \ldots$ bei ihren Kreisbewegungen und nächstdem die Winkel $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ gegeben, welche die Halbmesser OA, AA_1, $A_1A_2, \ldots$ in einem gewissen Zeitpunkte T mit einer in der Ebene durch O gelegten festen Geraden OR bilden. Man soll in Bezug auf ein rechtwinkliges Axensystem, dessen x-Axe OR ist, die Coordinaten x, y; x_1, y_1; ... der Körper A, A_1, ... am Ende einer seit T verflossenen Zeitlänge t finden.

Auflösung. Unter der Voraussetzung, dass alle Winkel in der Ebene nach einerlei Sinne, etwa von der Rechten nach der Linken, gerechnet werden, und dass hiernach jede der Winkelgeschwindigkeiten $n, n_1, \ldots$ als positiv oder negativ angesehen werde, je nachdem die Kreisbewegung, zu welcher sie gehört, nach links oder rechts um den Mittelpunkt des Kreises vor sich geht, sind die Winkel von OA, AA_1, $A_1A_2, \ldots$ mit OR, welche zur Zeit T gleich $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ waren, am Ende der Zeit t gleich

$$\alpha + nt\,, \qquad \alpha_1 + n_1 t\,, \qquad \alpha_2 + n_2 t\,, \qquad \ldots$$

Man setze die letzteren, der Kürze willen, gleich $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$

Seien nun B, B_1, B_2, ... die Projectionen der Oerter, in denen sich A, A_1, A_2, ... zur Zeit t befinden, auf OR oder die Axe der x, und C, C_1, C_2, ... die Projectionen derselben Oerter auf die Axe der y, deren positive Richtung übrigens so bestimmt sei, dass sie mit

der Axe der x einen Winkel von 90°, nicht von 270°, bilde. Alsdann ist ersichtlich

$$OB = a\cos\lambda\ , \quad BB_1 = a_1\cos\lambda_1\ , \quad B_1B_2 = a_2\cos\lambda_2\ , \quad \ldots$$
$$OC = a\sin\lambda\ , \quad CC_1 = a_1\sin\lambda_1\ , \quad C_1C_2 = a_2\sin\lambda_2\ , \quad \ldots$$

Hiermit aber sind zugleich die gesuchten Coordinaten von A, A_1, A_2, ... gefunden. Es ist nämlich bei gehöriger Rücksicht auf die Vorzeichen der trigonometrischen Functionen:

$$x = OB = a\cos\lambda\ ,$$
$$y = OC = a\sin\lambda\ ;$$
$$x_1 = OB_1 = OB + BB_1 = a\cos\lambda + a_1\cos\lambda_1\ ,$$
$$y_1 = OC_1 = OC + CC_1 = a\sin\lambda + a_1\sin\lambda_1\ ;$$
$$x_2 = OB_2 = OB_1 + B_1B_2 = a\cos\lambda + a_1\cos\lambda_1 + a_2\cos\lambda_2\ ,$$
$$y_2 = OC_2 = OC_1 + C_1C_2 = a\sin\lambda + a_1\sin\lambda_1 + a_2\sin\lambda_2\ ;$$

u. s. w., u. s. w.

Zusätze. a) Durch die erhaltenen Formeln wird zugleich die Bewegung der Körper dargestellt, da man nach ihnen, nachdem darin für λ, λ_1, λ_2, ... ihre durch t ausgedrückten Werthe substituirt worden, die Oerter der Körper für jeden Zeitpunkt berechnen kann.

Eliminirt man t aus den Formeln für die zwei Coordinaten eines Körpers, so erhält man die Gleichung für die vom Körper beschriebene Bahn. So führt die Elimination von t aus den Gleichungen

$$x = a\cos(\alpha + nt) \quad \text{und} \quad y = a\sin(\alpha + nt)$$

zu der Gleichung

$$xx + yy = aa\ ,$$

die, wie gehörig, dem Kreise zukömmt, der von A um O beschrieben wird.

Ein anderes nicht minder einfaches Beispiel gewährt die Annahme, dass sich der Körper A_1 um A mit einer Winkelgeschwindigkeit bewege, die derjenigen, mit welcher sich A um O bewegt, gleich und entgegengesetzt ist, dass also $n_1 = -n$ sei. Da bei einer solchen Bewegung der Winkel OAA_1 nach und nach alle möglichen Werthe annimmt, so wollen wir der Einfachheit willen setzen, dass für $t = 0$ OA und AA_1 einerlei Richtung, und zwar die der festen Linie OR, haben. Dies giebt $\alpha = \alpha_1 = 0$, folglich $\lambda = nt$, $\lambda_1 = -nt$ und

$$x_1 = a\cos nt + a_1\cos nt\ ,$$
$$y_1 = a\sin nt - a_1\sin nt\ .$$

Hieraus fliesst nach Elimination von t:

$$\frac{x_1^2}{(a + a_1)^2} + \frac{y_1^2}{(a - a_1)^2} = 1\ .$$

A_1 beschreibt demnach unter der gemachten Annahme eine Ellipse, welche O zum Mittelpunkte hat, und von welcher die halbe grosse Axe gleich $a + a_1$, die halbe kleine gleich $a - a_1$ ist.

b) Die zu dem von A beschriebenen Kreise hinzugesetzten Kreise, in denen sich die folgenden Körper A_1, A_2, ..., jeder um den vorhergehenden, als Mittelpunkt, bewegen, nennt man Epicykeln, und hiernach die absoluten Bahnen dieser Körper Epicykloiden. Je mehr Kreisbewegungen man zu einer solchen epicyklischen Bewegung zusammensetzt, desto grösser wird die Anzahl der von einander unabhängigen constanten Grössen, und desto mehr wird man die Bewegung des den letzten Kreis beschreibenden Körpers nach seiner Willkür bestimmen können, wenn es frei steht, jene Grössen nach Belieben anzunehmen. Auch lässt sich in der That zeigen, dass auf solche Weise jede beliebige Bewegung, wenigstens jeder innerhalb eines endlichen Zeitraumes vor sich gehende Theil derselben, so nahe, als man will, dargestellt werden kann.

§. 29. Aufgabe. *Die beschleunigenden Kräfte zu bestimmen, durch welche die epicyklischen Bewegungen der Körper A_1, A_2, ... hervorgebracht werden.*

Auflösung. Die auf den Körper A bei seiner Kreisbewegung um O wirkende Kraft ist gleich $n^2 a$ und hat die Richtung AO (§. 22). Eben so würde auf den Körper A_1 zufolge seiner relativen Bewegung um A, wenn A in Ruhe wäre, eine Kraft gleich $n_1^2 a_1$ nach der Richtung $A_1 A$ wirken. Es ist aber die absolute Bewegung von A_1 aus der absoluten Bewegung von A und aus der relativen von A_1 gegen A zusammengesetzt (§. 5, *b*), und wird daher (§. 24) von einer mit AO parallelen Kraft $n^2 a$ und der nach $A_1 A$ gerichteten Kraft $n_1^2 a_1$ in Vereinigung hervorgebracht. Auf gleiche Art sind es diese zwei auf A_1 wirkenden Kräfte, parallel mit sich an den dritten Körper A_2 verlegt, und ausserdem noch die zur relativen Bewegung von A_2 um A_1 nöthige, nach A_1 gerichtete Kraft $n_2^2 a_2$, wodurch die absolute Bewegung von A_2 erzeugt wird; u. s. w.

Man substituire nun für jede dieser Kräfte die beiden, welche man erhält, wenn man sie parallel mit den Axen der x und der y zerlegt. Auf solche Weise reduciren sich alle auf einen der Körper wirkenden Kräfte auf zwei, mit den beiden Axen parallele, indem man für alle nach einer und derselben Axe wirkende Kräfte eine einzige setzen kann, welche ihrer Summe gleich ist.

Es sind aber zur Zeit t die Winkel von OA, AA_1, ... mit der Axe der x gleich λ, λ_1, ... : also die Winkel der entgegengesetzten

Richtungen AO, A_1A, ... mit derselben Axe, gleich $\lambda + 180^\circ$, $\lambda_1 + 180^\circ$, etc. Wenn man daher die Kräfte n^2a, $n_1^2a_1$, ..., welche zur Zeit t die letztgedachten Richtungen haben, nach den Axen der x und der y zerlegt, so erhält man:

$$n^2 a \cos(\lambda + 180^\circ) \quad \text{und} \quad n^2 a \sin(\lambda + 180^\circ) \ ,$$

d. i.

$$-n^2 a \cos\lambda \quad \text{und} \quad -n^2 a \sin\lambda \ ;$$

$$-n_1^2 a_1 \cos\lambda_1 \quad \text{und} \quad -n_1^2 a_1 \sin\lambda_1 \ ; \qquad \text{u. s. w.}$$

Setzt man also noch die gesuchten Kräfte, welche zur Zeit t auf die Körper A, A_1, A_2, ... nach den Richtungen der beiden Axen wirken, resp. gleich X und Y, X_1 und Y_1, X_2 und Y_2, etc., so ist

$$X = -n^2 a \cos\lambda \ ,$$
$$Y = -n^2 a \sin\lambda \ ;$$
$$X_1 = -n^2 a \cos\lambda - n_1^2 a_1 \cos\lambda_1 \ ,$$
$$Y_1 = -n^2 a \sin\lambda - n_1^2 a_1 \sin\lambda_1 \ ;$$
$$X_2 = -n^2 a \cos\lambda - n_1^2 a_1 \cos\lambda_1 - n_2^2 a_2 \cos\lambda_2 \ ,$$
$$Y_2 = -n^2 a \sin\lambda - n_1^2 a_1 \sin\lambda_1 - n_2^2 a_2 \sin\lambda_2 \ ;$$

u. s. w., u. s. w.

§. 30. Die in den zwei vorigen Paragraphen erhaltenen Resultate lassen sich folgendergestalt zusammenfassen:

Bewegt sich ein Körper M in einer Ebene dergestalt, dass in Bezug auf zwei sich rechtwinklig schneidende Axen seine Coordinaten

$$x = a \cos\lambda + a_1 \cos\lambda_1 + a_2 \cos\lambda_2 + \dots \ ,$$
$$y = a \sin\lambda + a_1 \sin\lambda_1 + a_2 \sin\lambda_2 + \dots$$

sind, wo a, a_1, a_2, ... Linien von constanter Länge und λ, λ_1, λ_2, ... der Zeit proportional sich ändernde Winkel bedeuten, so ist die ihn beschleunigende Kraft aus den zwei mit den Axen der x und der y parallelen Kräften

$$X = -n^2 a \cos\lambda - n_1^2 a_1 \cos\lambda_1 - n_2^2 a_2 \cos\lambda_2 - \dots \ ,$$
$$Y = -n^2 a \sin\lambda - n_1^2 a_1 \sin\lambda_1 - n_2^2 a_2 \sin\lambda_2 - \dots$$

zusammengesetzt, wobei n, n_1, n_2, ... die Geschwindigkeiten sind, mit denen sich die Winkel λ, λ_1, λ_2, ... ändern.

Sehr einfach gelangt man zu diesem Resultate auch durch die Betrachtung, dass die Bewegung des Körpers aus den beiden durch die Formeln für x und y dargestellten, in den Axen der x und y vor sich gehenden, Bewegungen zusammengesetzt ist, dass die Bewegung in der einen, wie in der anderen Axe, aus den Bewegungen, welche durch die einzelnen Glieder $a\cos\lambda$, ... und $a\sin\lambda$, ... ausgedrückt

werden, zusammengesetzt ist, und dass die Kräfte, welche die letzteren Bewegungen erzeugen, nach §. 21, 2) resp.

$$= -nna\cos\lambda\ ,\quad \ldots \quad\text{und}\quad = -nna\sin\lambda\ ,\quad \ldots$$

sind.

§. 31. Wegen der bald folgenden astronomischen Anwendungen wollen wir den Ort des sich in einer Ebene bewegenden Körpers M, statt ihn, wie vorhin, durch rechtwinklige Coordinaten anzugeben, durch Polarcoordinaten bestimmen, nämlich durch seinen Abstand $r = OM$ von dem festen Punkte O und durch den Winkel $l = ROM$ dieser Abstandslinie mit der festen Linie OR, von welcher an die Winkel α, α_1, ..., λ, λ_1, ... gerechnet wurden. Hiermit wird

$$x = r\cos l \quad\text{und}\quad y = r\sin l.$$

Eben so kommt, wenn wir statt der Kräfte X und Y die aus ihnen zusammengesetzte Kraft selbst einführen, dieselbe gleich P und den Winkel ihrer Richtung mit OR gleich φ setzen:

$$X = P\cos\varphi \quad\text{und}\quad Y = P\sin\varphi\ .$$

Die Formeln für die Bewegung und für die sie erzeugende Kraft werden damit:

$$(1)\quad r\cos l = a\cos\lambda + a_1\cos\lambda_1 + \ldots\ ,$$

$$(2)\quad r\sin l = a\sin\lambda + a_1\sin\lambda_1 + \ldots\ ,$$

$$(3)\quad P\cos\varphi = -n^2 a\cos\lambda - n_1^2 a_1\cos\lambda_1 - \ldots\ ,$$

$$(4)\quad P\sin\varphi = -n^2 a\sin\lambda - n_1^2 a_1\sin\lambda_1 - \ldots\ .$$

Wenden wir diese Formeln auf das in §. 28, a) beigebrachte Beispiel einer elliptischen Bewegung an, welche aus zwei einander entgegengesetzten Kreisbewegungen zusammengesetzt war, so kommt, weil dabei $n_1 = -n$ und $a_2, a_3, \ldots = 0$ sind:

$$P\cos\varphi = -n^2(a\cos\lambda + a_1\cos\lambda_1) = -n^2 r\cos l\ ,$$

$$P\sin\varphi = -n^2(a\sin\lambda + a_1\sin\lambda_1) = -n^2 r\sin l\ ,$$

folglich

$$\varphi = l \quad\text{und}\quad P = -n^2 r\ ,$$

d. h. die Kraft ist nach dem Mittelpunkte O der Ellipse gerichtet und dem Abstande des Körpers von demselben proportional.

§. 32. Um die Gleichungen (1) .. (4) auf eine für ihren ferneren Gebrauch noch passendere Form zu bringen, addire man (1) und (2), nachdem man vorher (1) mit $\cos l$ und (2) mit $\sin l$ multiplicirt hat. Man subtrahire hierauf (1) von (2), nachdem (1) mit $\sin l$ und (2) mit $\cos l$ multiplicirt worden. Dies giebt an Stelle von (1) und (2) die Gleichungen:

$$(a) \qquad r = a \cos(\lambda - l) + a_1 \cos(\lambda_1 - l) + \dots ,$$
$$(b) \qquad 0 = a \sin(\lambda - l) + a_1 \sin(\lambda_1 - l) + \dots .$$

Behandelt man ganz auf dieselbe Weise die Gleichungen (3 und (4), so kommt an deren Statt:

$$(c) \quad T = -n^2 a \cos(\lambda - l) - n_1^2 a_1 \cos(\lambda_1 - l) - \dots ,$$
$$(d) \quad V = -n^2 a \sin(\lambda - l) - n_1^2 a_1 \sin(\lambda_1 - l) - \dots ,$$

wo T und V für $P\cos(\varphi - l)$ und $P\sin(\varphi - l)$ geschrieben worden. Weil $\varphi - l$ ersichtlich der Winkel ist, den die Kraft P mit dem Radius r macht, so sind T und V die Projectionen von P auf r und auf eine Linie, welche in der Ebene der Bewegung mit r einen Winkel von 90° bildet, oder es sind die zwei Kräfte, welche durch Zerlegung von P nach diesen zwei Richtungen erhalten werden.

Uebrigens kann man die Gleichungen (a) .. (d) aus (1) .. (4) sehr einfach auch dadurch ableiten, dass man die willkürlich durch O zu legende Axe der x, welche vorher mit der festen Linie OR zusammenfiel, jetzt mit derselben einen Winkel gleich l machen lässt. Denn dadurch werden die Winkel, welche $r, a, a_1, \dots$ und die Richtung von P mit der Axe der x bilden, sämmtlich um l kleiner, gehen also aus $l, \lambda, \lambda_1, \dots, \varphi$ über in $0, \lambda - l, \lambda_1 - l, \dots, \varphi - l$, und die Gleichungen (1) .. (4) verwandeln sich in (a) .. (d).

§. 33. Die himmlischen Bewegungen, mit denen wir uns beschäftigen werden, sind insgesammt sehr nahe kreisförmig und sehr nahe gleichförmig. Die bisher betrachtete epicyklische Bewegung des Körpers M wird aber eine solche sein, wenn gegen den einen der Halbmesser $a, a_1, a_2, \dots$, — es sei a —, alle übrigen sehr klein, und damit $\frac{a_1}{a}, \frac{a_2}{a}, \dots$ sehr kleine Brüche sind. Denn alsdann wird sich der Körper M vom Punkte A, der um O in der Entfernung a mit der constanten Winkelgeschwindigkeit n einen Kreis beschreibt, nie weit entfernen können, — höchstens um $a_1 + a_2 + \dots$ —, und es werden daher die Coordinaten r und l des Körpers M von denen a und λ des Punktes A nie sehr verschieden sein.

Für unsere nächsten Bedürfnisse können und wollen wir jene Brüche so klein annehmen, dass ihre Quadrate und höheren Potenzen, so wie ihre Producte in einander, ganz vernachlässigt werden können. Bezeichnen wir die Brüche der Reihe nach mit $f_1, f_2, \dots$, setzen also $a_1 = af_1$, $a_2 = af_2$, ... und eliminiren damit $a_1, a_2, \dots$ zunächst aus den Gleichungen (a) und (b) für die Bewegung des Körpers, so kommt:

$$r = a\cos(\lambda - l) + af_1\cos(\lambda_1 - l) + af_2\cos(\lambda_2 - l) + \ldots.$$
$$0 = \sin(\lambda - l) + f_1\sin(\lambda_1 - l) + f_2\sin(\lambda_2 - l) + \ldots.$$

Zufolge der zweiten dieser Gleichungen ist $\sin(\lambda - l)$ ein Bruch von derselben Kleinheit, wie $f_1, f_2, \ldots$. Man kann daher, mit Vernachlässigung von $\sin(\lambda - l)^2$, $\sin(\lambda - l)^3$, ..., statt $\sin(\lambda - l)$ und $\cos(\lambda - l)$ resp. $\lambda - l$ und 1 schlechthin setzen. Da es ferner auch gestattet sein muss, die Producte aus $\lambda - l$ in $f_1, f_2, \ldots$ wegzulassen, so darf man, unter Berücksichtigung der Gleichung

$$f_1\sin(\lambda_1 - l) = f_1\sin[\lambda_1 - \lambda + (\lambda - l)]$$
$$= f_1\sin(\lambda_1 - \lambda)\cos(\lambda - l) + f_1\cos(\lambda_1 - \lambda)\sin(\lambda - l),$$

$f_1\sin(\lambda_1 - \lambda)$ statt $f_1\sin(\lambda_1 - l)$ setzen, und eben so auch in den übrigen Producten $f_1\cos(\lambda_1 - l)$, $f_2\sin(\lambda_2 - l)$, etc. statt l überall λ schreiben. Man erhält somit:

$$(a') \qquad r = a + af_1\cos(\lambda_1 - \lambda) + af_2\cos(\lambda_2 - \lambda) + \ldots.$$
$$(b') \qquad l = \lambda + f_1\sin(\lambda_1 - \lambda) + f_2\sin(\lambda_2 - \lambda) + \ldots.$$

zwei Gleichungen, welche die Polarcoordinaten r und l des Körpers, unmittelbar durch die Constanten $a, f_1, f_2, \ldots$ und durch die der Zeit proportional wachsenden Winkel $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ ausgedrückt, geben.

Auf dieselbe Art, wie (a) und (b), reduciren sich die Formeln (c) und (d) für die beschleunigende Kraft auf:

$$(c') \quad T = -n^2a - n_1^2af_1\cos(\lambda_1 - \lambda) - n_2^2af_2\cos(\lambda_2 - \lambda) - \ldots.$$
$$V = -n^2a(\lambda - l) - n_1^2af_1\sin(\lambda_1 - \lambda)\ldots,$$

oder, wenn man für die Differenz $\lambda - l$ ihren Werth aus (b') substituirt:

$$(d') \quad V = -(n_1^2 - n^2)af_1\sin(\lambda_1 - \lambda) - (n_2^2 - n^2)af_2\sin(\lambda_2 - \lambda) - \ldots$$

Um diese Formeln etwas einfacher darzustellen, setze man die Winkeldifferenzen

$$\lambda_1 - \lambda = \lambda', \qquad \lambda_2 - \lambda = \lambda'', \qquad \text{etc.}$$

Diese neuen Winkel $\lambda', \lambda'', \ldots$ verändern sich gleichfalls der Zeit proportional, und zwar mit den Geschwindigkeiten $n_1 - n$, $n_2 - n$, etc., welche man gleich $n', n'', \ldots$ setze. Mit Einführung dieser neuen Winkel und ihrer Geschwindigkeiten verwandeln sich (a') ... (d') in:

$$(a'') \quad r = a + af_1\cos\lambda' + af_2\cos\lambda'' + \ldots,$$
$$(b'') \quad l = \lambda + f_1\sin\lambda' + f_2\sin\lambda'' + \ldots,$$
$$(c'') \quad T = -n^2a - (n + n')^2af_1\cos\lambda' - (n + n'')^2af_2\cos\lambda'' - \ldots.$$
$$(d'') \quad V = -(2nn' + n'^2)af_1\sin\lambda' - (2nn'' + n''^2)af_2\sin\lambda'' - \ldots.$$

§. 34. Die zuletzt erhaltenen Formeln $(a'') \ldots (d'')$ können folgendergestalt auf eine noch etwas allgemeinere Form gebracht werden. Man setze

$$\lambda'' = -\lambda', \qquad \text{also auch} \quad n'' = -n' .$$

Dies giebt:

$$r = a + a(f_1 + f_2)\cos\lambda' + \ldots ,$$
$$l = \lambda + (f_1 - f_2)\sin\lambda' + \ldots ,$$
$$T = -n^2 a - [(n+n')^2 f_1 + (n-n')^2 f_2]\, a\cos\lambda' - \ldots .$$
$$V = -[(2nn' + n'^2)f_1 + (2nn' - n'^2)f_2]\, a\sin\lambda' - \ldots ;$$

folglich, wenn man noch

$$f_1 + f_2 = f' \quad \text{und} \quad f_1 - f_2 = g'$$

setzt:

$$(A) \quad \begin{cases} r = a + af'\cos\lambda' + \ldots , \\ l = \lambda + g' \sin\lambda' + \ldots , \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} T = -n^2 a - [(n^2 + n'^2)f' + 2nn'g']\, a\cos\lambda' - \ldots , \\ V = -[2nn'f' + n'^2 g']\, a\sin\lambda' - \ldots . \end{cases}$$

Auf dieselbe Weise kann man in den Reihen $(a'') \ldots (d'')$ die weiter folgenden Glieder paarweise vereinigen und gelangt dadurch zu dem Resultate: dass eine nahe kreis- und gleichförmige, durch die Polarcoordinaten

$$r = a + af'\cos\lambda' + af''\cos\lambda'' + \ldots ,$$
$$l = \lambda + g' \sin\lambda' + g'' \sin\lambda'' + \ldots$$

gegebene Bewegung durch eine Kraft erzeugt wird, die, wenn man sie nach der Richtung von r und perpendikular darauf im Sinne der Bewegung zerlegt, bis auf die ersten Potenzen der kleinen Brüche $f', g', f'', g'', \ldots$ genau die Kräfte

$$T = -n^2 a - F'a\cos\lambda' - F''a\cos\lambda'' - \ldots ,$$
$$V = -G'a\sin\lambda' - G''a\sin\lambda'' - \ldots$$

giebt, worin F'' und G'' eben so von f'', g'', n und n'' (der Geschwindigkeit, mit der sich der Winkel λ'' ändert), wie F' und G' zufolge der Formeln (B) von f', g', n und n', abhängen; u. s. w.

Zusatz. Die in den Reihen für r und l vorangestellten Glieder a und λ drücken eine gleichförmige Kreisbewegung aus. Während von diesen ersten Gliedern, welche zugleich die bei weitem beträchtlichsten sind, das eine a constant bleibt und das andere λ der Zeit proportional wächst, nehmen die beiderseits hinzugesetzten Glieder im Verlaufe der Zeit periodisch ab und zu. Insbesondere wird durch die auf a folgenden Glieder die Abweichung von der Kreisform und durch die auf λ folgenden die Ungleichförmigkeit der Bewegung

dargestellt. So kann sich der Körper zufolge des Gliedes $af' \cos\lambda'$ bis zu einer Strecke $= af'$ auf die eine und die andere Seite vom Kreise entfernen, und erscheint von O aus zufolge des Gliedes $g' \sin\lambda'$ bis auf einen Winkel $= g'$ bald vor bald hinter dem Orte, den er bei einer gleichförmigen Bewegung in seiner Bahn einnehmen würde. Beiderlei Abweichungen aber hängen dergestalt zusammen, dass, wenn die eine von ihnen ihren grössten Werth hat, die andere am kleinsten ist, und umgekehrt. Vermöge der Glieder $af' \cos\lambda'$ und $g' \sin\lambda'$ bewegt sich daher der Körper um den durch a und λ allein bestimmten sogenannten mittleren Ort in einer kleinen Ellipse, von deren zwei Hauptaxen die eine, gleich $2af'$, in die jedesmalige Lage des Halbmessers a fällt, die andere, gleich $2ag'$, perpendikular auf demselben ist. Die Zeit, in welcher diese Ellipse beschrieben wird, oder die Periode der durch die genannten Glieder bewirkten Ungleichheit, beträgt $2\pi : n'$. Mit dieser Ungleichheit verbindet sich eine zweite von derselben Natur, welche durch die nächstfolgenden Glieder $af'' \cos\lambda''$ und $g'' \sin\lambda''$ dargestellt wird; mit dieser eine dritte, u. s. w.

Hinsichtlich der Reihen für T und V kann man bemerken, dass für $f', g', \ldots = 0$, d. i. bei der gleichförmigen Kreisbewegung, sich T und V auf $-n^2 a$ und 0 reduciren und damit, wie gehörig, eine constante nach dem Mittelpunkte des Kreises gerichtete Kraft ausdrücken; und dass, wenn $f', g', \ldots$ nicht Null sind, wegen jedes Paares zusammengehöriger Glieder in den Reihen für r und l ein entsprechendes Paar von Gliedern in den Reihen für T und V hinzutritt, wodurch jene constante Kraft sowohl ihrer Richtung als ihrer Stärke nach in Perioden von derselben Dauer, wie bei der periodisch ungleichen Bewegung, um etwas Weniges geändert wird.

§. 35. Die Geschwindigkeiten von

$$\cos\lambda', \qquad \sin\lambda', \qquad \cos\lambda'', \qquad \ldots$$

sind nach §. 14, I) und II) resp. gleich

$$-n' \sin\lambda', \qquad n' \cos\lambda', \qquad -n'' \sin\lambda'', \qquad \ldots,$$

und folglich nach den Formeln (1) und (1*) in §. 11 die Geschwindigkeiten, mit denen sich die Polarcoordinaten

$$r = a + af' \cos\lambda' + \ldots \quad \text{und} \quad l = \lambda + g' \sin\lambda' + \ldots$$

ändern:

$$(C) \qquad \begin{cases} r' = -a[n'f' \sin\lambda' + n''f'' \sin\lambda'' + \ldots] \\ l' = n + n'g' \cos\lambda' + n''g'' \cos\lambda'' + \ldots \end{cases}$$

Nicht selten wird auch die Geschwindigkeit in Betracht gezogen, mit welcher sich die vom Radius r beschriebene Fläche ändert. Um diese Geschwindigkeit — wir wollen sie gleich $\frac{1}{2}c$ setzen — ganz allgemein, nicht bloss für eine nahe kreis- und gleichförmige Bewegung, zu bestimmen, sei AB (Fig. 19) der vom Körper während des auf t folgenden Zeitelementes durchlaufene Weg. Weil gleichzeitig die von $r = OA$ beschriebene Fläche um das Dreieck OAB wächst, so ist, wenn m Zeitelemente die Zeiteinheit ausmachen, die Flächengeschwindigkeit

$$\frac{1}{2}c = m \,.\, OAB \ ,$$

eben so wie das m-fache des Winkels AOB die Winkelgeschwindigkeit l' ausdrückt.

Fig. 19.

Man beschreibe aus O mit OA und OB Kreisbögen, welche OB und OA in C und D schneiden, so ist AC gleich dem mit OA oder r multiplicirten Winkel AOB, also

$$m \,.\, AC = rl' \ .$$

Wegen der unendlichen Kleinheit von AOB kann aber das Viereck $ACBD$ als ein geradliniges Rechteck angesehen werden, und es ist folglich das Dreieck

$$OAB = \tfrac{1}{2} OA \,.\, DB = \tfrac{1}{2} r \,.\, AC \ ,$$

mithin $m \,.\, OAB = \frac{1}{2} r \,.\, m \,.\, AC$, d. i.

$$c = rrl' \ .$$

Die Geschwindigkeit endlich, mit welcher der Körper in der Bahn selbst fortgeht, und welche u heisse, ist gleich

$$m \,.\, AB = \sqrt{m^2 \,.\, CB^2 + m^2 \,.\, AC^2} \ .$$

Es ist aber

$$m \,.\, CB = m(OB - OA) = r' \ ,$$

gleich der Geschwindigkeit, mit welcher sich r ändert, und

$$m \,.\, AC = rl' \ ;$$

folglich

$$u = \sqrt{r'^2 + r^2 l'^2} \ .$$

§. 36. Im Folgenden wird es einigemal nöthig sein, bei Herleitung der Kräfte T und V aus den für r und l gegebenen Reihen auch noch die Quadrate der kleinen Brüche f', g', f'', g'', ... und ihre Producte in einander zu berücksichtigen. In solchen Fällen, wo die in §. 34 gegebenen Formeln (B) nicht ausreichen, besteht das

einfachste Verfahren darin, dass man zuerst aus den Reihen für r und l ihre Geschwindigkeiten r' und l', und von r' und l' abermals die Geschwindigkeiten r'' und l'' entwickelt, indem von diesen Geschwindigkeiten die Kräfte T und V auf eine sehr einfache Weise abhängen, welches auch die Bewegung des Körpers sein mag.

Um diese Abhängigkeit zu finden, gehen wir zu den streng richtigen Formeln in §. 32

$$(a) \quad r = a\cos(\lambda - l) + a_1\cos(\lambda_1 - l) + \dots,$$
$$(b) \quad 0 = a\sin(\lambda - l) + a_1\sin(\lambda_1 - l) + \dots,$$
$$(c) \quad T = -n^2 a\cos(\lambda - l) - n_1^2 a_1\cos(\lambda_1 - l) - \dots,$$
$$(d) \quad V = -n^2 a\sin(\lambda - l) - n_1^2 a_1\sin(\lambda_1 - l) - \dots$$

zurück. Weil n die Geschwindigkeit von λ, l' die von l, also $n - l'$ die von $\lambda - l$, und folglich (§. 14, Zus.)

$$(n - l')\sin(\lambda - l) \quad \text{die von} \quad \cos(\lambda - l), \qquad \text{etc.}$$

ist, so ist die aus (a) abgeleitete Gleichung zwischen den Geschwindigkeiten der darin enthaltenen Veränderlichen:

$$r' = -(n - l')a\sin(\lambda - l) - (n_1 - l')a_1\sin(\lambda_1 - l) - \dots,$$

welche sich wegen (b) auf

$$(e) \qquad r' = -na\sin(\lambda - l) - n_1 a_1\sin(\lambda_1 - l) - \dots$$

reducirt. Eben so folgt aus (b):

$$0 = (n - l')a\cos(\lambda - l) + (n_1 - l')a_1\cos(\lambda_1 - l) + \dots,$$

d. i.

$$(f) \quad rl' = na\cos(\lambda - l) + n_1 a_1\cos(\lambda_1 - l) + \dots,$$

wegen (a). Verfährt man auf gleiche Weise mit (e) und (f), so kommt, wegen (c) und (f):

$$r'' = -n(n - l')a\cos(\lambda - l) - n_1(n_1 - l')a_1\cos(\lambda_1 - l) - \dots$$
$$= T + rl'^2,$$

sowie wegen (d) und (e):

$$(rl')' = -n(n - l')a\sin(\lambda - l) - n_1(n_1 - l')a_1\sin(\lambda_1 - l) - \dots$$
$$(\alpha) \qquad = V - r'l'.$$

Hiernach, und weil $(rl')'$, oder die Geschwindigkeit von rl',

$$= r'l' + rl'' \quad (§. 11, 2^*)$$

ist, hat man zuletzt

$$(D) \quad T = r'' - rl'^2 \quad \text{und} \quad V = 2r'l' + rl'',$$

als die gesuchten Ausdrücke von T und V. Auch werden diese Formeln, obschon bloss aus der Theorie der zusammengesetzten Kreis-

bewegung hergeleitet, dennoch allgemeine Gültigkeit haben, da jede Bewegung in einer Ebene als aus gleichförmigen Kreisbewegungen zusammengesetzt angesehen werden kann (§. 28, b).

§. 37. Zusätze. a) Zwischen der auf dem Radius r perpendikularen Kraft V und der Geschwindigkeit $\frac{1}{2}c'$ der Flächengeschwindigkeit $\frac{1}{2}c$ findet eine sehr einfache Beziehung statt. Nach §. 35 ist nämlich

$$c = r \,.\, rl' ;$$

von $r \,.\, rl'$ ist aber die Geschwindigkeit gleich

$$r\,(rl')' + r' \,.\, rl' = rV \quad (\text{§. 36, Gl. } a),$$

mithin

$$c' = rV \,.$$

Es folgt hieraus weiter, dass, wenn $c' = 0$ ist, also die Flächengeschwindigkeit $\frac{1}{2}c$ constant bleibt, dann auch $V = 0$ ist, und sich somit die Kraft P auf T allein reducirt, und umgekehrt; oder deutlicher:

Bewegt sich ein Körper M in einer Ebene dergestalt, dass der Radius OM der Zeit proportionale Flächen beschreibt, so wirkt die Kraft in der Richtung des Radius; und umgekehrt: Wenn die Richtung der auf M wirkenden Kraft stets denselben festen Punkt O trifft, so (bewegt sich M in einer Ebene und es) beschreibt der Radius OM in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

So muss z. B. bei der aus zwei Kreisbewegungen zusammengesetzten elliptischen Bewegung (§. 28, a), weil bei ihr die Kraft stets nach dem Mittelpunkte der Ellipse gerichtet ist (§. 31), die Flächengeschwindigkeit in Bezug auf denselben Punkt constant sein. Es geschieht daher diese Bewegung nach dem nämlichen Gesetze, wie die in §. 24, 2) betrachtete, so wie auch bei beiden Bewegungen die Kraft nach einem und demselben Gesetze wirkt.

b) Die Relation $c' = rV$ und die daraus gezogene merkwürdige Folgerung lassen sich auch leicht durch Construction erweisen. — Seien AB und BC (Fig. 20) die in zwei auf einander folgenden und einander gleichen Zeitelementen, deren m auf die Zeiteinheit gehen, vom Körper beschriebenen Wege. Man vollende das Parallelogramm $ABCD$, so ist die in B den Körper treibende Kraft $\equiv mm \,.\, BD$; und wenn man von D auf OB das Perpendikel DE fällt, so ist

$$T \equiv mm \,.\, BE \quad \text{und} \quad V \equiv mm \,.\, ED \,.$$

Ferner ist die Flächengeschwindigkeit

$$\tfrac{1}{2} c = m \,.\, OAB \ ,$$

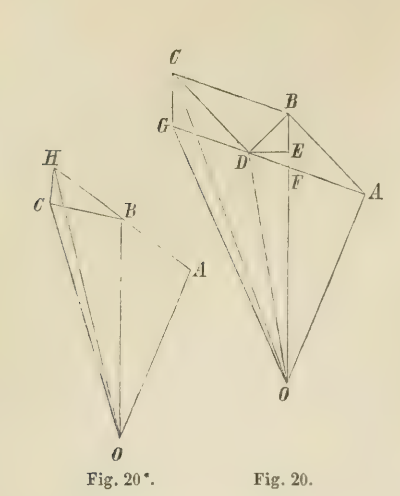


Fig. 20*. Fig. 20.

und die Geschwindigkeit $\tfrac{1}{2} c'$, mit der sich dieselbe ändert, gleich

$$m(m \,.\, OBC - m \,.\, OAB) \ .$$

Es ist aber, wenn AD von BO in F und von einer durch C mit BO gezogenen Parallelen in G getroffen wird,

$$DG = AF \ ,$$

und daher das Dreieck

$$\begin{aligned} OBC &= OBG \\ &= OBD + ODG + DBG \ , \\ OAB &= OAF + ABF \\ &= ODG + DBG \ , \end{aligned}$$

folglich

$$OBC - OAB = OBD\,^{*)}$$

und damit

$$\tfrac{1}{2} c' = mm \,.\, OBD = \tfrac{1}{2} mm \,.\, ED \,.\, OB = \tfrac{1}{2} Vr \ ,$$

wie zu beweisen war.

Bleibt die Flächengeschwindigkeit ungeändert, ist also

$$OAB = OBC \ ,$$

so wird $OBD = 0$, und es fällt der Punkt D, mithin auch die

---

*) Wird von mehreren Dreiecken, welche in einer Ebene liegen und durch Nebeneinanderstellung der ihre Ecken bezeichnenden Buchstaben ausgedrückt sind, jedes derselben, wie OAB, seinem Inhalte nach positiv oder negativ genommen, je nachdem, von der in seinem Ausdrucke zuerst gesetzten Ecke O aus, die Richtung von der zweiten A nach der dritten B nach links z. B. oder nach rechts gehend erscheint, so gilt obige Gleichung, was auch der Punkt O für eine Lage gegen das Parallelogramm $ABCD$ haben mag, und kann, wenn man will, auch also geschrieben werden:

$$OBC + OBA = OBD \ .$$

Sie drückt unter dieser Form den bemerkenswerthen Satz aus: *Von drei Dreiecken in einer Ebene, welche eine gemeinschaftliche Ecke O und zu gegenüberstehenden Seiten zwei anstossende Seiten BC und BA, und die durch deren gemeinschaftliche Ecke gehende Diagonale BD eines Parallelogramms haben, ist die Summe der beiden ersten Dreiecke dem dritten gleich.*

Siehe des Verf. *Lehrbuch der Statik*, §. 34 [Ges. Werke Bd. III, S. 51].

Richtung der Kraft, in den Radius. — Noch unmittelbarer erhellet dieses, wenn man in der Verlängerung von AB (Fig. 20*)

$$BH = AB$$

macht, wodurch

$$OAB = OBH$$

wird. Alsdann ist HC parallel mit der Richtung der Kraft in B (§. 19), und bei constanter Flächengeschwindigkeit

$$OBC = OAB \ ,$$

folglich auch gleich OBH, mithin HC mit BO parallel.

c) Die für T und V gefundenen allgemeinen Ausdrücke lassen sich noch auf mehrere andere Arten als richtig darthun. Folgender Beweis, den ich aber der Kürze wegen mehr nur andeuten, als ausführen will, beruht auf einer geometrischen Betrachtung und scheint mir deshalb der Mittheilung werth, weil sich dadurch zugleich die Bedeutung der einzelnen Glieder von T und V zu erkennen giebt.

Haben O, A, B, C (Fig. 21) dieselbe Bedeutung, wie vorhin. Man trage OA auf OB und OC von O bis D und E ab, und mache, von einem beliebigen Punkte F ausgehend,

$$FG \equiv DB \quad \text{und} \quad FH \equiv EC \ .$$

Die Bewegung ABC ist somit in zwei, nämlich ADE und FGH zerlegt, von denen die erstere in einem Kreise um O geschieht und die letztere auf der ersteren normal ist. Heissen nun N und M die Normalkraft und die Tangentialkraft bei der Bewegung ADE; N_1 und M_1 dasselbe bei der Bewegung FGH, so sind es auch diese vier Kräfte, durch welche die aus ADE und FGH zusammengesetzte Bewegung ABC erzeugt wird; und zwar wird

$$T = N + M_1 \quad \text{und} \quad V = M + N_1$$

sein. Es ist aber

Fig. 21.

$$N = -rl'^2 \ , \qquad M_1 = r'' \ , \qquad M = rl'' \ , \qquad N_1 = 2r'l' \ .$$

Von der Richtigkeit der drei ersten dieser vier Gleichungen wird man sich ohne Schwierigkeit aus §. 23 überzeugen. Die vierte beruht auf dem leicht erweislichen Satze, dass bei jeder Bewegung die Normalkraft gleich der Geschwindigkeit des Körpers, multiplicirt mit der Winkelgeschwindigkeit der durch ihn an die Bahn gelegten Tangente, ist. Bei der Bewegung FGH ist aber die Geschwindigkeit gleich

$$m \,.\, FG = m \,.\, DB = r' \ ,$$

und die Winkelgeschwindigkeit der Tangente gleich

$$m\,.\,FG^\frown GH = 2m\,.\,BOC = 2l'\ ;$$

denn es ist unendlich nahe

$$OC - OB = OB - OA\ ,$$

folglich

$$EC = 2DB\ , \qquad \text{d. i.}\quad FH = 2FG\ ,$$

also

$$FG^\frown GH = KGH = 2F = 2BOC\ .$$

§. 38. Bis jetzt haben wir in diesem Kapitel nur solche Bewegungen in Betracht gezogen, welche in einer und derselben Ebene vor sich gehen. Wir wollen daher schliesslich noch bei einem sich beliebig im Raume bewegenden Körper die ihn treibende Kraft zu bestimmen suchen. Die vorigen Coordinaten x und y oder r und l mögen alsdann die Coordinaten des auf eine unbewegliche Ebene projicirten Körpers bedeuten. Sein Abstand von der Ebene zur Zeit t sei, analog mit den vorhergehenden Coordinatenausdrücken:

$$z = h'\sin\beta' + h''\sin\beta'' + h'''\sin\beta''' + \ldots\ ,$$

wo h', h'', h''', ... Linien von constanter Länge und β', β'', β''', ... der Zeit proportional sich ändernde Winkel vorstellen. Hiermit haben wir die Bewegung des Körpers in zwei zerlegt, von denen die eine in der unbeweglichen Ebene, die andere in einer diese Ebene rechtwinklig schneidenden Geraden geschieht. Nach §. 24 wird folglich die beschleunigende Kraft zusammengesetzt sein aus zwei Kräften, parallel und gleich den Kräften X und Y oder T und V, welche die Bewegung in der Ebene hervorbringen, und aus einer auf der Ebene perpendikularen Kraft, welche die durch z ausgedrückte geradlinige Bewegung erzeugt. Es ist daher nur noch übrig, diese letztere Kraft, welche W heisse, zu bestimmen. Sie findet sich, wenn wir die Geschwindigkeiten, mit denen sich die Winkel β', β'', ... ändern, resp. gleich p', p'', ... setzen, nach der zu Ende des §. 30 gemachten Bemerkung:

$$W = -p'^2h'\sin\beta' - p''^2h''\sin\beta'' - \ldots\ .$$

Zweiter Abschnitt.

Von den Kräften, durch welche die Bewegungen der Himmelskörper hervorgebracht werden.



Erstes Kapitel.

Von der elliptischen Bewegung der Planeten.

---

§. 39. Nachdem wir uns im vorigen Abschnitte mit den Grundlehren der Dynamik so weit, als es vor der Hand nöthig schien, bekannt gemacht haben, gehen wir zu dem Hauptgegenstande unserer Untersuchungen, zu der Anwendung jener Lehren auf die Bewegung der Himmelskörper, über. Die Gesetze, nach denen sich diese Bewegungen richten, sind, wenn wir einstweilen kleine dabei vorkommende Anomalieen unberücksichtigt lassen, sehr einfach und überall die nämlichen, was darauf hindeutet, dass auch die bei diesen Bewegungen thätigen Kräfte ein ganz einfaches und überall auf gleiche Weise stattfindendes Gesetz befolgen werden. Die Entwickelung dieses Gesetzes und seiner nächsten Folgen ist der Zweck des gegenwärtigen Abschnittes.

Betrachten wir deshalb zuerst die Bewegungen der Planeten um die Sonne. Durch Beobachtungen und darauf gestützte Rechnungen hat KEPLER (geb. 1571, gest. 1630) gefunden:

1) dass jeder Planet eine Ellipse beschreibt, in deren einem Brennpunkte sich die Sonne befindet;

2) dass jeder Planet in der Ellipse dergestalt fortgeht, dass die von der Sonne bis zu ihm zu ziehende Gerade der Zeit proportionale Flächen überstreicht, und

3) dass die Quadrate der Umlaufszeiten je zweier Planeten sich wie die Würfel ihrer mittleren Entfernungen von der Sonne verhalten.

Diese drei Gesetze, welche die Grundlage der gesammten physischen Astronomie bilden, werden nach ihrem Entdecker die Kepler'schen Gesetze genannt.

Anmerkung. Die Sonne und die Planeten sind sehr nahe kugelförmig, und das jetzt von der gegenseitigen Bewegung dieser Kugeln Ausgesprochene ist, streng genommen, von der Bewegung ihrer Mittelpunkte zu verstehen. Indessen sind die Durchmesser dieser Kugeln gegen ihre Abstände von einander so gering, dass man erstere im Vergleich zu letzteren beinahe als physische Punkte ansehen kann. So ist der Durchmesser der Sonne 10-mal grösser als der des grössten Planeten, des Jupiter, und doch nur etwa der 42ste Theil ihrer Entfernung von dem ihr nächsten Planeten, Merkur; er ist aber kleiner als der 2000ste Theil des Abstandes der Sonne von dem Planeten Uranus*).

§. 40. Die zwei Brennpunkte F und S (Fig. 22) einer Ellipse sind bekanntlich in der grossen Axe AP derselben auf entgegengesetzten Seiten und gleich weit vom Mittelpunkte M liegende, und von den Endpunkten der kleinen Axe CD um die halbe grosse Axe entfernte Punkte, so dass z. B.

$$SC = MP$$

ist. Sie besitzen die merkwürdige Eigenschaft, dass die Summe ihrer Abstände von irgend einem Punkte der Ellipse stets der grossen Axe gleich ist, — wie dies in Bezug auf die vier Endpunkte der beiden Axen aus der gegebenen Definition auf den ersten Blick folgt.

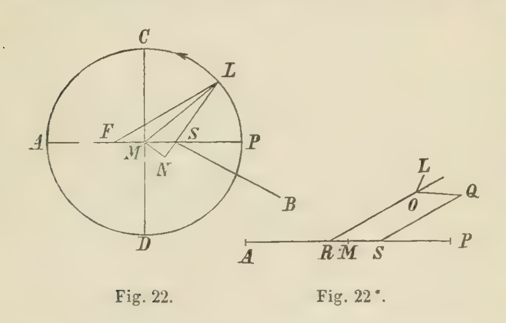


Fig. 22. Fig. 22*.

Der Bruch, welcher angiebt, der wievielte Theil der halben grossen Axe der Abstand eines der beiden Brennpunkte vom Mittelpunkte ist, heisst die Excentricität. Bezeichnen wir dieselbe mit e und die halbe grosse Axe mit a, so ist

$$MS = ae \ .$$

und die halbe kleine Axe

$$MC = \sqrt{SC^2 - MS^2} = \sqrt{a^2 - a^2 e^2} = a\sqrt{1 - e^2}$$
$$= a\left(1 - \tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{8}e^4 - \ldots\right) \ .$$

folglich der Unterschied zwischen beiden Axen, d. i. der Unterschied zwischen dem grössten und dem kleinsten Durchmesser der Ellipse,

$$= a\left(e^2 + \tfrac{1}{4}e^4 + \ldots\right) \ .$$

Alle Ellipsen, für welche die Excentricität e gleichen Werth hat, sind einander ähnlich; durch e wird daher die Form der Ellipse be-

*) Der erst 1846 entdeckte Planet Neptun ist mehr als 3200 Sonnendurchmesser von der Sonne entfernt. A. d. H.

stimmt. Je weniger e von 1 verschieden ist, desto länglicher ist die Ellipse, und je kleiner e ist, desto mehr nähert sie sich einem Kreise, in den sie für $e = 0$ selbst übergeht.

§. 41. Stelle die Ellipse der Figur die Bahn eines Planeten vor; im Brennpunkte S sei die Sonne. Von den zwei Endpunkten der grossen Axe ist alsdann der dem S näher liegende Punkt P zugleich derjenige Punkt der Bahn, in welchem der Planet der Sonne am nächsten kommt, und wird daher das Perihelium oder die Sonnennähe genannt. Befindet sich der Planet im anderen Endpunkte A, so ist er am weitesten von der Sonne entfernt, weshalb der Punkt A das Aphelium oder die Sonnenferne heisst. Beide Punkte begreift man auch unter dem Namen der Apsiden und nennt die Linie AP, sobald man bloss ihre Lage, nicht ihre Länge berücksichtigt, die Apsidenlinie.

Die kleinste Entfernung des Planeten von der Sonne ist hiernach

$$SP = MP - MS = a(1 - e) \ ,$$

die grösste

$$SA = MA + SM = a(1 + e) \ ,$$

und daher die mittlere $= a =$ der halben grossen Axe. Zufolge des §. 40 befindet sich der Planet in dieser mittleren Entfernung, wenn er durch den einen oder anderen Endpunkt der kleinen Axe geht.

§. 42. Die Bahnen der Planeten sind so wenig excentrisch, dass die meisten von ihnen beim ersten Anblicke Kreise zu sein scheinen. Unter den Bahnen der älteren Planeten haben die des Merkur und des Mars die grösste Excentricität, nämlich $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{11}$; die grösste nach diesen, $= \frac{1}{18}$, hat die Bahn des Saturn. Hierauf folgen die Excentricitäten der Bahnen des Jupiter (und die ihr nahezu gleiche des Uranus), der Erde und der Venus, $= \frac{1}{21}$, $\frac{1}{60}$ und $\frac{1}{146}$. Durchschnittlich grösser sind sie bei den erst in diesem Jahrhunderte entdeckten sogenannten kleinen Planeten oder Asteroiden*).

Bei dieser Kleinheit der Excentricitäten e wird es als erste Annäherung an die planetarischen Bewegungen hinreichen, wenn wir bloss die erste Potenz von e berücksichtigen, die zweite und höheren aber vernachlässigen. Zunächst werden wir daher den Unterschied zwischen dem grössten und dem kleinsten Durchmesser einer elliptischen Bahn, $= ae^2 + \dots$ (§. 40), unbeachtet lassen, und hiernach

*) deren Excentricitäten sogar bis 0,4 steigen, dagegen beträgt die Excentricität des Neptun nur $\frac{1}{118}$. A. d. H.

die Bahn als einen Kreis betrachten, welcher MA oder MC, gleich a, zum Halbmesser und M zum Mittelpunkte hat, von dem die Sonne S um die gegen a nur geringe Entfernung ae absteht. Dabei wird, wie im Vorigen, die Gerade MS die Bahn in den der Sonne am nächsten und am fernsten liegenden Punkten, P und A, treffen.

§. 43. Befinde sich der Planet in einem beliebigen Punkte L seiner Bahn. Die von der Sonne bis zu ihm gezogene Gerade SL heisst der Radius Vector, und der Winkel PSL, um welchen die von der Sonne nach dem Perihel zu ziehende Gerade SP nach dem Sinne der Bewegung des Planeten (in der Figur nach links) gedreht werden muss, bis sie mit dem Radius Vector zusammenfällt, die wahre Anomalie des Planeten. Diese beiden Stücke, die Polarcoordinaten des Planeten in Bezug auf die Sonne als Anfangspunkt und die Apsidenlinie als Grundlinie, wollen wir jetzt mit Weglassung der zweiten und höheren Potenzen von e (§. 42) durch die Zeit t zu bestimmen suchen, die seit dem letzten Durchgange des Planeten durchs Perihel verflossen ist.

Man setze den Radius Vector $SL = r$, die wahre Anomalie $PSL = v$ und den Winkel $SLM = i$, und fälle von M auf SL das Perpendikel MN, so ist im Dreieck MNS

$$MS = ae \ , \qquad MSN = v \ ,$$

folglich

$$NM = ae \sin v \ , \qquad NS = ae \cos v$$

Im Dreieck MNL aber, wo $ML = MP = a$ ist, hat man

$$NM = a \sin i \ , \qquad NL = a \cos i \ ;$$

folglich

$$\sin i = e \sin v \quad \text{und} \quad a \cos i = ae \cos v + r \ .$$

Wegen der ersteren dieser Gleichungen ist aber $\sin i$, eben so wie e, eine sehr kleine Zahl, deren zweite und höhere Potenzen vernachlässigt werden können. Deshalb, und wenn man hier, wie im Folgenden, zur Einheit der Winkel denjenigen (= 57°296, §. 14) wählt, der von einem dem Halbmesser gleichen Bogen gemessen wird, kann man statt jener zwei Gleichungen auch schreiben:

$$i = e \sin v \quad \text{und} \quad a = ae \cos v + r \ ,$$

d. i.

$$r = a(1 - e \cos v) \ .$$

Nun überstreicht der Radius Vector während der Zeit t die Fläche SPL und während der Umlaufszeit, welche U heisse, die ganze Fläche der Bahn, d. i. die mit einem Halbmesser $= a$ beschriebene Kreis-

fläche $= \pi a a$. Nach dem zweiten Kepler'schen Gesetze muss sich daher verhalten

$$\text{Fläche } SPL : \pi a a = t : U \,.$$

Es ist aber der Winkel

$$PML = v - i = v - e \sin v \;;$$

folglich die Fläche

$$MPL = \tfrac{1}{2} a a \, (v - e \sin v) \,.$$

Ferner ist

$$MSL = \tfrac{1}{2} NM \,.\, SL = \tfrac{1}{2} a e \sin v \,.\, a \, (1 - e \cos v) = \tfrac{1}{2} a a e \sin v \,,$$

und daher die Fläche

$$SPL = MPL - MSL = \tfrac{1}{2} a a \, (v - 2 e \sin v) \,.$$

Hiermit wird die obige Proportion:

$$v - 2 e \sin v : 2\pi = t : U \,.$$

Setzt man daher noch $2\pi : U = n$, wo also n die mittlere Bewegung des Planeten, d. i. die Winkelgeschwindigkeit des Radius Vector bedeutet, welche er haben würde, wenn er sich gleichförmig, in der Zeit U ein Mal, um die Sonne drehte, so wird

$$v - 2 e \sin v = n t \;;$$

und hiermit lässt sich aus dem Winkel v die Zeit t finden, in welcher er beschrieben worden. Soll aber umgekehrt, wie gefordert wurde, aus der Zeit der Winkel berechnet werden, so hat man

$$v = n t + 2 e \sin v = n t + 2 e \sin (n t + 2 e \sin v) \,,$$

d. i.

$$(1) \qquad v = n t + 2 e \sin n t \,.$$

Eben so findet sich, durch t ausgedrückt,

$$r = a \, [1 - e \cos (n t + 2 e \sin v)]$$

d. i.

$$(2) \qquad r = a \, (1 - e \cos n t) \,.$$

Dabei ist nt der Winkel, den der Radius Vector mit mittlerer Bewegung während der Zeit t beschreibt. Er wird, wenn, wie hier, die Zeit vom Durchgange durchs Perihel an gerechnet wird, die mittlere Anomalie und der dadurch bestimmte Ort der mittlere Ort des Planeten genannt.

Der Unterschied zwischen der mittleren und wahren Anomalie, oder der Unterschied zwischen dem mittleren und wahren Orte, also der Winkel

$$v - n t = 2 e \sin n t \,,$$

heisst die Mittelpunktsgleichung. Ihr grösster Werth ist gleich $\pm 2e$ und findet für $nt = 90^0$ und $= 270^0$, also in den beiden Mitten

zwischen Perihel und Aphel, statt. Im Perihel und Aphel selbst aber fällt der wahre Ort mit dem mittleren zusammen, und die Mittelpunktsgleichung ist Null.

Zusätze. *a*) Bei der gestatteten Vernachlässigung von $e^2, \ldots$ kann man auch setzen:

$i = e \sin(v - i)$, d. i. der Winkel $MLS = e \sin SML$;

und eben so ist, wenn man noch FL zieht:

$$MLF = e \sin FML; \qquad \text{folglich} \quad FLM = MLS = i$$

und

$$PFL = v - FLS = v - 2i = v - 2e \sin v$$
$$= nt = \text{der mittleren Anomalie.}$$

Der Winkel PFL wächst folglich der Zeit proportional, d. h.

Die Bewegung, aus dem Brennpunkte betrachtet, in welchem die Sonne nicht steht, erscheint gleichförmig, sehr nahe wenigstens.

Eine von S aus parallel mit FL gezogene Linie AS ist daher nach dem mittleren Orte gerichtet, und der Winkel $ASL = FLS$ gleich der Mittelpunktsgleichung.

b) Damit der Planet, von F aus betrachtet, sich gleichförmig zu bewegen scheine, muss seine wahre Geschwindigkeit in demselben Verhältnisse ab- und zunehmen, in welchem er sich dem F nähert und von F entfernt. Sie ist folglich im Perihel am grössten, im Aphel am kleinsten, und ihr grösster Werth verhält sich zu ihrem kleinsten wie FP zu FA, d. i. wie $1 + e$ zu $1 - e$.

Anmerkung. Den Gleichungen (2) und (1) kann man auch die Formen geben:

$$r = a + \tfrac{3}{2} ae \cos(180^\circ - \lambda) + \tfrac{1}{2} ae \cos(2\lambda - \lambda),$$
$$v = \lambda + \tfrac{3}{2} e \sin(180^\circ - \lambda) + \tfrac{1}{2} e \sin(2\lambda - \lambda),$$

wo $\lambda = nt$. Vergleicht man diese Formen mit den Gleichungen für r und l in §. 33 (a') u. (b'), so sieht man, dass die Bewegung von L um S folgendergestalt sich epicyklisch darstellen lässt. Man lasse (Fig. 22*) Q um S, O um Q und L um O in den Abständen

$$SQ = a, \qquad QO = \tfrac{3}{2} ae$$

und

$$OL = \tfrac{1}{2} ae$$

sich also drehen, dass zur Zeit t die Winkel dieser Linien mit SP resp. gleich nt, 180° und $2nt$ sind; oder, was auf dasselbe hinauskommt: Man trage über M hinaus eine Linie

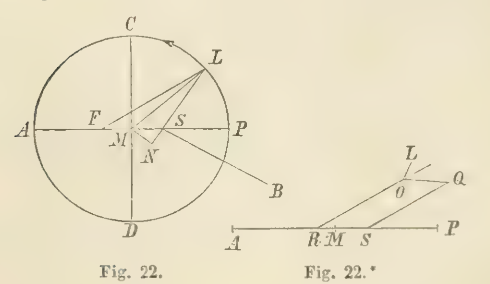


Fig. 22. Fig. 22.*

$$SR\ (= QO) = \tfrac{3}{2} SM$$

ab, und lasse um R einen Punkt O in der mittleren Entfernung a mit der mitt-

leren Bewegung n, und um O den Planeten L in einer Entfernung gleich $\frac{1}{3}SR$ mit dem Doppelten der mittleren Bewegung Kreise beschreiben, und dieses so, dass, wenn RO mit RP, auch OL mit RP einerlei Richtung hat.

Es ist dies genau dieselbe Construction, nach welcher Copernicus die Planeten sich um die Sonne bewegen lässt. *Copern. de revolut. orbium coelest.* lib. V. cap. 4.*) Die im vorigen Zusatz angegebene Construction, nach welcher L um M sich in einem Abstande gleich a so bewegt, dass die Bewegung von F aus gleichförmig erscheint, gehört dem Ptolemäus an, nur dass dieser in S nicht die Sonne, sondern die Erde, ruhend annimmt. *Almagest.* lib. IX. cap. 5. — Beide Astronomen haben daher die in Rede stehende Bewegung bis auf die erste Potenz der Excentricität genau dargestellt.

§. 44. Die siderische Umlaufszeit der Erde um die Sonne beträgt 365·256 Tage mittlere Zeit. Wird ein solcher Tag zur Messung der Zeit, und die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne, wie es gewöhnlich ist, zur Messung von Raumlängen genommen, so verhält sich nach dem dritten Kepler'schen Gesetze, wenn wir die Erde mit einem anderen Planeten vergleichen, dessen mittlere tägliche Bewegung, in Theilen des Halbmessers ausgedrückt, gleich n, dessen Umlaufszeit folglich gleich $2 \cdot \frac{3{\cdot}14159}{n}$ Tagen, und dessen mittlere Entfernung von der Sonne gleich a ist:

$$(365{\cdot}256)^2 : \left(2 \cdot \frac{3{\cdot}14159}{n}\right)^2 = 1 : a^3 .$$

Setzt man daher noch die Zahl

$$2 \cdot \frac{3{\cdot}14159}{365{\cdot}256} = 0{\cdot}017202 = k ,$$

so wird

$$a^3 n^2 = k^2 ,$$

---

*) Ich erlaube mir hier nachträglich die Bemerkung hinzuzufügen, dass die oben erklärte Hypothese des Copernicus etwas einfacher ausfällt, wenn man die zwei von ihm angewendeten Kreisbewegungen mit einander vertauscht. Ist nämlich S (Fig. 22) die Sonne, M der Mittelpunkt der Bahn und zugleich der Mittelpunkt von FS, so lasse man einen Punkt G gleichförmig in der halben Umlaufszeit des Planeten L und nach derselben Richtung, wie L, den Kreis beschreiben, dessen Durchmesser FM ist, und lasse G durch M gehen, wenn L im Perihel oder im Aphel ist. L selbst beschreibt alsdann gleichförmig um G, als Mittelpunkt, einen Kreis, dessen Durchmesser gleich der mittleren Entfernung des L von S ist.

Die den Planeten treibende Kraft ist nach dieser Construction zusammengesetzt aus den beiden Kräften, welche die Kreisbewegungen von G und L hervorbringen. Führt man diese Zusammensetzung wirklich aus, sei es mit Anwendung der Formeln (A) und (B) in §. 34, oder auf geometrischem Wege, so wird man finden, dass die Kraft, sehr nahe wenigstens, nach S gerichtet und dem Quadrate von SL umgekehrt proportional ist. [Im Original ist dieser nachträgliche Zusatz als Anmerkung zu Seite VI. der Vorrede enthalten. D. H.]

wodurch man für jeden Planeten aus der einen der beiden Grössen a und n die andere finden kann.

§. 45. Zur Grundlinie der Polarcoordinaten wollen wir jetzt, statt der in §. 43 hierzu angewendeten Apsidenlinie, eine beliebige andere in der Ebene der Bahn durch die Sonne S gelegte Gerade SB nehmen. Der Winkel, den die von S nach irgend einem Punkte in der Ebene der Bahn gezogene Gerade mit dieser neuen Grundlinie macht, heisse die Länge des Punktes und werde, wie im Vorigen, im Sinne der Bewegung des Planeten gerechnet. Hiernach ist BSP die Länge des Perihels, BSL die Länge des wahren Orts des Planeten oder die wahre Länge und, wenn A den mittleren Ort bezeichnet, BSA die mittlere Länge des Planeten. Setzt man diese drei Längen resp. gleich ω, l und λ, so ist

$$l = BSP + PSL = \omega + \text{der wahren Anomalie},$$
$$\lambda = BSP + PSA = \omega + \text{der mittleren Anomalie}.$$

Die mittlere Länge wächst daher eben so, wie die mittlere Anomalie, der Zeit proportional, in jeder Zeiteinheit um einen Winkel gleich n.

Rechnet man ferner die Zeit t nicht von dem Durchgange des Planeten durch das Perihel, sondern von einem beliebigen anderen Zeitpunkte an, welcher die Epoche heisst, und setzt man die mittlere Länge in der Epoche gleich ε, so ist, dem eben Bemerkten zufolge, die mittlere Länge zur Zeit t

$$\lambda = \varepsilon + nt \;,$$

folglich die mittlere Anomalie gleich $\varepsilon + nt - \omega$, und damit die wahre (§. 43)

$$v = \varepsilon + nt - \omega + 2e \sin(\varepsilon + nt - \omega) \;.$$

Dies giebt für die Coordinaten die Ausdrücke:

$$r = a\,[1 - e\cos(\varepsilon + nt - \omega)] \;,$$
$$l = \omega + v = \varepsilon + nt + 2e\sin(\varepsilon + nt - \omega) \;,$$

Formeln, nach denen die Bewegungen aller Planeten auf einen gemeinsamen Anfangspunkt der Zeit und, dafern sie in einer und derselben Ebene geschehen, auf eine gemeinsame Grundlinie bezogen werden. Die Constanten, die deshalb für jeden Planeten besonders gegeben sein müssen, sind a, ε, e und ω, indem die Constante n auf die in §. 44 besagte Weise durch a bestimmt ist.

§. 46. Da jeder Planet sich in einer die Sonne mit enthaltenden Ebene bewegt, so werden die Ebenen je zweier Planetenbahnen, wenn sie nicht zusammenfallen, sich in einer durch die Sonne gehen-

den Geraden schneiden. Die Beobachtungen lehren, dass die Winkel, unter denen dieses geschieht, oder die gegenseitigen *Neigungen* der Bahnebenen, nur wenige Grade enthalten. Die Neigungen, welche gegen die Ebene der Erdbahn die Bahnen der älteren Planeten haben, sind am grössten bei Merkur und Venus, nämlich $7^{\circ}0$ und $3^{\circ}4$; bei Mars, Jupiter und Saturn sind sie $1^{\circ}9$; $1^{\circ}3$ und $2^{\circ}5$; bei Uranus nur $0^{\circ}8$ *). Bei den kleinen Planeten dagegen sind eben so, wie die Excentricitäten, auch die Neigungen gegen die Erdbahn bedeutend grösser, als bei den übrigen; sie betragen z. B. für Ceres, Pallas, Juno und Vesta resp. $10^{\circ}6$; $34^{\circ}6$; $13^{\circ}0$ und $7^{\circ}1$.

Ausserdem, dass die Bewegungen der Planeten insgesammt nahe kreisförmig sind und in nur wenig gegen einander geneigten Ebenen geschehen, haben sie auch noch dieses mit einander gemein, dass alle Planeten die Sonne nach einer und derselben Richtung umkreisen, einer Richtung, die, von der Nordseite der Bahnebenen beobachtet, von rechts nach links gehend erscheint.

§. 47. Um die Verschiedenheit der Ebenen, in denen sich die verschiedenen Planeten um die Sonne bewegen, mit in Rechnung nehmen zu können, wollen wir alle diese Bewegungen auf eine und dieselbe, beliebig durch die Sonne gelegte Grundebene, und auf eine und dieselbe, in dieser Ebene von der Sonne aus beliebig gezogene Grundlinie beziehen. Hiernach wird der Ort eines Planeten bestimmt sein, wenn nächst der Länge des Radius Vector der Winkel desselben mit der Grundebene oder, was dasselbe ist, mit seiner Projection auf die Grundebene, und der Winkel dieser Projection mit der Grundlinie gegeben sind. Letzteren Winkel nennt man die *Länge des Planeten in der Grundebene*; sie wird eben so, wie in §. 45 die *Länge in der Bahn*, im Sinne der Bewegung des Planeten gezählt. Der Winkel, den der Radius Vector mit der Grundebene macht, heisst die *Breite* des Planeten; sie ist *nördlich* oder *südlich*, je nachdem der Planet nord- oder südwärts von der Grundebene absteht.

Um nun für eine gegebene Zeit t die Länge in der Grundebene und die Breite des Planeten berechnen zu können, muss vor Allem die Lage seiner Bahnebene gegen die Grundebene, also der Winkel oder die *Neigung* der ersteren Ebene gegen die letztere, und die Lage der *Knotenlinie*, d. i. des gegenseitigen Durchschnitts beider Ebenen, gegeben sein. Man nennt nämlich die zwei Punkte einer Planetenbahn, in denen sie von der Grundebene geschnitten wird, die *Knoten* der Bahn; denjenigen, in welchem der Planet von der

*) [bei Neptun $1^{\circ}8$.]

südlichen auf die nördliche Seite der Bahn übergeht, den aufsteigenden, den anderen den niedersteigenden Knoten. Beide Knoten, und die Sonne zwischen ihnen, liegen in dem Durchschnitte der Bahnebene und der Grundebene, der deshalb die Knotenlinie heisst, und dessen Lage in der Grundebene durch die Länge des einen oder des anderen Knoten — beide Längen sind um 180° verschieden — bestimmt ist.

Grösserer Anschaulichkeit willen denke man sich um die Sonne als Mittelpunkt mit einem beliebigen Halbmesser eine Kugelfläche beschrieben. Seien BC und $B'L$ (Fig. 23) die zwei grössten Kreise dieser Fläche, in denen sie von der Grundebene und der Bahnebene geschnitten wird. Die beiden Punkte, in denen diese Kreise einander schneiden, sind einerlei mit denen, in welchen die Knotenlinie die Kugelfläche trifft, sind also die von der Sonne aus auf die Fläche projicirten Knoten oder die sphärischen Oerter der Knoten. Sei K der sphärische Ort des aufsteigenden Knotens. Trifft nun die in der Grundebene von der Sonne aus gezogene Grundlinie die Fläche im Punkte B des Kreises BC, so wird durch den Bogen BK die Länge des aufsteigenden Knotens vorgestellt. Die Neigung der Bahn aber ist der Winkel CKL.

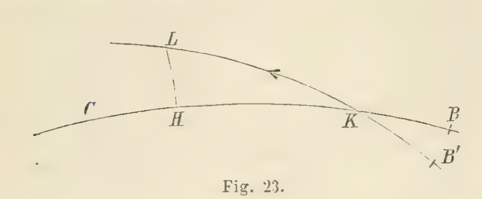


Fig. 23.

Sei endlich der Punkt L des Kreises KL der sphärische Ort des Planeten, so ist das von L auf den Kreis AC gefällte sphärische Perpendikel LH die Breite, und der Bogen BH die Länge des Planeten in der Grundebene. Die Längen in der Bahn werden von einem Punkte B' der letzteren an gerechnet, der eben so weit, als B, hinter K zurückliegt. Die Länge des Knotens, mag sie in der Bahn, oder in der Grundebene gezählt werden, ist hiernach von gleicher Grösse. Die Länge des Planeten in der Bahn aber ist der Bogen

$$B'L = BK + KL \text{ .*)}$$

Sind nun nächst den obigen vier Stücken a oder n, ε, e und ω (§. 45), von denen die Längen ε und ω jetzt von B' an gerechnet werden, noch die Länge des aufsteigenden Knotens

$$BK = B'K = \vartheta$$

und die Neigung

$$CKL = \iota$$

*) [Da der Bogen KL auch wohl das Argument der Breite genannt wird, so erhält man die Länge in der Bahn als die Summe der Knotenlänge und des Arguments der Breite.]

gegeben, so sieht man leicht, wie daraus für eine beliebige, von der Epoche an gerechnete, Zeit t die Länge BH des Planeten in der Grundebene und seine Breite HL berechnet werden können. Zuerst hat man nämlich die wahre Länge in der Bahn (§. 45)

$$B'L = l = \varepsilon + nt + 2e \sin(\varepsilon + nt - \omega) \ .$$

Hieraus folgt $KL = l - \vartheta$, und durch die Formeln für das bei H rechtwinkelige sphärische Dreieck KHL:

$$\tan KH = \tan(l - \vartheta) \cos \iota \ ,$$
$$\sin HL = \sin(l - \vartheta) \sin \iota \ ,$$

ergeben sich die Bögen KH und HL, von denen, wenn $\iota < 90^\circ$ ist, KH mit KL in einerlei Quadranten fällt, HL aber positiv oder negativ ist, und daher L nördlich oder südlich von BC absteht, je nachdem $l - \vartheta$ kleiner oder grösser als 180° ist. Hiermit aber sind die Länge in der Grundebene, $BH = \vartheta + KH$, und die Breite HL gefunden.

Was noch den Radius Vector anlangt, so wird dieser, wie im Vorigen, nach der Formel

$$r = a\,[1 - e \cos(\varepsilon + nt - \omega)]$$

berechnet; und hiermit hat man Alles, was zur Bestimmung des Orts des Planeten im Raume gehört. Die sechs zu dieser Bestimmung nöthigen Stücke: *die mittlere Entfernung* a und *die mittlere Länge in der Epoche* ε, *die Excentricität* e und *die Länge des Perihels* ω, *die Neigung* ι und *die Länge des aufsteigenden Knoten* ϑ, nennt man die sechs Elemente der Planetenbewegung.

§. 48. Da die gegenseitigen Neigungen der Bahnebenen nur wenige Grade enthalten, so können wir die Grundebene immer dergestalt wählen, dass die Neigungen der Bahnebenen gegen diese Ebene ebenfalls sehr gering sind. Indem wir uns alsdann gestatten, von den Neigungen eben so, wie früher von den Excentricitäten, bloss die erste Potenz beizubehalten und daher statt $\sin \iota$ und $\cos \iota$ resp. ι und 1 zu setzen, wird zufolge der obigen Formeln:

$$\tan KH = \tan(l - \vartheta), \quad \text{also} \quad KH = l - \vartheta \ ,$$

und die Länge in der Grundebene

$$BH = \vartheta + KH = l = \text{der Länge in der Bahn}$$
$$= \varepsilon + nt + 2e \sin(\varepsilon + nt - \omega) \ .$$

Die Breite aber wird:

$$HL = \iota \sin(l - \vartheta) = \iota \sin(\varepsilon + nt - \vartheta) \ ,$$

weil auch noch das Produkt ιe weggelassen werden kann.

Anmerkung. Wenn aus der Länge in der Bahn die Länge in der Grundebene gefunden werden soll, so wird es wegen der Kleinheit von ι auch bei einer schärferen Rechnung immer hinreichen, von ι nur noch die zweite Potenz zu berücksichtigen. — Man setze die Länge BH in der Grundebene gleich L, so ist

$$\operatorname{tang}(L-\vartheta) = \cos\iota \operatorname{tang}(l-\vartheta) ,$$

folglich

$$\operatorname{tang}(L-l) = \frac{\operatorname{tang}(L-\vartheta) - \operatorname{tang}(l-\vartheta)}{1+\operatorname{tang}(L-\vartheta)\operatorname{tang}(l-\vartheta)}$$

$$= -\frac{(1-\cos\iota)\operatorname{tang}(l-\vartheta)}{1+\cos\iota\operatorname{tang}(l-\vartheta)^2} ,$$

und daher, wenn man bei der zweiten Potenz von ι stehen bleibt:

$$L-l = -\frac{2\sin\tfrac{1}{2}\iota^2 \operatorname{tang}(l-\vartheta)}{1+\operatorname{tang}(l-\vartheta)^2}$$

$$= -\sin\tfrac{1}{2}\iota^2 \sin 2(l-\vartheta) ,$$

wo die zweite Seite der Gleichung noch durch $\sin 1''$ dividirt werden muss, wenn $L-l$ in Secunden ausgedrückt angenommen wird. Alsdann ist mithin

$$L = l - \frac{\sin\tfrac{1}{2}\iota^2 \sin 2(l-\vartheta)}{\sin 1''} .$$

Das Glied, welches hiernach zu l hinzugefügt werden muss, um l in L zu verwandeln, wird die Reduction auf die Grundebene genannt.

So ist z. B. die Neigung der Mondsbahn gegen die Ekliptik

$$\iota = 5^\circ\, 8'\, 47''9 .$$

Mit diesem Werthe von ι findet sich $\frac{\sin\frac{1}{2}\iota^2}{\sin 1''} = 415''8$, und es ist daher die Länge des Mondes in der Ekliptik

$$L = l - 6'\, 55''8 \sin 2(l-\vartheta) ,$$

wenn l die Länge desselben in seiner Bahn, und ϑ die Länge des aufsteigenden Knotens dieser Bahn in der Ekliptik bezeichnet.

§. 49. Theils einiger im Folgenden vorkommender Fälle willen, wo die bisher nur *näherungsweise* entwickelten Formeln für die elliptische Bewegung nicht ausreichen, theils wegen der Wichtigkeit und des Anziehenden, welches der Gegenstand an sich hat, sollen am Schlusse dieses Kapitels die vorzüglichsten, die *vollkommene elliptische Bewegung* betreffenden, Formeln und Sätze noch mitgetheilt werden.

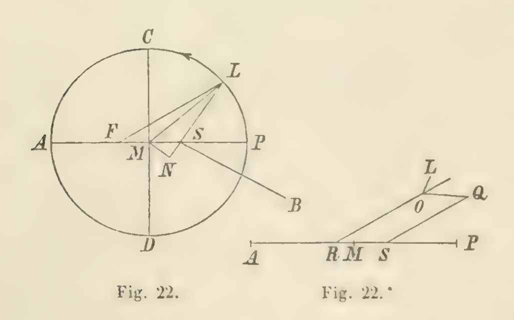


Fig. 22. Fig. 22.*

Im Dreieck FSL (Fig. 22) hat man

$$FL^2 = FS^2 + SL^2 - 2\,FS \,.\, SL \cos FSL .$$

Es ist aber

$$FSL = 180^0 - v\,, \qquad FS = 2ae\,, \qquad SL = r\,,$$

und nach der in §. 40 bemerkten Eigenschaft der Brennpunkte,

$$FL = 2a - r\ .$$

Hiermit wird die voranstehende Gleichung:

$$(2a - r)^2 = 4a^2e^2 + r^2 + 4aer \cos v\ ,$$

und nach gehöriger Reduction:

$$(1^*) \qquad a(1 - e^2) = r + er \cos v\ ,$$

oder, wenn man

$$(2) \qquad a(1 - e^2) = p$$

setzt:

$$(1) \qquad \frac{p}{r} = 1 + e \cos v\ ,$$

die Polargleichung der Ellipse, wenn der eine Brennpunkt zum Pol und die grosse Axe zur Grundlinie genommen wird; nur muss dabei $e < 1$ sein. Für $e = 1$ ist es die Polargleichung der Parabel, und für $e > 1$ die der Hyperbel, also in jedem Falle die Polargleichung eines Kegelschnitts. Die Constante $2p$ heisst der Parameter des Kegelschnitts. Rechnet man dieselbe stets positiv, so ist nach (2) die Constante a bei der Ellipse positiv, bei der Parabel unendlich gross und bei der Hyperbel negativ.

§. 50. Aufgabe. Aus der wahren Anomalie $v = PSL$ (Fig. 24) die Zeit t, in welcher sie vom Planeten beschrieben wird, zu finden.

Auflösung. Es verhält sich t zur Umlaufszeit U, wie das Flächenstück SPL zur Fläche der ganzen Ellipse. Um das letztere Verhältniss zu berechnen, bedient man sich des sogenannten excentrischen Kreises, eines Kreises, welcher in der Ebene der Ellipse über der grossen Axe AP, als Durchmesser, beschrieben wird. Ein von L auf AP gefälltes Perpendikel LI treffe den Kreis in K. Der Winkel PMK am Mittelpunkte M heisst die excentrische Anomalie und werde mit E bezeichnet; es wird dann sein

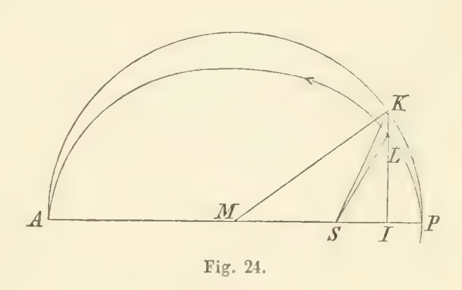


Fig. 24.

$$SI = MI - MS\ ,$$

d. i.

(3) $$r \cos v = a \cos E - ae \; .$$

Substituirt man hierin für $r \cos v$ seinen aus der Polargleichung (1*) fliessenden Werth, so kommt nach gehöriger Reduction:

(4) $$r = a - ae \cos E \; .$$

Diese zwei Gleichungen, das eine Mal addirt, das andere Mal von einander subtrahirt, geben:

$$r\,(1 + \cos v) = a\,(1 - e)\,(1 + \cos E) \; ,$$
$$r\,(1 - \cos v) = a\,(1 + e)\,(1 - \cos E) \; .$$

Aus letzteren beiden Gleichungen aber fliesst, wenn man sie das eine Mal in einander dividirt und das andere Mal mit einander multiplicirt, und dann jedes Mal die Wurzel auszieht:

(5) $$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}E \; ,$$

(6) $$r \sin v = a \sqrt{1 - e^2} \sin E \; .$$

Aus (6) folgt die bekannte Proportionalität zwischen den Ordinaten einer Ellipse und eines um ihre grosse (oder kleine) Axe beschriebenen Kreises; denn es verhält sich nach (6)

$$r \sin v : a \sin E = \sqrt{1 - e^2} : 1 \; ,$$

d. i. IL zu IK, wie die kleine Axe zur grossen (§. 40). Denkt man sich daher den Kreis um AP gedreht, bis die rechtwinklige Projection seines auf AP perpendikularen Durchmessers auf die unbewegt bleibende Ebene der Ellipse mit der kleinen Axe der letzteren identisch wird, so wird L die Projection von K, und eben so jeder andere Punkt der Ellipse die Projection eines Punktes des Kreises, mithin die ganze Ellipsenfläche, welche G heisse, die Projection der ganzen Kreisfläche $= \pi a^2$, so wie der Theil SPL der ersteren die Projection des Theiles SPK der letzteren. Da sich nun je zwei Theile einer Ebene wie ihre Projectionen auf eine andere Ebene verhalten, so wird sein

$$U : t = G : SPL = \pi a^2 : SPK \; .$$

Es ist aber

$$SPK = MPK - MSK = \tfrac{1}{2} MP \,.\, PK - \tfrac{1}{2} MS \,.\, IK$$
$$= \tfrac{1}{2}a \,.\, aE - \tfrac{1}{2}ae \,.\, a \sin E \; ,$$

folglich

$$U : t = 2\pi : E - e \sin E \; ,$$

oder weil $2\pi : U = n$,

(7) $$nt = E - e \sin E \; .$$

Aus v oder der wahren Anomalie wird demnach t gefunden, wenn man zuerst aus v nach (5) die excentrische Anomalie E, und hierauf aus E nach (7) die mittlere Anomalie nt (§. 43) berechnet, deren Division mit n das gesuchte t giebt.

§. 51. Zusätze. *a)* Soll aus t oder der damit proportionalen mittleren Anomalie die wahre gefunden werden, so hat man den umgekehrten Weg einzuschlagen, wobei jedoch die Berechnung von E aus nt wegen der transscendenten Form der Gleichung (7) nur indirect sich bewerkstelligen lässt (Kepler'sches Problem). Statt dessen kann man v, so wie r, durch nt auch vermittelst Reihen ausdrücken, welche nach den Potenzen von e fortgehen, und bei den Planeten, wo e ein kleiner Bruch ist, schnell convergiren werden. Die Anfänge dieser Reihen haben wir bereits kennen gelernt (§. 43, Gl. (1) u. (2)). Mit Hülfe der jetzt erhaltenen strengen Formeln muss es möglich sein, jene Anfänge so weit, als man will, fortzusetzen.

Ohne diese Entwickelungen hier anstellen zu wollen, bemerke ich nur, dass man zu dem Anfange der Reihe für r, mittelst der Polargleichung der Ellipse allein, das von e^2 abhängige Glied noch finden kann. Es folgt nämlich aus (1*) bis auf die zweite Potenz von e genau:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos v} = a(1 - e^2)(1 - e\cos v + e^2\cos v^2)$$
$$= a(1 - e\cos v - e^2\sin v^2).$$

Es war aber, wenn man die mittlere Anomalie

$$nt = \alpha \quad \text{und} \quad 2\sin\alpha = x$$

setzt, bis zur ersten Potenz von e genau (§. 43):

$$v = \alpha + ex\ .$$

Mithin ist, wie vorhin, bis zur zweiten genau:

$$r = a\left[1 - e\cos(\alpha + ex) - e^2\sin\alpha^2\right]\ ,$$

worin für $\cos(\alpha + ex)$ sein bis zur ersten Potenz genauer Werth

$$= \cos\alpha - ex\sin\alpha = \cos\alpha - 2e\sin\alpha^2$$

zu substituiren ist. Dies giebt:

$$r = a(1 - e\cos\alpha + e^2\sin\alpha^2)$$
$$= a(1 + \tfrac{1}{2}e^2 - e\cos\alpha - \tfrac{1}{2}e^2\cos 2\alpha)\ .*)$$

*) Ueberhaupt lassen sich r und v durch Reihen darstellen, die nach den Cosinus und Sinus der Vielfachen von α fortlaufen, und die, wenn sie bis zur n-ten Potenz von e genau sein sollen, noch die Cosinus und Sinus der n-fachen von α enthalten müssen. — Bis zur dritten Potenz genau sind diese Reihen:

b) Bei der geneigten Lage, die wir im Vorigen der Ebene des excentrischen Kreises gegen die Ebene der Ellipse gaben, ist das constante Verhältniss zwischen irgend einem Theile der ersteren Ebene und seiner Projection auf die letztere,

$$= IK : IL = 1 : \sqrt{1 - e^2} = \sqrt{a} : \sqrt{p} \ ,$$

nach (2). In demselben Verhältnisse steht mithin auch die Fläche des excentrischen Kreises selbst, oder πa^2, zur Ellipsenfläche; letztere ist daher

$$= \pi a \sqrt{ap} \ .$$

§. 52. Suchen wir jetzt die Geschwindigkeiten der verschiedenen veränderlichen Grössen zu bestimmen, welche bei der Bewegung des Planeten in Betracht kommen.

Die Flächengeschwindigkeit $\frac{1}{2}c$ oder die vom Radius Vector in der Zeiteinheit überstrichene Fläche ist nach Kepler's zweitem Gesetze constant und daher gleich der Fläche der Ellipse, dividirt durch die Umlaufszeit, also

$$= \frac{\pi a \sqrt{ap}}{U} \ ,$$

d. i. (§. 44)

$$(8) \qquad c = n a^{\frac{3}{2}} \sqrt{p} = k \sqrt{p} \ .$$

Zufolge des dritten Kepler'schen Gesetzes ist demnach *die Flächengeschwindigkeit von einer Planetenbahn zur anderen der Quadratwurzel aus dem Parameter proportional.*

Nach §. 35 ist allgemein

$$c = rrv' \ .$$

Dies giebt, in Verbindung mit dem jetzt erhaltenen Werthe von c, die Geschwindigkeit der wahren Anomalie

$$(9) \qquad v' = \frac{k\sqrt{p}}{rr} \ .$$

Da ferner von $\frac{1}{r}$ und $\cos v$ nach §. 11 und §. 14, Zus. die Geschwindigkeiten resp.

$$= -\frac{r'}{rr} \qquad \text{und} \qquad = -v' \sin v$$

sind, so folgt aus der zwischen r und v bestehenden Gleichung 1 die Gleichung zwischen den Geschwindigkeiten von r und v:

$$r = a\left(1 + \tfrac{1}{2}e^2 - (e - \tfrac{3}{8}e^3) \cos \alpha - \tfrac{1}{2}e^2 \cos 2\alpha - \tfrac{3}{8}e^3 \cos 3\alpha\right) \ ,$$

$$v = \alpha + (2e - \tfrac{1}{4}e^3) \sin \alpha + \tfrac{5}{4}e^2 \sin 2\alpha + \tfrac{13}{12}e^3 \sin 3\alpha \ ,$$

[wo also der Werth der Differenz $v - \alpha$ die Mittelpunktsgleichung giebt].

$$\frac{pr'}{rr} = e\,v' \sin v \ .$$

Hierin für v' seinen Werth aus (9) substituirt, erhält man die Geschwindigkeit des Radius Vector

$$(10) \qquad r' = \frac{ke}{\sqrt{p}} \sin v \ .$$

Mit (9) und (10) ergiebt sich endlich das Quadrat der Geschwindigkeit in der Bahn (§. 35)

$$u^2 = r^2 v'^2 + r'^2 = \frac{k^2}{p r^2} (p^2 + e^2 r^2 \sin v^2) \ .$$

Nach (1) ist aber

$$e r \cos v = p - r \ ,$$

folglich

$$p^2 + e^2 r^2 \sin v^2 = p^2 + e^2 r^2 - (p-r)^2 = 2pr - (1-e^2) r^2$$
$$= pr \left(2 - \frac{r}{a}\right)$$

und

$$(11) \qquad u^2 = \frac{k^2}{a} \cdot \frac{2a - r}{r} = k^2 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \ .$$

Das Quadrat der Geschwindigkeit eines Planeten ist demnach umgekehrt dem Abstande r des Planeten von der Sonne und direct seinem Abstande $2a - r$ vom anderen Brennpunkte proportional.

§. 53. Aufgabe. Die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne und ein Tag mittlerer Zeit als Einheiten des Raumes und der Zeit genommen, seien für einen gegebenen Zeitpunkt T der Radius Vector r, die Länge L in der Grundebene und die Breite b eines Planeten, so wie die Geschwindigkeiten r', L', b', mit denen sich r, L, b zu derselben Zeit ändern, gegeben. Man soll aus diesen sechs Stücken die sechs Elemente a, ε, e, ω, ι und ϑ der Bewegung des Planeten bestimmen.

Auflösung. 1) In dem bei H rechtwinkligen sphärischen Dreieck KHL (Fig. 23) ist (§. 47):

$KH = L - \vartheta$, $\quad HL = b$,

$KL = l - \vartheta$, $\quad HKL = \iota$,

und man hat daher

Fig. 23.

$$(\alpha) \qquad \tang b = \tang \iota \sin (L - \vartheta) \ ,$$

folglich*)

$$\frac{b'}{\cos b^2} = \text{tang}\,\iota\,.\,L'\cos(L-\vartheta)\ ,$$

und nach Elimination von tang ι

$$\text{tang}\,(L-\vartheta) = \frac{L'}{b'}\sin b\cos b\ .$$

Hiermit ergeben sich für $L-\vartheta$ zwei um 180° von einander verschiedene Werthe, von denen, wegen (α), der in den ersten oder der in den zweiten Halbkreis fallende zu nehmen ist, je nachdem b positiv oder negativ (nördlich oder südlich) ist. Die Knotenlänge ϑ findet sich alsdann durch die Differenz $L-(L-\vartheta)$, und die immer positiv gerechnete Neigung ι durch die Formel

$$\text{cotg}\,\iota = \text{cotg}\,b\sin(L-\vartheta)\ .$$

2) Im Dreieck KHL ist ferner

$$\text{tang}\,(L-\vartheta) = \cos\iota\,\text{tang}\,(l-\vartheta)\ ,$$

folglich

$$\frac{L'}{\cos(L-\vartheta)^2} = \frac{l'\cos\iota}{\cos(l-\vartheta)^2}\ ,$$

oder

$$L'\cos b^2 = l'\cos\iota\ ,$$

wegen der Relation

$$\cos(l-\vartheta) = \cos b\cos(L-\vartheta)\ .$$

Somit hat man zur Bestimmung der Länge l in der Bahn und der Geschwindigkeit l' dieser Länge die Formeln:

$$\text{cotg}\,(l-\vartheta) = \cos\iota\,\text{cotg}\,(L-\vartheta)$$

und

$$l' = \frac{L'\cos b^2}{\cos\iota}\ ,$$

wobei, wie schon bemerkt (§. 47), $l-\vartheta$ mit $L-\vartheta$ in einen und denselben Quadranten fällt.

3) Mit l' und den gegebenen r und r' findet sich das Quadrat der Geschwindigkeit in der Bahn (§. 35)

$$u^2 = r^2 l'^2 + r'^2\ .$$

Damit wird nach (11) die halbe grosse Axe

$$a = 1 : \left(\frac{2}{r} - \frac{u^2}{k^2}\right)\ , \quad \text{wo}\quad k = 0{\cdot}017202\ \text{(§. 44)}\ .$$

Merkwürdiger Weise ist also *die Länge der grossen Axe schon*

*) weil von tang b die Geschwindigkeit $= b' : \cos b^2$ ist. Denn setzt man tang $b = x$, so ist $\sin b = x\cos b$, mithin

$$b'\cos b = x'\cos b - xb'\sin b\ ,$$

woraus nach leichter Reduction der eben bemerkte Werth von x' hervorgeht.

durch den Radius Vector und die Grösse der Geschwindigkeit des Planeten bestimmt, und bleibt dieselbe, welches auch die Richtung dieser Geschwindigkeit sein mag.

4) Mit l' und a ergeben sich nach (9) und (2) der halbe Parameter und die Excentricität

$$p = \frac{r^4 l'^2}{k^2} \quad \text{und} \quad e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}}\ ;$$

denn wegen $v = l - \omega$ ist $v' = l'$.

Hiermit berechne man v nach der aus (1) fliessenden Formel

$$\cos v = \frac{p - r}{e r}\ ,$$

wo v im ersten oder im zweiten Halbkreise zu nehmen ist, je nachdem r' positiv oder negativ ist; denn nach (10) muss $\sin v$ mit r' einerlei Zeichen haben. Auch kann man sich der Formel (10) zugleich als Controle bei der Berechnung von v bedienen. — Die Länge des Perihels findet sich alsdann:

$$\omega = l - v\ .$$

5) Mit e und v berechne man nach (5) und (7) die mittlere Anomalie und addire ω zu derselben. Dies giebt die mittlere Länge λ zur Zeit T, woraus sich ε oder die mittlere Länge in der Epoche findet, wenn man die seit der Epoche bis T verstrichene Zeit mit $n = k a^{-\frac{3}{2}}$ multiplicirt und dieses Product von λ abzieht.

Zusatz. Wendet man die voranstehende Aufgabe auf keinen fingirten Fall, sondern auf die Planeten selbst an, so wird man, da diese sich in Ellipsen bewegen, die grosse Axe $2a$ immer positiv (§. 49), also

$$r u^2 < 2 k^2$$

erhalten. Wollte man dagegen die sechs Stücke r, L, b, r', L', b' willkürlich gegeben sein lassen, so könnte sich $r u^2$ eben so gut auch gleich oder grösser als $2k^2$ finden. Man sieht aber bald, dass sich auch diesen letzteren Fällen die Lösung der Aufgabe anpassen lässt, sobald man nur die allgemeinere Voraussetzung macht, *dass sich die Planeten in Kegelschnitten um die Sonne, als den einen Brennpunkt, jeder mit constanter Flächengeschwindigkeit, bewegen, und dass diese Geschwindigkeit von einer Bahn zur anderen der Quadratwurzel aus dem Parameter proportional ist.* Letzteres, oder die Formel (§. 52)

$$c = k\sqrt{p}\ ,$$

ist nämlich dem dritten Kepler'schen Gesetze zu substituiren, da bei einer parabolischen oder einer hyperbolischen Bahn von einer Umlaufszeit — folglich auch von einer mittleren Bewegung und einer mittleren Länge — nicht die Rede sein kann.

Dieses vorausgesetzt, ist die Bahn selbst eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem a positiv, unendlich gross, oder negativ ist, je nachdem sich also ru^2 kleiner, gleich, oder grösser als $2k^2$ findet. Die Lage und die Dimensionen der Bahn, also die fünf Elemente a, e, ω, ι, ϑ, werden in jedem Falle nach denselben Formeln, wie vorhin, bestimmt. Und wenn auch die Bewegung in der somit gefundenen Bahn, sobald diese eine Parabel oder eine Hyperbel ist, durchaus nicht auf dieselbe Weise, wie bei der Ellipse, berechnet werden kann, so erhellet doch wenigstens die Möglichkeit einer solchen Berechnung aus den gegebenen Stücken. Denn dadurch, dass der Planet zur Zeit T den durch r, L und b bestimmten Ort einnimmt, und dass sein Radius Vector in jeder Zeiteinheit eine Fläche gleich $\frac{1}{2}k\sqrt{p}$ überstreicht, ist sein Ort in der Bahn für jeden anderen Zeitpunkt, und damit seine Bewegung, vollkommen bestimmt.

Wie daher auch durch die sechs Stücke r, L, ..., b' der Ort eines Planeten und die Grösse und Richtung seiner Geschwindigkeit für einen gegebenen Zeitpunkt bestimmt sein mögen, so lässt sich daraus immer, und nur auf Eine Weise, eine nach den letztgedachten Gesetzen in einem Kegelschnitte vor sich gehende Bewegung ableiten.

Zweites Kapitel.

Bestimmung der Kräfte, durch welche die elliptische Bewegung der Planeten erzeugt wird.

---

§. 54. Da sich ein Kreis als eine Ellipse ansehen lässt, deren Brennpunkte mit dem Mittelpunkte zusammenfallen, so kann nach dem ersten der drei Kepler'schen Gesetze ein Planet auch einen Kreis beschreiben, in dessen Mittelpunkte die Sonne steht. Und weil bei der Bewegung eines Punktes in einem Kreise die Fläche, welche der vom Mittelpunkte aus gezogene Radius Vector überstreicht, dem vom Punkte beschriebenen Bogen proportional ist, so wird zufolge des zweiten Kepler'schen Gesetzes der Planet bei einer kreisförmigen Bewegung der Zeit proportionale Bögen beschreiben, d. h. gleichförmig im Kreise fortgehen.

Die Kräfte, durch welche diese in der Natur möglichen, und von der Wirklichkeit wegen der Kleinheit der Excentricitäten nicht sehr

abweichenden Kreisbewegungen hervorgebracht werden, ergeben sich unmittelbar aus §. 22. Es ist dann nämlich die auf jeden Planeten wirkende Kraft nach dem Mittelpunkte seines Kreises, also nach der Sonne, gerichtet und gleich nna, wenn a die Entfernung des Planeten von der Sonne und n seine constante Winkelgeschwindigkeit bezeichnet. Nach dem dritten Kepler'schen Gesetze ist aber nna^3 gleich dem von einem Planeten zum anderen constanten kk (§. 44). Damit wird die Kraft

$$= kk : aa \ ,$$

so dass unter der Hypothese gleichförmiger Kreisbewegung jeder Planet nach der Sonne hin von einer Kraft getrieben wird, die dem Quadrate seiner Entfernung von der Sonne umgekehrt proportional ist.

§. 55. Untersuchen wir jetzt, ob und wie sich das im Vorhergehenden unter der möglich einfachsten Annahme erhaltene Resultat im Falle der Natur modificirt, wo die Bahnen der Planeten Ellipsen sind. Wir wollen deshalb die allgemeinen Formeln (D) in §. 36 für die Kräfte T und V bei einer durch ihre Polarcoordinaten gegebenen Bewegung zu Hülfe nehmen, und sie mit den zu Ende des vorigen Kapitels entwickelten strengen Formeln der elliptischen Bewegung in Verbindung bringen.

Weil die Flächengeschwindigkeit des Radius r constant ist (§. 52), so wird $V = 0$, d. h. die gesuchte Kraft wirkt in der Richtung von r (§. 37, a) und reducirt sich auf

$$T = r'' - r v'^2$$

allein, wo v' eben so, wie l' in §. 36, die Winkelgeschwindigkeit von r bedeutet. Nun ist nach den Formeln (9) und (10) in §. 52:

$$v' = \frac{k\sqrt{p}}{rr} \quad \text{und} \quad r' = \frac{ke}{\sqrt{p}} \sin v \ ,$$

folglich

$$r'' = \frac{ke}{\sqrt{p}} v' \cos v = \frac{kke}{rr} \cos v = \frac{kk(p-r)}{r^3} \ ;$$

weil nach (1) in §. 49

$$e \cos v = \frac{p-r}{r}$$

ist. Mit diesen Werthen für r'' und v' ergiebt sich aber:

$$T = \frac{kk(p-r)}{r^3} - \frac{kkp}{r^3} = -\frac{kk}{rr} = -\frac{n^2a^3}{rr} = -\frac{cc}{prr} \ .$$

Wir schliessen hieraus:

1) *dass die einen Planeten treibende Kraft stets nach der Sonne zu gerichtet ist*, — nicht abwärts von derselben, wegen des negativen Werthes von T; —

2) *dass diese Kraft für verschiedene Entfernungen eines und desselben Planeten von der Sonne dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist;*

3) *dass aber auch*, weil das Product $n^2 a^3$ oder kk für alle Planeten denselben Werth hat, *die Kräfte, mit denen verschiedene Planeten nach der Sonne getrieben werden, im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen von der Sonne stehen, und dass daher für zwei gleich weit von der Sonne entfernte Planeten auch diese Kräfte einander gleich sind.**)

Zusätze. *a*) Weil die Polargleichung der Curve, aus welcher der Werth von T hergeleitet worden, nicht bloss der Ellipse, sondern auch der Parabel und der Hyperbel angehört (§. 49), so müssen die jetzt gemachten drei Schlüsse auch dann gelten, wenn sich die Planeten überhaupt in Kegelschnitten nach den in §. 53. Zus. ausgesprochenen Gesetzen bewegen.

b) Aber auch umgekehrt können wir behaupten: *Werden die Planeten nach der Sonne von Kräften getrieben, die sich umgekehrt wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Sonne verhalten, so müssen sie mit constanten Flächengeschwindigkeiten um die Sonne, als den einen Brennpunkt, Kegelschnitte beschreiben, deren Parameter den Quadraten der Flächengeschwindigkeiten proportional sind.*

Um dieses zu beweisen, wollen wir setzen, dass ein Planet zu der gegebenen Zeit T den gegebenen Ort L einnehme und die ihrer Grösse und Richtung nach gegebene Geschwindigkeit u habe. Mit diesen Stücken und mit dem Gesetze der auf ihn wirkenden Kraft ist seine Bewegung vollkommen bestimmt (§. 25). Kennt man daher eine Bewegung, bei welcher der Planet zur Zeit T den Ort L und die Geschwindigkeit u hat, und wobei die ihn treibende Kraft stets nach der Sonne gerichtet und gleich $kk : rr$ ist, so kann es nicht noch eine zweite Bewegung geben, bei welcher die Umstände zur Zeit T dieselben wären und die Kraft nach dem nämlichen Gesetze wirkte. Nun wissen wir aus §. 53, Zus., dass, welches auch zur Zeit T der Ort L und die Geschwindigkeit u sein mögen, sich immer Eine und nicht mehr als eine, diese Bedingungen zur Zeit T erfüllende und nach den daselbst bemerkten Gesetzen sich richtende, Bewegung in einem Kegelschnitte angeben lässt. Wir wissen ferner, dass die aus dieser Bewegung zu folgernde Kraft nach der Sonne gerichtet und gleich $kk : rr$ ist. Mithin kann der Planet unter dem Einflusse einer

---

*) Man vergleiche die Abhandlung: *Elementare Herleitung des Newton'schen Gesetzes aus den Kepler'schen Gesetzen der Planetenbewegung*, welche in diesem Bande abgedruckt ist. A. d. H.

solchen Kraft keine andere, als die durch die gegebenen Grössen T, L, u und k vollkommen bestimmte, Bewegung in einem Kegelschnitte befolgen.

§. 56. Einige Planeten werden auf ihren Wegen um die Sonne von kleinen Nebenplaneten, auch Monde oder Trabanten genannt, begleitet. Diese richten sich bei ihren Bewegungen um ihre Hauptplaneten gleichfalls nach den Kepler'schen Gesetzen. Denn jeder von ihnen beschreibt um seinen Planeten eine Ellipse, in deren einem Brennpunkte der letztere steht; die von dem Planeten nach dem Trabanten gezogene Gerade überstreicht der Zeit proportionale Flächen, und in den Fällen, wo mehrere Trabanten um denselben Planeten laufen, verhalten sich die Quadrate der Umlaufszeiten, wie die Würfel der mittleren Entfernungen. Uebrigens sind die Bahnen der Trabanten, gleich denen der Planeten selbst, nur sehr wenig excentrisch, und auch ihre Neigungen gegen die Bahnen ihrer Planeten scheinen, mit Ausnahme des Systems der Uranustrabanten*), nicht beträchtlich zu sein. Die Entfernung jedes Trabanten von seinem Planeten ist aber durchweg gegen die Entfernung des letzteren von der Sonne eine sehr geringe Grösse.**)

§. 57. Die Sonne als ruhend angenommen, ist die absolute Bewegung eines Trabanten aus seiner relativen Bewegung um seinen Hauptplaneten und aus der Bewegung des letzteren um die Sonne zusammengesetzt (§. 6). Es ist daher auch die auf einen Trabanten wirkende Kraft als aus zwei Kräften zusammengesetzt zu betrachten, von denen die *eine* die Bewegung um den Hauptplaneten erzeugt, die *andere* aber der Kraft gleich und parallel ist, welche die Bewegung des Planeten um die Sonne hervorbringt. — Ist die Sonne nicht in Ruhe, so muss nach demselben Princip auf den Planeten sowohl, als auf seinen Trabanten, eine dritte Kraft wirken, die derjenigen, welche die Bewegung der Sonne erzeugt, gleich und parallel ist. —

Da nun die Trabanten in den Bewegungen um ihre Planeten die nämlichen Gesetze, wie die Planeten in ihren Bewegungen um die Sonne, befolgen, so wird nach denselben Schlüssen, welche wir

*) Der Neptunsmond ist gleich den Uranustrabanten rückläufig, da seine Neigung gegen die Ekliptik 145° (beim Uranus 98°) beträgt. A. d. H.

**) Die mittlere Entfernung des Erdenmondes von der Erde z. B. ist der 399-ste Theil, — des vierten Jupitermondes vom Jupiter der 413-te, — des siebenten Saturnmondes vom Saturn der 395-ste — und des sechsten Uranusmondes vom Uranus der 1167-ste Theil der mittleren Entfernung des jedesmaligen Hauptplaneten von der Sonne.

in §. 55 in Bezug auf die Planetenbewegungen machten, die erstere jener zwei Kräfte nach dem Hauptplaneten gerichtet, und sowohl für einen und denselben Trabanten, als auch von einem zum anderen, wenn sich mehrere um denselben Planeten bewegen, dem Quadrate der Entfernung vom Planeten umgekehrt proportional sein. Da ferner, wegen der immer sehr geringen Entfernungen der Trabanten von ihren Planeten gegen die Entfernungen der letzteren von der Sonne, die zwei von einem Trabanten und seinem Planeten nach der Sonne gezogenen Linien, sowohl ihrer Richtung, als ihrer Grösse nach, nur wenig von einander verschieden sind, so wird die letztere jener zwei Kräfte stets nahe nach der Sonne gerichtet sein, und sich nahe umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung des Trabanten von der Sonne verhalten, und dieses sowohl für einen und denselben Trabanten, als auch von einem Trabanten zu irgend einem anderen, oder auch zu irgend einem Planeten. In Betracht mehrerer kleiner Abweichungen von den Kepler'schen Gesetzen, die insbesondere beim Laufe des Mondes um die Erde sich zeigen, könnte es auch vielleicht sein, dass sich die auf einen Trabanten wirkende Kraft in zwei Kräfte zerlegen liesse, von denen die eine nach dem Hauptplaneten, die andere nach der Sonne gerichtet wäre, und welche die angegebenen Verhältnisse vollkommen genau befolgten.

Drittes Kapitel.

Von der allgemeinen Anziehungskraft.

§. 58. Wie wir im vorigen Kapitel erkannt haben, werden die Bewegungen der Planeten und ihrer Trabanten um die Sonne durch Kräfte hervorgebracht, die — wenigstens bei den Planeten — stets genau nach der Sonne gerichtet sind. Wir können hiernach nicht umhin, die Sonne selbst als die Ursache dieser Bewegungen anzusehen, so dass, wenn die Sonne vernichtet würde, damit auch die Bewegungen der Planeten und ihrer Trabanten um den von der Sonne eingenommenen Punkt aufgehoben würden. Wir legen daher der Sonne eine anziehende Kraft bei, die sich auf alle sie umkreisenden Körper erstreckt, und welche in demselben Verhältniss abnimmt, in welchem das Quadrat der Entfernung des angezogenen Körpers zunimmt.

Und da nach demselben Gesetze, wie die Planeten nach der Sonne, so auch jeder Trabant nach seinem Planeten hingetrieben wird, so sind wir genöthigt, auch jedem Planeten, der von Trabanten begleitet wird, eine anziehende Kraft zuzuschreiben, welche im Verhältnisse des Quadrats der Entfernung abnimmt; und wir können hieraus der Analogie nach schliessen, dass auch die übrigen Planeten, um welche keine Trabanten laufen, anziehende Kräfte besitzen.

§. 59. Die anziehende Kraft der Planeten giebt sich noch durch eine andere Betrachtung zu erkennen, die von der Trabantenbewegung ganz unabhängig ist. — Man denke sich zwischen die Sonne S und einen Planeten P eine unbiegsame Stange von der Länge SP gebracht, und beide Körper an die Enden der Stange befestigt. Würde nun bloss P von S angezogen, wirkten also auf P nach der Richtung PS unausgesetzt sich wiederholende Stösse, so würde sich das System der beiden Körper, die nach ihrer Verbindung durch die Stange einen einzigen ausmachen, nicht durch eine äussere Veranlassung, sondern durch eine von dem Theile S des Systems selbst ausgehende Kraft, nach der Richtung PS bewegen, was gegen den Grundsatz in §. 15 streitet, dass ein ruhender Körper sich nicht von selbst in Bewegung setzen kann. Mithin muss auf S eine Kraft wirken, welche der Kraft auf P das Gleichgewicht hält und daher die Richtung SP hat, d. h. S wird hinwiederum von P angezogen.

Auf gleiche Art wird geschlossen, dass, weil jeder Trabant von seinem Hauptplaneten und von der Sonne angezogen wird, auch umgekehrt jeder Trabant seinen Planeten und die Sonne anzieht.

Ueberhaupt also kann bei zwei Körpern nie eine bloss einseitige Anziehung — und eben so wenig eine bloss einseitige Abstossung — stattfinden, sondern sie ist immer gegenseitig. Die beiden Kräfte aber, mit denen die Körper auf einander wirken, müssen, wenn die gegenseitige Entfernung der Körper unveränderlich gemacht wird, sich das Gleichgewicht halten.

§. 60. Im Bisherigen haben wir die Kräfte bloss nach den von ihnen erzeugten Geschwindigkeiten geschätzt. Nach dem Grundsatze in §. 17 sind wir hierzu ohne Weiteres nur dann berechtigt, wenn die in Betracht kommenden Kräfte an einem und demselben Körper angebracht sind; nicht aber mehr bei Vergleichung von Kräften, welche auf verschiedene Körper wirken, indem sonst, was doch nicht der Fall ist, je zwei Körper durch Kräfte, die nach der in §. 16 aus der Statik entlehnten Definition einander gleich sind, in gleiche Geschwindigkeit versetzt werden müssten. Indessen wird

man dadurch, dass man auch bei verschiedenen Körpern die Kräfte einfach den Geschwindigkeiten proportional setzt, nicht zu Fehlschlüssen verleitet werden, dafern man nur dessen immer eingedenk bleibt, dass unter dem Verhältnisse der Kräfte das Verhältniss der von ihnen erzeugten Geschwindigkeiten, nicht aber ihr statisches Verhältniss, gemeint ist.

Wenn es daher z. B. hiess, dass zwei gleich weit von der Sonne entfernte Planeten mit gleichen Kräften nach der Sonne getrieben werden, so sollte dieses eigentlich bloss ausdrücken, dass die beiden Planeten mit gleichen Geschwindigkeiten nach der Sonne zu fallen anfangen, ohne dass man damit behaupten wollte, dass die Kräfte, welche diese einander gleichen Geschwindigkeiten hervorbringen, auch statisch einander gleich, d. i. solche seien, die sich das Gleichgewicht halten können.

Anders verhält es sich bei der in §. 60 angestellten Betrachtung, nach der wir schon im Voraus wissen, dass die auf die Sonne und einen Planeten wirkenden Kräfte statisch einander gleich sind. Untersuchen wir dabei zuerst, was aus dem, obschon vor der Hand noch unbekannten, Verhältnisse zwischen den Geschwindigkeiten, welche diese zwei Kräfte der Sonne und dem Planeten mittheilen, auf die Beschaffenheit der beiden Körper selbst geschlossen werden kann.

§. 61. Um kurz auszudrücken, dass zwei Körper durch zwei statisch einander gleiche Kräfte in gleiche Geschwindigkeiten versetzt werden, sagt man, dass die beiden Körper gleiche Masse haben. Von einem Körper, welcher aus zwei, drei etc. an Masse einander gleichen Körpern zusammengesetzt ist, sagt man, dass seine Masse das Doppelte, Dreifache etc. der Masse jedes der einzelnen Körper ist; und somit ist klar, wie das Verhältniss der Massen zweier Körper immer durch Zahlen ausgedrückt werden kann.

Man denke sich jetzt ein System von m vollkommen frei beweglichen und hinsichtlich ihrer Massen einander gleichen Körpern. Jeder dieser Körper erhalte gleichzeitig einen Stoss, und alle diese Stosskräfte seien einander statisch gleich und ihre Richtungen einander parallel, so werden sich die m Körper in Parallellinien mit gleichen Geschwindigkeiten zu bewegen anfangen und folglich ihre gegenseitige Lage nicht ändern. Dasselbe wird daher noch geschehen, wenn die m Körper gleich vom Anfange an ihre Lage gegen einander nicht ändern können und mithin einen einzigen festen bilden, der nun, ohne sich zu drehen, nach derselben Richtung und mit derselben Geschwindigkeit, wie jeder einzelne, fortgehen wird. Alsdann aber

lässt sich nach einem bekannten Satze der Statik statt der m Kräfte eine einzige setzen, deren Richtung, parallel den Richtungen der m einzelnen, den Schwerpunkt der verbundenen m Körper trifft, und welche das m-fache (§. 16) jeder der m einzelnen Kräfte ist.

Wird demnach das Verhältniss der Kräfte in statischem Sinne oder nach den von ihnen einem und demselben Körper ertheilten Geschwindigkeiten geschätzt, so wird, um zwei Körper, deren Massen gleich 1 und gleich m sind, in gleiche Geschwindigkeit zu versetzen, beim letzteren Körper eine m-mal grössere Kraft, als beim ersteren, erfordert, d. h. bei gleichen Geschwindigkeiten zweier an Masse verschiedener Körper verhalten sich die dazu nöthigen Kräfte wie die Massen. Sind aber auch die Geschwindigkeiten verschieden, so verhalten sich die Kräfte wie die Producte aus den Massen in die Geschwindigkeiten, weil, um derselben Masse eine n-mal grössere Geschwindigkeit beizubringen, eine n-mal grössere Kraft erfordert wird.

Das jetzt von Stosskräften Gesagte muss nach §§. 20 und 21 auch auf Kräfte anwendbar sein, die, wie es in der Natur geschieht, stetig wirken. In dieser Hinsicht ist noch zu bemerken, dass man den bisher dafür gebrauchten Ausdruck beschleunigende Kraft für den Fall beibehält, wenn man eine stetige Kraft bloss nach der von ihr bewirkten Geschwindigkeit beurtheilt, und dass eine stetige Kraft, wenn man sie zugleich nach der von ihr bewegten Masse schätzt, eine bewegende Kraft genannt wird. Das Verhältniss der bewegenden Kräfte ist daher aus dem Verhältnisse der Geschwindigkeiten, d. i. der beschleunigenden Kräfte, und aus dem der Massen zusammengesetzt. Nimmt man also, wie in §. 20, diejenige beschleunigende Kraft zur Einheit, welche in der Zeiteinheit eine Geschwindigkeit $= 1$ erzeugt, und setzt man diejenige bewegende Kraft $= 1$, welche einer Masse $= 1$ während einer Zeit $= 1$ eine Geschwindigkeit $= 1$ beibringt, so ist bei einer vorgegebenen Bewegung *die bewegende Kraft dem Producte aus der beschleunigenden Kraft in die bewegte Masse gleich.*

Uebrigens soll in der Folge, wenn von einer stetigen Kraft ohne weiteren Zusatz die Rede ist, wie bisher, immer die beschleunigende, nicht die bewegende Kraft, gemeint sein.

Nach diesen Erörterungen ist es nun leicht, die am Ende des §. 61 aufgeworfene, die gegenseitige Anziehung der Sonne S und eines Planeten P betreffende, Frage zu beantworten. Da nämlich S und P von zwei Kräften, welche sich das Gleichgewicht halten, also von zwei einander gleichen bewegenden Kräften, gegen einander getrieben werden, so ist das Product aus der beschleunigenden Kraft, welche auf S wirkt, in die Masse von S gleich dem Producte aus

der den Körper P beschleunigenden Kraft in die Masse von P, und es verhalten sich daher in diesem Falle die beschleunigenden Kräfte umgekehrt wie die Massen, auf welche sie wirken; oder, wie man auch sagen kann: *die Kraft, mit welcher jeder der beiden Körper S und P den anderen anzieht, ist direct der Masse des anziehenden Körpers proportional.*

Folgerung. Wird ein Körper P von einem anderen S nach dem umgekehrten Verhältnisse des Quadrats der gegenseitigen Entfernung, oder nach irgend einem anderen von der Entfernung abhängenden Verhältnisse, angezogen, so wird nach demselben Verhältnisse auch S von P angezogen.

§. 62. Sammeln wir jetzt die in den vorhergehenden Paragraphen gemachten Schlüsse, so wird jeder Planet und jeder Trabant von der Sonne, und jeder Trabant von seinem Planeten angezogen, und umgekehrt zieht jeder Planet und jeder Trabant die Sonne, und jeder Trabant seinen Planeten an. Die (beschleunigende) Kraft aber, mit welcher dieses geschieht, und soweit wir dieselbe beurtheilen können, richtet sich nach den zwei Gesetzen, dass sie bei einem und demselben anziehenden Körper sich umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung des angezogenen Körpers verhält, und dass sie bei zwei sich gegenseitig anziehenden Körpern der Masse des anziehenden proportional ist. Bei einer so grossen Anzahl von Fällen, in denen sich die Anziehung zu erkennen giebt, ist es nun in sehr hohem Grade wahrscheinlich, dass je zwei Körper unseres Sonnensystems überhaupt, also auch je zwei Planeten, oder ein Planet und ein nicht zu ihm gehörender Trabant, u. s. w. nach denselben zwei Gesetzen auf einander Einfluss üben, einen Einfluss, der sich zwar nicht so augenfällig und nicht durch so einfache Schlüsse, wie in den vorhin betrachteten Fällen, zu erkennen giebt, dennoch aber aus mancherlei zu beobachtenden kleinen Abweichungen der Planetenbewegungen von den Kepler'schen Gesetzen sich wenigstens ahnen lässt. Wir wollen daher, so lange wir nicht auf Erscheinungen stossen, welche deutlich dagegen sprechen, die gegenseitige Anziehung der Himmelskörper als allgemein herrschend betrachten.

Uebrigens ist es nicht schwer, die eben gedachten zwei Gesetze der Anziehung zu Einem zu verbinden. Da nämlich die beschleunigende Kraft, mit welcher die Sonne einen in der Enfernung r befindlichen Planeten oder Trabanten anzieht, gleich $kk : rr$ ist (§. 55 und §. 57), so ist hinwiederum, wenn wir, die Masse der Sonne zur Einheit nehmend, die Masse des letzteren Körpers gleich m setzen, die Kraft, mit welcher von diesem Körper die Sonne, also auch jeder

andere in der Entfernung r von ihm befindliche Körper des Systems angezogen wird,

$$= \frac{kkm}{rr},$$

d. h. *die anziehende Kraft eines Himmelskörpers verhält sich direct wie seine Masse und umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung des angezogenen Körpers.*

§. 63. Die Kraft, mit welcher ein Himmelskörper den anderen anzieht, wirkt aber nicht bloss im Ganzen, sondern erstreckt sich auf alle einzelnen Theile der Körper, wie sich durch folgende Schlüsse erhärten lässt.

Bedeuten A und B zwei Planeten, welche sich in gleichen Entfernungen von der Sonne S befinden. Man denke sich A aus a Theilchen zusammengesetzt, die sämmtlich an Masse einander gleich sind. Eben so bestehe B aus b Theilchen, die unter sich und mit den vorigen einerlei Masse haben. Die Massen von A und B selbst verhalten sich daher wie die Zahlen a und b.

Werden nun alle diese a und b Theilchen, die, wegen der Kleinheit der Dimensionen von A und B gegen die sich gleichen Entfernungen SA und SB, als sämmtlich gleich weit von S entfernt angesehen werden können, mit statisch einander gleichen Kräften nach S getrieben, so sind — übereinstimmend mit §. 55 — die Geschwindigkeiten, mit denen A und B nach S sich zu bewegen anfangen, einander gleich (vergl. §. 61).

Wollte man dagegen setzen, dass unmittelbar nur eines der a Theilchen von A, es heisse α, und nur eines der b Theilchen von B, es heisse β, von S angezogen würde, und dass die übrigen Theile in Folge ihres Zusammenhanges mit α und β nach S getrieben würden, so müssten, wegen der gleichen Geschwindigkeiten von A und B, die auf α und β wirkenden Kräfte, statisch geschätzt, in dem Verhältnisse der Massen von A und B oder der Zahlen a und b stehen. Es liesse sich aber dann nicht einsehen, warum die übrigen Theile von A und B einen Einfluss auf die Kräfte haben sollten, durch welche α und β in Bewegung gesetzt werden. Auf ähnliche Unbegreiflichkeiten stösst man, wenn man die anziehende Kraft von S auf einige der a und b Theilchen stärker, auf andere schwächer wirkend setzt. Wir sehen uns daher zu der Hypothese gedrungen, dass je zwei auch noch so kleine Theile von A und B, dafern sie nur gleiche Masse haben, von S mit statisch gleicher Kraft angezogen werden.

Zieht aber S jedes Theilchen von A, wie α, an, so wird auch hinwiederum S von α mit einer so vielmal schwächeren beschleunigenden Kraft, als α weniger Masse denn S hat, angezogen. Mit derselben beschleunigenden Kraft wird aber von α auch jeder andere Körper T angezogen, der mit S gleiche Entfernung von α hat, woraus wir nach derselben Weise wie vorhin schliessen, dass mit der nämlichen Kraft auch jedes Theilchen des S und des T von α angezogen wird. Von je zwei Körpern A und S wirkt demnach jedes Theilchen des einen auf jedes Theilchen des anderen mit einer anziehenden beschleunigenden Kraft, welche der Masse des anziehenden Theilchens proportional ist.

Die sphärische Gestalt der Himmelskörper, so wie Erscheinungen auf unserer Erde, von denen im folgenden Kapitel die Rede sein wird, führen uns endlich zu dem Schlusse, dass nicht bloss je zwei Theilchen, die zwei verschiedenen Himmelskörpern angehören, sondern auch je zwei Theilchen eines und desselben Körpers sich anziehen. Denn war der Körper, wie es wenigstens von unserer Erde höchst wahrscheinlich ist, anfangs in einem flüssigen Zustande, und bildeten seine Theile irgend eine von der Kugel abweichende Form, oder waren sie gar im Raume zerstreut, so konnte es nur durch ihre gegenseitige Anziehung geschehen, dass sie so nahe als möglich auf einander zugingen und sich so lange bewegten und vertheilten, bis ein von allen Seiten gleichförmiger Körper, also eine Kugel, entstand.

§. 64. Nach diesem Allen sind wir veranlasst anzunehmen, *dass je zwei Theilchen der Materie überhaupt sich gegenseitig anziehen, und dieses nach dem Gesetze, dass die anziehende Kraft eines Theilchens direct der Masse desselben und umgekehrt dem Quadrate seiner Entfernung vom angezogenen Theilchen proportional ist.*

Allerdings können beim Rückblick auf das Vorhergehende an der völlig allgemeinen Gültigkeit dieses Satzes noch Zweifel übrig bleiben, da wir mehrere der obigen Schlüsse nur der Analogie nach machten, da wir nur die augenfälligsten Gesetze der Bewegung in unserem Sonnensysteme, nicht auch die kleinen Abweichungen von denselben, berücksichtigten, und noch manche Erscheinungen, die gleichfalls zur Prüfung jenes Satzes hätten dienen können, ganz unbeachtet liessen. Wenn aber schon die grosse Einfachheit des Satzes es höchst wahrscheinlich macht, dass er ein wahres Naturgesetz aufstellt, so werden noch mehr die bald folgenden Untersuchungen jene Zweifel zu beseitigen dienen. Wir werden nämlich, den umgekehrten Weg einschlagend, das Gesetz der allgemeinen Anziehung als Natur-

gesetz zum Grunde legen und die Erscheinungen, wie sie ihm zufolge statt finden müssen, bestimmen und bis in ihre kleineren Details zu erforschen suchen. Die Uebereinstimmung der so erhaltenen Resultate mit den Erscheinungen wird uns dann immer mehr überzeugen, dass durch das Gesetz in der Allgemeinheit und Bestimmtheit, wie es vorhin ausgesprochen wurde, und wie es von NEWTON (geb. 1642, gest. 1727), dem Entdecker desselben, in seinem unsterblichen Werke »*Principia philosophiae naturalis*« (Londini 1687) veröffentlicht worden, alle am Himmel zu beobachtende Bewegungen auf das Befriedigendste erklärt werden können.

Viertes Kapitel.

Nächste Folgen aus dem Gesetze der allgemeinen Anziehung.

§. 65. Bei der Bewegung eines Planeten um die Sonne ist nach dem Gesetze der allgemeinen Anziehung nicht bloss die anziehende Kraft, welche die Sonne auf den Planeten äussert, sondern auch die des Planeten auf die Sonne thätig. Um die vereinte Wirkung dieser Kräfte in Rechnung zu nehmen, seien M und m irgend zwei sich anziehende Massen, r ihre gegenseitige Entfernung und K die Kraft, mit welcher eine Masse $= 1$ einen von ihr in einer Entfernung $= 1$ befindlichen Körper anzieht. Alsdann sind die auf m und M wirkenden Kräfte

$$= \frac{KM}{rr} \quad \text{und} \quad = \frac{Km}{rr}$$

und resp. von m nach M und von M nach m gerichtet. Bei den dadurch bewirkten Bewegungen von M und m ist aber (§. 24, a) die Kraft, welche die Bewegung von m gegen M erzeugt, zusammengesetzt aus der auf m wirkenden Kraft und der auf M wirkenden, aber nach entgegengesetzter Richtung genommenen Kraft, also zusammengesetzt aus den nach der gemeinschaftlichen Richtung mM wirkenden Kräften $KM : rr$ und $Km : rr$; d. h. die Bewegung von m gegen M, wie sie statt finden würde, wenn M in Ruhe wäre, wird von einer nach M gerichteten Kraft

$$= \frac{K(M+m)}{rr}$$

hervorgebracht. Die Bewegung selbst geschieht in einem Kegelschnitte (§. 55, b); und wenn dieser eine Ellipse ist, a die halbe grosse Axe derselben und n die mittlere Bewegung bedeutet, so ist (§. 55) $n^2 a^3 : rr$ der Ausdruck der Kraft, welche, nach M gerichtet, die relative Bewegung von m um M hervorbringt. Man hat folglich:

$$K(M+m) = n^2 a^3 ,$$

und eben so ist für je zwei andere sich nach dem Newton'schen Gesetz anziehende und um einander bewegende Körper, für welche M', m', a', n' dieselbe Bedeutung haben, welche M, m, a, n für das erstere Paar hatten:

$$K(M'+m') = n'^2 a'^3 ;$$

mithin verhält sich

$$n^2 a^3 : n'^2 a'^3 = M+m : M'+m',$$

oder, wenn U und U' die Umlaufszeiten in beiden Systemen bezeichnen:

$$(\alpha) \qquad a^3 : a'^3 = (M+m)\,U^2 : (M'+m')\,U'^2 ,$$

d. h.

Bei verschiedenen Paaren sich um einander bewegender Körper verhalten sich die Würfel der mittleren Entfernungen wie die Quadrate der Umlaufszeiten, multiplicirt mit den Summen der Massen.

Wenden wir diesen aus dem Gesetze der allgemeinen Anziehung fliessenden Satz zunächst auf die um die Sonne M laufenden Planeten m, m', ... an, so ist der Würfel der mittleren Entfernung eines Planeten von der Sonne nicht bloss dem Quadrate der Umlaufszeit, wie es das Kepler'sche Gesetz will, sondern auch noch der Summe der Massen der Sonne und des Planeten proportional. Sollen daher die beiden Gesetze einander nicht widersprechen, so müssen wir entweder annehmen, dass die Summen $M+m$, $M+m'$, ... einander gleich, also auch die Massen m, m', ... der einzelnen Planeten einander gleich sind, oder dass diese Massen gegen die der Sonne überaus klein sind, und daher die Verhältnisse zwischen $M+m$, $M+m'$, ... vom Verhältnisse der Gleichheit äusserst wenig abweichen, um einen Unterschied, der bei der Vergleichung der beobachteten Umlaufszeiten und der, überdies nur mit grosser Mühe aus Beobachtungen zu bestimmenden, mittleren Entfernungen ganz unmerkbar bleibt. Schon wegen der sehr grossen Verschiedenheit des körperlichen Inhalts der einzelnen Planeten, und wegen der ausserordentlichen Kleinheit dieser Körper gegen den Sonnenkörper, ist die letztere Hypothese die bei weitem wahrscheinlichere und wird noch auf andere Weise, wie wir sogleich sehen werden, als die richtige bestätigt.

§. 66. Eben so, wie die Planeten gegen die Sonne, sind auch die Trabanten gegen ihre Planeten dem Inhalte, und daher sehr wahrscheinlich auch der Masse nach sehr klein. Diese Einrichtung der Natur giebt uns ein Mittel an die Hand, um für die Körper unseres Sonnensystems, welche Begleiter haben, die Verhältnisse zwischen ihren Massen näherungsweise zu finden. Denn es folgt aus der Proportion (α), wenn wir m gegen M und m' gegen M' vernachlässigen:

$$M : M' = \frac{a^3}{U^2} : \frac{a'^3}{U'^2}. *)$$

Wir wollen uns dieses an einigen Beispielen erläutern und dabei, wie in §. 44, die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne zur Längeneinheit und einen Tag mittlerer Zeit zur Zeiteinheit nehmen.

Da die Länge des siderischen Jahres 365·256 Tage beträgt, so ist erstens für die Bewegung der Erde um die Sonne:

$$\frac{a^3}{U^2} = \frac{1}{(365{\cdot}256)^2} = \mu\ .$$

Die mittleren Werthe der Horizontalparallaxen**) der Sonne und des Mondes unter dem Aequator sind 8″5776 und 57′ 1″, und daher die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde

$$= \frac{8{\cdot}5776 \sin 1''}{\sin 57'\ 1''} = \frac{1}{398{\cdot}811}\ .$$

Da ferner der siderische Monat 27·3217 Tage enthält, so ist für die Bewegung des Mondes um die Erde:

$$\frac{a^3}{U^2} = \frac{1}{(398{\cdot}811)^3\ (273{\cdot}217)^2} = \mu'\ .$$

*) Unter der Annahme, dass m um M und m' um M' sich kreisförmig bewegen, geht diese Proportion schon daraus hervor, dass die Kräfte, mit denen m und m' nach M und M' hingetrieben werden, zufolge des Newton'schen Gesetzes sich wie $\frac{M}{a^2}$ und $\frac{M'}{a'^2}$, nach der Theorie der Kreisbewegung aber sich wie $\frac{a}{U^2}$ und $\frac{a'}{U'^2}$ (§. 22) verhalten.

**) d. h. der Winkel, unter welchen in der mittleren Entfernung der Sonne und des Mondes der Erdhalbmesser erscheint.

Wegen der angewandten numerischen Werthe vergl. das Vorwort; der oben gegebene (Encke'sche) Werth der Sonnenparallaxe ist um c. 0″3 zu vergrössern. Im Uebrigen möge hier namentlich auf die in den Artt. 127, 159 und 266—70 seiner Mondstheorie (1862—64) enthaltenen numerischen Resultate Hansen's hingewiesen werden, wo u. A. der mittlere Abstand des Mondes zu $\frac{1}{381{\cdot}31}$ angegeben wird.

A. d. H.

Die mittlere Entfernung Jupiters von der Sonne ist $= 5 \cdot 20277$, und der Halbmesser der Bahn seines vierten Trabanten, wie er von der Sonne aus erscheint, im Mittel gleich $8' \, 18''$, folglich die mittlere Entfernung dieses Trabanten vom Jupiter

$$= 5 \cdot 20277 \sin 8' \, 18''.$$

Der siderische Umlauf desselben beträgt $16 \cdot 6890$ Tage. Mithin ist für seine Bewegung um den Jupiter:

$$\frac{a^3}{U^2} = \frac{(5 \cdot 20277 \sin 8' \, 18'')^3}{(16 \cdot 6890)^2} = \mu'' \, .$$

Es verhalten sich demnach die Massen der Sonne, der Erde und des Jupiter wie μ, μ' und μ'', oder es ist, die Masse der Sonne gleich 1 gesetzt, die Masse der Erde

$$= \frac{\mu'}{\mu} = \left(\frac{365 \cdot 256}{27 \cdot 3217}\right)^2 \frac{1}{(398 \cdot 811)^3} = \frac{1}{354912} \, ,$$

die Masse Jupiters

$$= \frac{\mu''}{\mu} = \left(\frac{365 \cdot 256}{16 \cdot 689}\right)^2 (5 \cdot 20277 \sin 8' 18'')^3 = \frac{1}{1053} \, ,$$

wenigstens sehr nahe. Streng genommen, sind nach der Proportion (α) des §. 65, wenn wir die Massen der Sonne, der Erde, des Mondes, des Jupiter und seines vierten Trabanten resp. mit S, T, L, J und j bezeichnen, die Zahlen μ, μ', μ'' den Summen $S + T$, $T + L$, $J + j$ proportional, folglich:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{T + L}{S + T} = \frac{1}{354912} \, ,$$

$$\frac{\mu''}{\mu} = \frac{J + j}{S + T} = \frac{1}{1053} \, .$$

Die erste dieser Gleichungen bedarf aber noch einer kleinen Correction wegen der Störung, welche die Sonne in der Bewegung des Mondes um die Erde hervorbringt, und wodurch die gegenseitige Anziehung von Erde und Mond durchschnittlich in dem Verhältnisse $358 \cdot 45 : 357 \cdot 45$ verringert wird (§. 101). Die aus dieser Bewegung geschlossene, der gegenseitigen Anziehung proportionale, Massensumme $T + L$ ist folglich in demselben Verhältnisse zu klein und muss daher im umgekehrten Verhältnisse vergrössert werden. Dies giebt:

$$\frac{T + L}{S + T} = \frac{1}{353922} \, .$$

Nun ist L oder die Masse des Mondes, wie sie der Freiherr von L i n d e n a u aus dem von ihr erzeugten Schwanken der Erdaxe bestimmt hat, der $88 \cdot 448$-te Theil der Erdmasse T. Hiermit wird letztere

$$\frac{T}{S} = \frac{1}{353921} \cdot \frac{88 \cdot 448}{89 \cdot 448} = \frac{1}{357922}.$$

Was die Masse Jupiters, gleich $J:S$, anlangt, so ist wegen der Kleinheit von T gegen S, so wie auch von j gegen J, — man hat $j = \frac{1}{23442} J$ aus den gegenseitigen Störungen der Trabanten gefunden, auch bringt die Sonne keine merkbaren Störungen in diesem System hervor, — so ist $J:S$ von $J+j:S+T = \frac{1}{1053}$ nicht merkbar verschieden.

Zusatz. Eben so, wie die Massen der Erde und des Jupiter, lassen sich auch die des Saturn und des Uranus aus den Bewegungen ihrer Trabanten ermitteln. Man hat auf diese Weise die Masse

des Saturn $= \frac{1}{3500}$, des Uranus $= \frac{1}{17918}$ *)

erhalten. Die Massen der übrigen Planeten, welche von keinen Trabanten begleitet werden, hat man aus den kleinen Störungen, welche ihre anziehende Kraft in der Bewegung der ihnen am nächsten kommenden Planeten erzeugt, zu bestimmen gesucht. So haben sich aus den Störungen der Erde durch Venus und Mars die Massen

der Venus $= \frac{1}{401847}$, des Mars $= \frac{1}{2680337}$

ergeben. Dagegen ist die in dem Verzeichnisse der Planetenmassen bisher vorkommende Merkursmasse $= \frac{1}{2025810}$ nur eine hypothetische, und nicht wie die übrigen aus Beobachtungen hergeleitet.

§. 67. Ein Körper heisst gleichförmig dicht, wenn je zwei ihrem räumlichen Inhalte nach gleiche Theile desselben auch gleiche Masse haben. Von zwei Körpern A und B, deren jeder gleichförmig dicht ist, nennt man die Dichtigkeit des A das m-fache der Dichtigkeit von B, wenn von zwei ihrem Inhalte nach gleichen Theilen von A und B die Masse des Theils von A dem m-fachen

---

*) Bessel findet für Jupiter und Saturn resp. $\frac{1}{1048}$ und $\frac{1}{3502}$, Newcomb dagegen für Uranus $\frac{1}{22600}$, für Neptun $\frac{1}{19380}$. Mittelst der neuentdeckten Marsmonde ist die Masse dieses Planeten als ein Dreimilliontel der Sonnenmasse, seine Dichtigkeit als etwa drei Viertel der Erddichte bestimmt worden. Auch haben die Untersuchungen von Hansen und Leverrier die Massen von Venus und Erde resp. zu $\frac{1}{410000}$ und $\frac{1}{320000}$ ergeben, während das Verhältniss der Massen von Mond und Erde von $\frac{1}{80}$ nicht wesentlich abweichen kann. A. d. H.

der Masse des Theils von B gleich ist. Setzt man daher von einem Körper, bei welchem jeder Theil, dessen Inhalt $= 1$, eine Masse $= 1$ hat, auch die Dichtigkeit $= 1$, so ist von einem gleichförmig dichten Körper, wenn seine Masse $= m$ und sein Inhalt $= 1$ ist, seine Dichtigkeit $= m$; ist aber der Inhalt $= v$, so ist die Dichtigkeit gleich der Masse eines Theils des Körpers, dessen Inhalt $= 1$ ist, also gleich $m : v$; d. h. *die Dichtigkeit wird gefunden, wenn man die Masse durch den Inhalt dividirt; und umgekehrt ist die Masse dem Product aus der Dichtigkeit in den Inhalt gleich.*

Ist ein Körper nicht gleichförmig dicht, so nennt man den Quotienten, welcher durch Division der Masse des Körpers mit seinem Inhalte gefunden wird, seine mittlere Dichtigkeit, die daher auch einerlei ist mit der Dichtigkeit eines gleichförmig dichten Körpers, welcher, der Masse und dem Inhalte nach, dem ersteren Körper gleich ist.

§. 68. Kugeln verhalten sich ihrem Inhalte nach wie die Würfel ihrer Halbmesser. Die mittleren Dichtigkeiten der Himmelskörper verhalten sich daher wie die Massen, dividirt durch die Würfel der Halbmesser dieser Körper. So verhält sich z. B. die Dichtigkeit der Sonne zur Dichtigkeit der Erde wie

$$\frac{357922}{(\sin 16' \, 1'')^3} : \frac{1}{(\sin 8''5682)^3} .$$

Denn der scheinbare Halbmesser der Sonne in der mittleren Entfernung derselben von der Erde ist $16' \, 1''$, und von der Sonne aus erscheint in der nämlichen Entfernung der Halbmesser einer Kugel, welche mit der in dem Verhältnisse von $301 : 302 = p : 1$ abgeplatteten Erde gleichen Inhalt hat, unter dem Winkel von

$$\sqrt[3]{p} \cdot 8''5776 = \frac{8''5776}{1{\cdot}0011} = 8''5682*) .$$

Die mittlere Dichtigkeit der Erde $= 1$ gesetzt, ist demnach die mittlere Dichtigkeit der Sonne

---

*) Ein Ellipsoid, dessen drei Hauptaxen gleich $2a$, $2b$, $2c$ sind, hat den Inhalt einer Kugel, deren Halbmesser $= \sqrt[3]{abc}$ ist. Die Erde ist ein Ellipsoid, bei welchem die zwei grössten Hauptaxen, sie seien $2a$ und $2b$, einander gleich sind. Mithin ist die Erde einer Kugel gleich, deren Halbmesser gleich $\sqrt[3]{a^2c} = a\sqrt[3]{p}$, wenn $c : a = p$ gesetzt wird. — Man bemerke nur noch, dass $8''5776$ der Winkel ist, unter welchem a oder der Halbmesser des Erdäquators von der Sonne erscheint (§. 66).

$$= 357922 \left(\frac{8{\cdot}5682 \sin 1''}{\sin 16' \, 1''}\right)^3 = 0{\cdot}2537 \ ,$$

also beiläufig ein Viertel von der Dichtigkeit der Erde.*)

Eben so hat man aus den Massen und Halbmessern der übrigen Planeten ihre Dichtigkeiten berechnet und die

des Mondes = 0·619, des Jupiter = 0·238,
der Venus = 0·923, des Saturn = 0·138,
des Mars = 0·948, des Uranus = 0·242

gefunden, also sämmtlich kleiner, als die Dichtigkeit der Erde, die hierbei, wie vorhin, = 1 angenommen wird. Insbesondere ist die geringe Dichtigkeit der drei von der Sonne entferntesten und zugleich grössten Planeten auffallend **), während Venus und Mars nicht viel weniger dicht, als die Erde selbst, sind.

Vergleicht man die Dichtigkeiten der Erde, des Jupiter und des Saturn mit einander, so zeigt sich, dass sie nahe in dem umgekehrten Verhältnisse der mittleren Entfernungen dieser Körper von der Sonne stehen. Nach diesem Gesetze, was jedoch nicht auch bei Venus, Mars und Uranus sich bestätigt findet, hat Laplace die Dichtigkeit des Merkur = 2·94 geschlossen und hiernach die oben bemerkte Masse dieses Planeten bestimmt. Erst vor wenigen Jahren ist es den Astronomen möglich geworden, diese Massenbestimmung einer Prüfung zu unterwerfen. Es kam nämlich gegen Ende des Jahres 1838 der nach Encke seinen Namen führende Komet dem Merkur so nahe, dass letzterer einen sehr merkbaren Einfluss auf die Bewegung des Kometen äusserte, einen Einfluss, der für uns bei der damals nicht sehr beträchtlichen Entfernung des Kometen von der Erde um so augenfälliger werden musste. Aus den zu jener Zeit in Berlin angestellten Beobachtungen des Kometen hat sich nun ergeben, dass die Laplace'sche Masse und Dichtigkeit mit $\frac{4}{7}$ multiplicirt werden müssen. „Dieses Resultat kann jedoch nur als eine durch einen rohen Ueberschlag gewonnene erste Näherung angesehen werden" ***).

---

*) Dieselbe beträgt im Mittel bekanntlich das 5·6-fache von der Dichte des Wassers, während die durchschnittliche Dichtigkeit der obersten (festen) Erdschichten kaum die Hälfte jenes Betrags erreicht (vgl. Reich im ersten Bande der *Abhandlungen der K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften*, Leipzig 1852, oder Helmert, *Geodäsie* Bd. II, S. 277). A. d. H.

**) Auch die Dichtigkeit des Neptun scheint von 0·2 wenig verschieden (Newcomb, *Astronomy*). A. d. H.

***) *Astronomische Nachrichten*, XVI. Band, Seite 244. [Nach Leverrier's Untersuchungen beträgt die Masse des Merkur $\frac{1}{5310000}$ und ist auf etwa den

§. 69. Im Bisherigen haben wir die gegenseitige Anziehung der Himmelskörper bloss aus den gegenseitigen Entfernungen ihrer Mittelpunkte und aus ihren Massen bestimmt, also eben so, als ob die Masse eines jeden in seinem Mittelpunkte vereinigt wäre. Da aber die Gesammtanziehung zweier Körper aus den Partialanziehungen ihrer einzelnen Theilchen zusammengesetzt ist (§. 63), so entsteht die Frage, ob nicht jene Bestimmung der Anziehung zweier Himmelskörper noch einer kleinen Berichtigung bedarf, sobald wir die Anziehungen ihrer einzelnen Theilchen berücksichtigen, und deshalb noch die Gestalt und Grösse eines jeden und die Vertheilung seiner Masse mit in Rechnung nehmen.

Die Himmelskörper weichen von der Kugelgestalt nur sehr wenig, mehrere durchaus unmerklich, ab, und nach dem, was in §. 63 über die muthmaassliche Bildung dieser Kugeln gesagt worden, ist es nicht wohl anders denkbar, als dass bei jeder derselben für sich in gleicher Entfernung vom Mittelpunkte auch gleiche Dichtigkeit statt findet. Stellen wir uns daher eine solche Kugel durch concentrische Kugelflächen in genugsam dünne Schalen zerlegt vor, so wird jede dieser Schalen für sich — gegen das Ganze unbedeutende Irregularitäten abgerechnet — gleichförmig dicht sein, wenn auch die Dichtigkeit von einer Schale zur anderen wechselt und, wie es am wahrscheinlichsten ist, von der Oberfläche der Kugel nach ihrem Mittelpunkte zunimmt.

Um daher die gegenseitige Anziehung zweier Himmelskugeln genau zu bestimmen, wollen wir zuerst die Anziehung einer gleichförmig dichten Kugelschale, deren Dicke unendlich klein ist, oder vielmehr geradezu die Anziehung einer gleichförmig dichten materiellen Kugelfläche, auf einen ausser ihr gelegenen materiellen Punkt zu ermitteln suchen. Ohne höheren Calcul anzuwenden, dürfte dieses folgendergestalt am einfachsten geschehen.

1) Sei P (Fig. 25) der materielle Punkt und C der Mittelpunkt der materiellen Kugelfläche. Die Gerade PC treffe die Fläche in A und B, und eine durch PC gelegte Ebene schneide sie in dem grössten Kreise ATB. Sei FF' ein Element dieses Kreises. Während der Halbkreis AFB, wenn er um AB gedreht wird, die Kugelfläche erzeugt, beschreiben die Punkte F und F' zwei Parallelkreise und das Element FF' eine von diesen Kreisen begrenzte Zone. Man theile diese Zone durch Linien, die, wie FF', auf den zwei Kreisen perpendikular sind, in einander gleiche Elemente. Jedes derselben

---

fünften Theil ihres Betrags als genau zu schätzen. Damit würde sich die Dichtigkeit auf *c.* 1·2 reduciren. A. d. H.]

ist hiernach ein Rechteck, dessen Höhe gleich FF' und dessen Breite gleich dem $2n$-ten Theile des von F oder F' beschriebenen Kreises

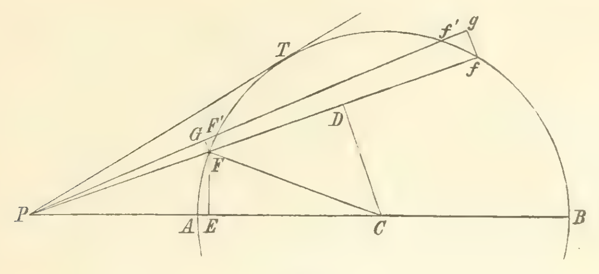


Fig. 25.

ist, wenn $2n$ die unendliche Anzahl der Elemente bezeichnet. Fällt man daher von F auf AB das Perpendikel FE und setzt die Dichtigkeit der Kugelfläche $= e$, so ist

$$\frac{\pi \,.\, EF}{n} \,.\, FF' = i$$

der Inhalt und ei die Masse jedes Elements (§. 67).

2) Da der Punkt P von jedem dieser Elemente gleich weit, nämlich um eine Linie gleich PF absteht, so wird er von jedem Elemente mit einer Kraft

$$v = \frac{Kei}{PF^2}$$

angezogen, deren Richtung mit PC einen Winkel $= CPF$ macht. Man zerlege jede dieser $2n$ Kräfte in zwei, von denen die eine die Richtung PC hat, die andere auf PC normal ist. Jede der ersteren ist gleich $v \,.\, PE : PF$, und daher ihre gleichfalls nach PC gerichtete Resultante

$$V = 2nv \,.\, \frac{PE}{PF} = \frac{2n\, Kei \,.\, PE}{PF^3}$$

$$= \frac{2\pi Ke \,.\, PE \,.\, EF \,.\, FF'}{PF^3} \,.$$

Jede der letzteren Kräfte ist gleich $v \,.\, EF : PF$, und ihre Richtungen sind parallel mit den $2n$ Radien, durch welche der von F beschriebene Kreis in $2n$ gleiche Theile getheilt wird. Diese Kräfte heben sich daher paarweise auf, nämlich je zwei, deren Richtungen parallel mit zwei einander entgegengesetzten Radien sind. Mithin reducirt sich die Anziehung der ganzen Zone auf die nach PC gerichtete Kraft V allein.

3) Man fälle von C auf PF das Perpendikel CD, so ist

$$\frac{PE}{PF} = \frac{PD}{PC} \quad \text{und} \quad \frac{EF}{PF} = \frac{CD}{PC},$$

wodurch

$$V = 2\pi Ke \, . \frac{PD \, . \, CD \, . \, FF'}{PC^2 \, . \, PF}$$

wird.

Man trage ferner PF auf PF' von P bis G ab, so sind DFG und FGF' unendlich nahe rechte Winkel, so wie auch CFF' ein rechter. Mithin sind die Dreiecke FGF' und FDC gleichwinklig, und es verhält sich

$$FF' : GF' = CF : CD \, ,$$

folglich ist

$$CD \, . \, FF' = r \, . \, GF' \, ,$$

wenn man den Halbmesser des Kreises ATB gleich r setzt. Dies giebt:

$$V = 2N \, . \frac{PD \, . \, GF'}{PF} \, , \quad \text{wo} \quad N = \frac{\pi Ker}{PC^2} \, .$$

4) Man verlängere die Linien PF und PF', bis sie den Kreis ATB zum zweiten Male, in f und f', schneiden, und trage Pf auf Pf' von P bis g ab, so sind die Winkel $FF'G$ und $ff'g$ einander gleich, mithin die gleichnamigen Dreiecke gleichwinklig, und es verhält sich

$$PF : Pf = FG : fg = GF' : f'g \, ,$$

folglich

$$PF : GF' = PF + Pf : GF' + f'g = 2PD : Ff - F'f' \, ,$$

weil D der Mittelpunkt der Sehne Ff, und $Ff = Gg$ ist. Hierdurch wird

$$V = N(Ff - F'f') \, .$$

5) Auf dieselbe Art wird bewiesen, dass die Anziehung des Punktes P von der Zone, welche bei Drehung des Halbkreises ATB von ff' erzeugt wird, ebenfalls

$$= N(Ff - F'f')$$

ist und die Richtung PC hat. Auch folgt dieses schon daraus, dass N eine von den Elementen FF' und ff' unabhängige Grösse ist, und die Differenz $Ff - F'f'$ von ihnen auf gleiche Weise abhängt.

6) Seien $F'F''$, $F''F'''$, ... mehrere auf FF' im Kreise ATB folgende Elemente, und seien f'', f''', ... die Punkte, in denen der Kreis von den Geraden PF'', PF''', ... zum zweiten Male geschnitten wird, so zieht jede der beiden Zonen $[F'F'']$ und $[f'f'']$, d. i. der

Zonen, welche von den Elementen $F'F''$ und $f'f''$ erzeugt werden, den Punkt P mit einer Kraft

$$V' = N(F'f' - F''f'')$$

an; jede der beiden Zonen $[F''F''']$ und $[f''f''']$ mit einer Kraft

$$V'' = N(F''f'' - F'''f''') ,$$

u. s. w. Hieraus folgt weiter die Anziehungskraft jeder der beiden Zonen $[FF'']$ und $[ff'']$

$$= V + V' = N(Ff - F''f'') ;$$

die Anziehungskraft jeder der beiden Zonen $[FF''']$ und $[ff''']$

$$= V + V' + V'' = N(Ff - F'''f''') ;$$

und so fort bei der Zusammensetzung noch mehrerer Elementarzonen, wie nahe auch von den Linien PFf, $PF'f'$,... $PF^{(m)}f^{(m)}$ die erste der Linie PAB und die letzte der von P an den Kreis gezogenen Tangente PT liegt. Geht man bis zu diesen beiden Grenzen selbst fort, so findet sich, weil für die Tangente die Sehne $F^{(m)}f^{(m)}$ Null wird, die Anziehung jeder der beiden Zonen $[AT]$ und $[BT]$

$$= N.AB ,$$

und da diese zwei Zonen die ganze Kugelfläche ausmachen, so ist die von derselben auf P ausgeübte Anziehung

$$= 2N.AB = 4Nr = \frac{4\pi Ker^2}{PC^2} .$$

Es ist aber $4\pi r^2$ der Inhalt der Kugelfläche, mithin $4\pi er^2$ ihre Masse. Setzen wir diese $= m$, so wird die erhaltene Anziehung

$$= \frac{Km}{PC^2} ,$$

und wir folgern daraus den merkwürdigen Satz, *dass eine gleichförmig dichte Kugelfläche einen ausser ihr befindlichen Punkt P eben so anzieht, als wenn ihre Masse m in ihrem Mittelpunkte C vereinigt wäre.*

§. 70. Zusätze. *a)* Ist FF' das Element eines Kreises, P ein Punkt in der Ebene des Kreises, und wird letzterer von den Geraden PF und PF' noch in f und f' geschnitten, so sind die Dreiecke PFF' und $Pf'f$ gleichwinklig, und es verhält sich daher

$$FF' : ff' = PF : Pf' \text{ oder } Pf .$$

Dasselbe wird auch gelten, wenn P ein Punkt im Raume und F, F' zwei einander unendlich nahe Punkte auf einer Kugelfläche sind, weil diese Fläche von der Ebene PFF' in einem Kreise geschnitten

wird. Ist daher ABC (Fig. 26) ein Elementardreieck auf einer Kugelfläche, P ein Punkt im Raume, und wird die Fläche von PA, PB, PC noch in a, b, c geschnitten, so bilden a, b, c ein zweites Elementardreieck, von welchem jede Seite zu der entsprechenden Seite des Dreiecks ABC sich wie die Entfernung des Dreiecks abc von P zu der Entfernung des Dreiecks ABC von P verhält. Mithin sind die Dreiecke ABC und abc einander ähnlich, und ihre Flächen verhalten sich wie

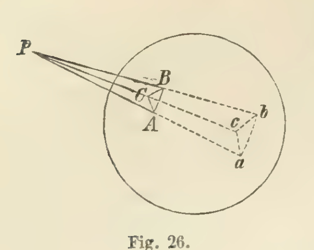


Fig. 26.

$$AB^2 : ab^2 = PA^2 : Pa^2 ,$$

d. i. wie die Quadrate ihrer Entfernungen von P. Der Punkt P wird folglich, wenn die Kugelfläche gleichförmig dicht ist, von den beiden Dreiecksflächen gleich stark angezogen.

b) Man sieht hieraus, wie das vorhin erhaltene Resultat der gleich starken Anziehung von Zonen, wie $[FF']$ und $[ff']$, sich verallgemeinern lässt. Zerlegt man nämlich irgend einen endlichen Theil Z der Kugelfläche in Elementardreiecke und bestimmt zu jedem derselben, wie ABC, ein zweites abc auf der Kugelfläche so, dass Aa, Bb, Cc sich in P treffen, so werden die Fläche Z und das Aggregat z der Dreiecke abc, d. h. je zwei Theile Z und z der Kugelfläche, deren Perimeter in einer und derselben, den Punkt P zur Spitze habenden Kegelfläche liegen, diesen Punkt gleich stark anziehen.

c) Der in *a*) vorangestellte Satz ist auch dann richtig, wenn der Punkt P nicht, wie in der Figur, ausserhalb, sondern innerhalb des Kreises liegt; und eben so wird der daraus gezogene Schluss gleicher Anziehungskraft der Theile Z und z einer Kugelfläche auch dann bestehen, wenn P innerhalb der Kugelfläche ist. Nur unterscheidet sich letzterer Fall von ersterem dadurch, dass die Anziehungskräfte von Z und z im ersteren Falle eine und dieselbe Richtung haben und daher einander verdoppeln, im letzteren Falle nach entgegengesetzten Richtungen wirken und sich daher aufheben. Zugleich geht daraus hervor, *dass die Wirkung der ganzen Kugelfläche auf einen irgendwo innerhalb derselben befindlichen Punkt P Null sein muss*, da sich die ganze Fläche in Theile, die, wie Z und z, in Bezug auf P einander gegenüber stehen, zerlegen lässt, und folglich der Punkt nach allen Seiten gleich stark angezogen wird.

§. 71. Folgerungen. *a*) Was in §. 69 von einer gleichförmig dichten Kugelfläche bewiesen worden, wird offenbar auch von einer

gleichförmig dichten unendlich dünnen Kugelschale gelten. Und da jede Kugel in unendlich dünne mit ihr concentrische Kugelschalen zerlegt werden kann, so wird auch eine Kugel, wenn sie gleichförmig dicht ist, oder auch, wenn nur je zwei gleich weit vom Mittelpunkte entfernte Theilchen derselben gleiche Dichtigkeit haben, einen ausser ihr befindlichen Punkt eben so anziehen, als wenn ihre Masse in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre. Bezeichnet daher M die Masse einer solchen Kugel und C ihren Mittelpunkt, so wird von ihr der materielle Punkt P mit einer Kraft

$$= \frac{K.M}{PC^2}$$

angezogen*).

b) Heisst p die Masse des materiellen Punktes P, so ist die bewegende Kraft, mit welcher P nach der Kugel hingetrieben wird, gleich dem Producte aus p in die beschleunigende Kraft (§. 61), also

$$= \frac{K.M.p}{PC^2},$$

und nach PC gerichtet. Sie ist zusammengesetzt aus den bewegenden Kräften, mit denen P nach den einzelnen Massentheilchen der Kugel getrieben wird. Da aber die Anziehung immer gegenseitig ist, und da bei zwei sich anziehenden Theilchen die bewegenden Kräfte, mit denen sie gegen einander getrieben werden, sich gleich sind (ebendas.), so ist auch die Resultante der bewegenden Kräfte, mit denen die Theilchen der Kugel nach P hin getrieben werden, gleich $KMp : PC^2$ und nach CP gerichtet. Zufolge der Anziehung von P wirkt demnach auf die Kugel eine nach CP gerichtete beschleunigende Kraft

$$= \frac{K.p}{CP^2}.$$

c) Wird die Kugel, ausser von P, noch von mehreren anderen Punkten P', P'', ..., deren Massen $= p'$, p'', ... sind, angezogen, so wirken auf die Kugel gleichzeitig nach CP, CP', CP'', ... gerichtete Kräfte, welche resp.

---

*) Ist P ein Punkt innerhalb der Kugel, so zerlege man sie durch eine durch P beschriebene concentrische Kugelfläche in eine kleinere Kugel und eine Kugelschale. Weil P auf der Oberfläche der kleineren Kugel und daher ausserhalb dieser Kugel liegt, so wird er von ihr eben so angezogen, als ob ihre Masse in C vereinigt wäre. Und dieses ist auch die Anziehung der ganzen Kugel, weil die Anziehung jeder der unendlich dünnen concentrischen Schalen, in welche man die ganze Schale zerlegen kann, nach §. 70, *c*) Null ist.

$$= \frac{Kp}{CP^2}, \quad \frac{Kp'}{CP'^2}, \quad \frac{Kp''}{CP''^2}, \ldots$$

sind. Nehmen wir nun an, dass alle diese materiellen Punkte eine zweite Kugel bilden, bei welcher, wie bei der ersten, in gleicher Entfernung vom Mittelpunkte gleiche Dichtigkeit statt findet, und bezeichnen wir die Masse dieser zweiten Kugel, $= p + p' + p'' + \ldots$, mit M_1 und ihren Mittelpunkt mit C_1, so lassen sich, nach dem in a) Bemerkten, alle jene Kräfte, deren Richtungen in C zusammentreffen, zu einer einzigen

$$= \frac{K \,.\, M_1}{CC_1^2}$$

verbinden, deren Richtung CC_1 ist; d. h. die erste Kugel wird von der zweiten — und folglich auch die zweite von der ersten — eben so angezogen, als ob die Massen beider Kugeln in ihren Mittelpunkten vereinigt wären.

Wenn demnach auf zwei oder auch mehrere Kugeln, deren jede in gleicher Entfernung von ihrem Mittelpunkte gleiche Dichtigkeit hat, keine anderen Kräfte, als ihre gegenseitige Anziehung, wirken, so bewegen sich die Mittelpunkte eben so, als ob sie allein vorhanden und in ihnen die Massen der Kugeln vereinigt wären.

Man sieht, wie dieses Resultat unmittelbare Anwendung auf die Bewegung der Himmelskörper leidet, und dass wir bei Berechnung der Bahnen ihrer Mittelpunkte, wie bisher, so auch fernerhin die Dimensionen dieser Körper ganz unberücksichtigt lassen können.

Allerdings zeigen einige derselben eine kleine Abweichung von der Kugelgestalt. Der Einfluss dieser Abweichung auf die Bewegung der von ihnen angezogenen Körper ist aber bei ihren grossen Entfernungen von einander so gering, dass er jeder Beobachtung entgehen muss, — mit Ausnahme der noch wahrnehmbaren Störungen, welche die abgeplattete Gestalt Jupiters in den Bewegungen seiner Trabanten hervorbringt, und mit Ausnahme des kleinen Einflusses der Abplattung der Erde auf die Bewegung des Mondes.

§. 72. Die Kraft, mit welcher ein Himmelskörper einen anderen Körper anzieht, ist nach §. 71 umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung des anderen vom Mittelpunkte des ersteren, und dieses nicht bloss bei grösseren Entfernungen, sondern auch dann noch, wenn beide Körper bis zur Berührung einander nahe sind. Es wird hiernach von besonderem Interesse für uns sein, aus der Kraft, mit welcher die Erde den um sie laufenden Mond anzieht, die Anziehungskraft der Erde auf Körper in der Nähe ihrer Oberfläche zu

berechnen, indem die Wirkungen der letzteren Kraft sich unmittelbar beobachten lassen.

Bedeutet a die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde und n seine mittlere Bewegung, so ist die Kraft, mit welcher der Mond in der Entfernung a nach der als ruhend gedachten Erde hingetrieben wird, oder der doppelte Raum (§. 10), um welchen der Mond in der ersten Zeiteinheit gegen die Erde fällt, gleich nna; es ist der Werth von T in §. 55 für $r = a$. Nun ist (§. 66)

$$a = \frac{1}{\sin 57' \, 1''} = 60{\cdot}296 \text{ Halbmessern des Erdäquators}$$
$$= 60{\cdot}296 \times 19\,630638 \text{ Pariser Fuss,}$$

und wenn wir zur Zeiteinheit die Minute wählen:

$$n = \frac{2\pi}{27{\cdot}3217 \times 24 \times 60} \; .$$

Hiermit findet sich der Fallraum des Mondes in der ersten Minute:

$$\tfrac{1}{2} nna = 15{\cdot}094 \text{ Fuss} \; .$$

Wegen der gegenseitigen Anziehung von Erde und Mond fällt aber sowohl letzterer gegen die erstere, als erstere gegen den letzteren, und zwar mit Geschwindigkeiten, die sich umgekehrt wie ihre Massen, also wie 88 : 1, verhalten. Der Theil des Fallraumes, welcher auf den Mond allein kommt, oder der Fallraum eines Körpers, der um die mittlere Entfernung des Mondes absteht und eine gegen die Erde ganz zu vernachlässigende Masse hat, ist folglich der $\frac{88}{89}$-ste Theil des ganzen. Dieser muss aber noch mit $\frac{358}{357}$ multiplicirt werden, um ihn von dem störenden Einflusse der Sonne zu befreien, als wodurch die gegenseitige Anziehung von Erde und Mond im Verhältnisse von 358 : 357 geschwächt wird (§. 66). Wir erhalten somit den verbesserten Fallraum

$$= \frac{88}{89} \times \frac{358}{357} \times 15{\cdot}094 = 14{\cdot}966 \text{ Fuss} \; .$$

Um hieraus einen durchschnittlichen Werth für den Fallraum auf der Oberfläche der Erde abzuleiten, wollen wir für die abgeplattete Erde eine ihr an Inhalt und Masse gleiche Kugel substituiren. Vom Mittelpunkte dieser Erdkugel ist der Mond um

$$1{\cdot}0011 \times 60{\cdot}296 = 60{\cdot}363$$

ihrer Halbmesser entfernt (§. 68), und es ist folglich auf der Oberfläche dieser Kugel der Fallraum in der ersten Minute

$$= 60{\cdot}363^2 \times 14{\cdot}966 \text{ Fuss,}$$

folglich in der ersten Secunde:

$$= \frac{60{\cdot}363^2}{60^2} \times 14{\cdot}966 = 15{\cdot}148 \text{ Fuss .}$$

Es beträgt aber (§. 10), einer sehr grossen Anzahl an den verschiedensten Orten der Erde angestellter Pendelbeobachtungen zufolge (§. 26), der Fallraum in der ersten Secunde unter den Polen 15·132 Fuss und unter dem Aequator 15·054, oder vielmehr

$$\frac{288}{287} \times 15{\cdot}054 = 15{\cdot}106 \text{ Fuss ,}$$

weil durch die Schwungkraft, welche durch die Axendrehung der Erde erzeugt wird, und deren Wirkung hier ausser Acht bleiben muss, die Schwerkraft unter dem Aequator um ihren 288-sten Theil verringert wird. Die grosse Uebereinstimmung zwischen diesen Zahlen und dem vorhin aus der Bewegung des Mondes gefolgerten Resultate*) zeigt nun auf das deutlichste, dass die Kraft, welche die Erscheinung des freien Falles der Körper, ihren Druck auf untergelegte Flächen u. s. w. hervorbringt, und welche die Schwerkraft genannt wird, völlig einerlei mit derjenigen ist, mit welcher die Erde auf den Mond und noch entferntere Himmelskörper wirkt. Diese sich über alle Grenzen erstreckende Kraft der Erde, sowie die ähnliche Kraft jedes anderen Himmelskörpers, und die gegenseitige Anziehung der Materie überhaupt, hat man daher auch die allgemeine Schwere genannt.

Zusatz. Aus dem Fallraume auf der Oberfläche der Erde kann man leicht den Fallraum auf einem anderen Himmelskörper mittelst der Verhältnisse zwischen den Massen und den Halbmessern beider Körper herleiten. Denn zufolge des Ausdrucks für die anziehende Kraft ist er direct der Masse und umgekehrt dem Quadrate des Halbmessers proportional. Bezeichnen daher M, R, F die Masse der Erdkugel, ihren Halbmesser und den Fallraum in der ersten Secunde auf der Oberfläche der Erde, und bedeuten M', R', F' dasselbe für irgend einen anderen Himmelskörper, so hat man

---

* Eine noch bessere Uebereinstimmung erhält man, wenn man in obiger Rechnung die Laplace'sche Bestimmung der Mondsmasse, gleich $\frac{1}{75}$ der Erdmasse [nach Hansen $\frac{1}{80}$, §. 67], anwendet. Denn damit finden sich 15·119 statt der obigen 15·148 Fuss. Den Pendelbeobachtungen zufolge ist aber auf einer der Erde an Inhalt und Masse gleichen, sich nicht drehenden Kugel der Fallraum in der ersten Secunde gleich 15·106 Fuss.

$$F' = \frac{M'}{M} \cdot \frac{R^2}{R'^2} \cdot F.$$

So ist z. B. für den Mond nahe

$$\frac{M'}{M} = \frac{1}{88}, \quad \frac{R}{R'} = \frac{11}{3},$$

woraus

$$F' = \frac{11}{72} \cdot F = \frac{1}{6 \cdot 55} \cdot F$$

folgt.

Für die Sonne ist $\frac{M'}{M} = 357922$, $\frac{R}{R'} = \frac{1}{112}$, und daher

$$F' = 28 \cdot 53 \cdot F.$$

Auf dem Monde fällt daher ein Körper in der ersten Secunde $\frac{15 \cdot 12}{6 \cdot 55} = 2 \cdot 31$ Fuss, auf der Sonne $28 \cdot 53 \times 15 \cdot 12 = 431 \cdot 4$ Fuss. — Ein Körper, der bei uns $6\frac{1}{2}$ Pfund wiegt, drückt auf dem Monde nicht stärker, als ein Gewicht von 1 Pfund bei uns; und ein Gewicht von 1 Pfund lastet auf der Sonne eben so stark, als ein Gewicht von $28\frac{1}{2}$ Pfund bei uns.

Fünftes Kapitel.

Allgemeine Gesetze der Bewegung bei einem System sich anziehender Körper.

---

§. 73. Es ist schon erinnert worden, dass wegen der gegenseitigen Anziehung aller Körper die Planeten in ihren Bewegungen um die Sonne sich nicht vollkommen genau nach den von Kepler gefundenen Gesetzen bewegen. Dies würde nur dann geschehen können, wenn die Masse jedes Planeten gegen die Masse der Sonne unendlich klein wäre. Denn alsdann würden die Wirkungen der Planeten auf die Sonne und auf einander als verschwindend gegen die Wirkung der Sonne auf die Planeten zu betrachten sein. Abgesehen von einer muthmaasslich stattfindenden gemeinsamen Bewegung des ganzen Systems, würde dann die Sonne in Ruhe verharren und die Planeten würden sich um sie in vollkommenen Ellipsen bewegen. Da

aber die Massen der Planeten, wenn auch sehr klein, doch nicht ganz unmerklich gegen die Masse der Sonne sind, so kann weder die Sonne in Ruhe bleiben, noch kann der Planetenlauf genau elliptisch sein.

So zusammengesetzt aber auch die in aller Schärfe genommenen Bewegungen der Sonne und der Planeten, so wie der die letzteren begleitenden Nebenplaneten, in der That sein mögen, so lassen sich doch mit Hülfe der Mechanik einige allgemeine Gesetze angeben, wonach sich diese Bewegungen stets auf das genaueste richten, Gesetze, die selbst dann befolgt werden würden, wenn die anziehende Kraft nicht dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional, sondern auf irgend eine andere Weise von der Entfernung abhängig wäre. Die folgenden Paragraphen sollen uns diese Gesetze kennen lehren.

I. Das Princip der Erhaltung des Schwerpunktes.

§. 74. Der Begriff und die Haupteigenschaften des Schwerpunktes lassen sich sehr einfach aus der Theorie von der Zusammensetzung gerader Linien ableiten. Da aus derselben Theorie die im ersten Abschnitte vorangestellten Sätze der Dynamik entwickelt worden sind, so halte ich es für angemessen, ehe ich zu dem in der Ueberschrift genannten Princip selbst fortgehe, zu zeigen, wie auf jene Theorie auch die Lehre vom Schwerpunkte gegründet werden kann, wenn ich auch die Hauptsätze dieser Lehre als meinen Lesern schon bekannt annehmen darf.

1) Ist S der Mittelpunkt zwischen zwei Punkten A und B, so sind die geraden Linien SA und SB einander gleich und entgegengesetzt, und folglich die aus ihnen zusammengesetzte Linie Null. Und umgekehrt: Hat ein Punkt S gegen zwei andere A und B eine solche Lage, dass die Zusammensetzung von SA und SB Null giebt, so ist er der Mittelpunkt von AB.

Auf analoge Art kann man einen Punkt S den Mittelpunkt eines Systems von drei oder mehreren Punkten A, B, C, ... nennen, wenn er gegen diese also liegt, dass die aus den Linien SA, SB, SC, ... zusammengesetzte Linie Null ist, d. h. dass von der gebrochenen Linie, welche durch diese Zusammensetzung sich bildet (§. 2), der Endpunkt mit dem Anfangspunkte zusammenfällt, und somit ein geschlossenes Vieleck entsteht.

2) *Eben so, wie ein System von nur zwei Punkten, kann auch ein System von mehreren Punkten nicht mehr als Einen Mittelpunkt haben.* Denn sei, wenn es möglich wäre, von den n Punkten A, B, C, ... nächst S noch S' ein Mittelpunkt. Nun ist $S'A$ aus $S'S$ und SA

zusammengesetzt (§. 2, a), oder, wie wir dieses der Kürze und leichteren Uebersicht wegen schreiben wollen:

$$S'A \equiv S'S + SA \ ,$$

wo das statt (=) gesetzte Zeichen ($\equiv$) andeutet, dass die durch (+) angezeigte Addition oder Zusammensetzung nicht in arithmetischem, sondern in geometrischem Sinne, d. h. auch mit Rücksicht auf die Lage der zusammenzusetzenden Linien (vergl. §. 22, Anm.), ausgeführt werden soll. Eben so ist

$$S'B \equiv S'S + SB, \qquad S'C \equiv S'S + SC, \quad \text{etc.}$$

Addirt man alle diese Formeln, was nach der Natur der geometrischen Zusammensetzung gestattet ist, so kommt:

$$S'A + S'B + \ldots \equiv n \,.\, S'S + SA + SB + \ldots \,.$$

Weil aber S der Mittelpunkt von A, B, ... sein soll, so ist die aus SA, SB, ... zusammengesetzte Linie Null, oder

$$SA + SB + SC + \ldots \equiv 0.$$

Hiermit reducirt sich die vorige Formel auf

$$(n) \qquad S'A + S'B + \ldots \equiv n \,.\, S'S\,,$$

d. h. die Zusammensetzung der von S' nach den Punkten des Systems gezogenen Linien giebt das n-fache der von S' nach dem Mittelpunkte S des Systems gezogenen Linie, also nicht Null, wie es doch sein müsste, wenn auch S' ein Mittelpunkt wäre.

3) Zu den n Punkten A, B, ..., deren Mittelpunkt S ist, mögen jetzt noch irgend andere A', B', ... hinzutreten, und von allen diesen Punkten A, B, ..., A', B', ... sei S' der Mittelpunkt, so besteht zuerst in Bezug auf die Punkte A, B, ... allein die Relation (n), und nächstdem ist

$$S'A + S'B + \ldots + S'A' + S'B' + \ldots \equiv 0,$$

was sich vermöge (n) auf

$$n \,.\, S'S + S'A' + S'B' + \ldots \equiv 0$$

reducirt. Denkt man sich in dieser Formel statt $n \,.\, S'S$ das aus n Gliedern bestehende Aggregat $S'S + S'S + \ldots$ geschrieben, so wird durch sie ausgedrückt, dass S' auch der Mittelpunkt von A', B', ... und von n in S vereinigten Punkten ist; d. h.

Der Mittelpunkt eines Systems von Punkten bleibt unverändert, wenn man einen Theil der Punkte in dem Mittelpunkte, den diese für sich haben, sich vereinigen lässt.

4) Besteht das System aus $p + q$ Punkten, von denen p in P

und q in Q vereinigt sind, und ist S der Mittelpunkt des Systems, so muss

$$p \cdot SP + q \cdot SQ = 0$$

sein, d. h. das p-fache der Linie SP und das q-fache der Linie SQ müssen einander gleich und entgegengesetzt sein. Sind daher die Punkte P, Q und die Zahlen p, q gegeben, so wird man S finden, wenn man die Linie PQ in S so theilt, dass

$$PS : SQ = q : p \ .$$

§. 75. Mit Hülfe der zwei letzten Sätze des vorigen Paragraphen ist es immer leicht, von einer beliebigen Anzahl von Punkten den Mittelpunkt zu bestimmen. Soll von drei Punkten A, B, C (Fig. 27) der Mittelpunkt gefunden werden, so halbire man zuerst AB in S'. Der Mittelpunkt S'' von A, B, C ist alsdann einerlei mit dem von C und von zwei in S' vereinigten Punkten; er wird daher gefunden, wenn man $S'C$ in S'' in dem Verhältnisse von 1 : 2 theilt.

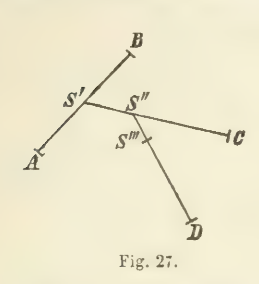


Fig. 27.

Kommt zu A, B, C noch ein vierter Punkt D, so ist der Mittelpunkt von allen vieren einerlei mit dem von D und von drei in S'' zusammenfallenden Punkten und ergiebt sich daher, wenn man $S''D$ in dem Verhältnisse von 1 : 3 theilt; und so fort bei noch mehreren Punkten.

Die Ordnung übrigens, nach welcher man die Punkte eines Systems, um dessen Mittelpunkt zu finden, nach und nach in Betrachtung zieht, ist willkürlich, weil das System nicht mehr als Einen Mittelpunkt hat.

Der Mittelpunkt eines Systems kann auch sehr einfach durch Anwendung von Coordinaten gefunden werden. Zum Verständnisse dieses Verfahrens müssen aber zuvor einige Sätze aus der Lehre von den Projectionen eingeschaltet werden.

Seien A, B, C, ... mehrere Punkte im Raume. Man projicire sie, sei es durch Parallellinien auf eine Ebene, oder durch Parallelebenen auf eine gerade Linie, und nenne A', B', C', ... die projicirten Punkte. Alsdann erhellet aus den ersten Elementen, dass in dem einen, wie in dem anderen Falle, wenn $AB = CD$, auch $A'B' = C'D'$ ist; d. h. *Sind zwei gerade Linien einander gleich und parallel, so sind es auch ihre Projectionen.*

Ist ferner eine Linie GH aus mehreren anderen AB, CD, EF zusammengesetzt, so ist auch die Projection der ersteren aus den Pro-

jectionen der letzteren zusammengesetzt. Denn denkt man sich jede der Linien AB, CD, EF parallel mit sich fortgetragen, bis A mit G, C mit B, E mit D zusammenfällt, so muss zufolge der Voraussetzung auch F mit H zusammenfallen. Bei dieser Lage der vier Linien, wo sie ein geschlossenes Viereck bilden, thun dasselbe auch ihre Projectionen, und es ist folglich die Projection von GH aus den Projectionen der drei übrigen zusammengesetzt. Dieselbe Relation zwischen den Projectionen muss daher auch bei der anfänglichen Lage der Linien stattgefunden haben, weil nach dem vorigen Satze durch die parallele Fortbewegung der Linien die Richtung und Grösse ihrer Projectionen sich nicht geändert hat.

Eine unmittelbare Folge hiervon ist, dass, wenn die Zusammensetzung mehrerer Linien Null giebt, sich auch die Zusammensetzung ihrer Projectionen auf Null reducirt. Ist daher

$$SA + SB + SC + \ldots \equiv 0 ,$$

so ist auch

$$S'A' + S'B' + S'C' + \ldots \equiv 0 ,$$

d. h. *die Projection S' des Mittelpunktes S mehrerer Punkte A, B, C, ... ist zugleich der Mittelpunkt der Projectionen A', B', C', ... dieser Punkte.*

Man füge nun ein System dreier coordinirter Axen X, Y, Z hinzu und setze in Bezug auf dasselbe die Coordinaten von S gleich σ, σ', σ''; die von A gleich α, α', α''; die von B gleich β, β', β''; etc. Man betrachte ferner S', A', B', ... als die Projectionen von S, A, B, ... auf X durch Parallelebenen mit YZ, so ist, wenn O den Anfangspunkt der Coordinaten oder den gemeinsamen Durchschnitt von X, Y, Z bezeichnet:

$$OS' = \sigma , \qquad OA' = \alpha , \qquad OB' = \beta , \quad \text{etc.};$$

folglich

$$S'A' = \alpha - \sigma , \qquad S'B' = \beta - \sigma , \quad \text{etc.}$$

Da letztere Linien alle in derselben Geraden X liegen, so ist die aus ihnen zusammengesetzte gleich ihrer algebraischen Summe, also

$$= (\alpha + \beta + \ldots) - n\sigma ,$$

wo n, wie im Vorigen, der Anzahl der Punkte A, B, ... gleich ist; und weil diese Summe Null sein soll, so wird

$$\sigma = \frac{1}{n} (\alpha + \beta + \ldots) .$$

Ganz dieselbe Relation muss aber auch zwischen den Coordinaten in Bezug auf jede der beiden anderen Axen statthaben, also:

$$\sigma' = \frac{1}{n}(\alpha' + \beta' + \ldots) \quad \text{und} \quad \sigma'' = \frac{1}{n}(\alpha'' + \beta'' + \ldots)\ ,$$

wodurch die Coordinaten des Mittelpunktes gefunden sind.

Besteht das System aus $a + b + \ldots$ Punkten, von denen a in A, b in B, etc. vereinigt sind, so sind nach denselben Formeln die Coordinaten des Mittelpunktes S

$$\sigma = \frac{a\alpha + b\beta + \ldots}{a + b + \ldots}, \qquad \sigma' = \frac{a\alpha' + b\beta' + \ldots}{a + b + \ldots},$$

$$\sigma'' = \frac{a\alpha'' + b\beta'' + \ldots}{a + b + \ldots}.$$

Man bemerke noch, dass bei diesem System die geometrische Relation zwischen S, A, B, ... durch die Formel

$$a\ .\ SA + b\ .\ SB + \ldots \equiv 0$$

ausgedrückt wird.

§. 76. Lassen wir jetzt die n Punkte A, B, C, ... sich beliebig zu bewegen anfangen und suchen die Art und Weise zu bestimmen, auf welche von ihren Bewegungen die Bewegung ihres Mittelpunktes S abhängt. Seien zu dem Ende S_0, A_0, B_0, C_0, ... und S_1, A_1, B_1, C_1, ... die Oerter, welche S, A, B, C, ... in zwei beliebigen Zeitpunkten T_0 und T_1 einnehmen. Nun ist (§. 2, a), wie auch die vier Punkte A_0, S_0, S_1, A_1 liegen mögen:

$$A_0A_1 \equiv A_0S_0 + S_0S_1 + S_1A_1\ ,$$

und eben so

$$B_0B_1 \equiv B_0S_0 + S_0S_1 + S_1B_1\ ,$$

$$C_0C_1 \equiv C_0S_0 + S_0S_1 + S_1C_1\ ,$$

u. s. w.

Addirt man diese n Formeln und berücksichtigt dabei, dass, weil S in jedem Zeitpunkte der Mittelpunkt von A, B, C, ... sein soll,

$$S_1A_1 + S_1B_1 + S_1C_1 + \ldots \equiv 0 \text{ und } S_0A_0 + S_0B_0 + \ldots \equiv 0\ ,$$

also auch

$$A_0S_0 + B_0S_0 + C_0S_0 + \ldots \equiv 0$$

ist, so kommt:

$$a) \qquad A_0A_1 + B_0B_1 + C_0C_1 + \ldots \equiv n\ .\ S_0S_1.$$

Um die Bedeutung dieses Resultats zu verstehen, denke man sich einen Punkt P hinzu, dessen Bewegung aus denen der Punkte A, B, C, ... zusammengesetzt sei. Nach der in §. 6 von der zusammengesetzten Bewegung gegebenen Definition ist dann für die Zeitpunkte T_0 und T_1:

$$P_0P_1 \equiv A_0A_1 + B_0B_1 + C_0C_1 + \dots,$$

folglich wegen (α) auch

$$P_0P_1 \equiv n \,.\, S_0S_1 \equiv S_0S_1 + S_0S_1 + \dots .$$

Die aus den Bewegungen der n Punkte A, B, C, ... zusammengesetzte Bewegung und diejenige, welche erhalten wird, wenn man die Bewegung des Mittelpunkts S der n Punkte n-mal mit ihr selbst zusammensetzt, sind daher einander gleich, indem jede von beiden gleich der Bewegung von P ist; oder kurz: die n-fache Bewegung von S ist aus den Bewegungen von A, B, C, ... zusammengesetzt.

Es folgt hieraus weiter, dass in jedem Zeitpunkte die aus den Geschwindigkeiten von A, B, C, ... zusammengesetzte Geschwindigkeit und die n-fache Geschwindigkeit von S einerlei Richtung und Grösse haben, nämlich die gleichzeitige Richtung und Grösse der Geschwindigkeit von P (§. 12): d. h. die n-fache Geschwindigkeit von S ist aus den Geschwindigkeiten von A, B, C, ... zusammengesetzt; und dasselbe gilt wörtlich auch von den beschleunigenden Kräften, durch welche die Bewegungen von S, A, B, C, ... hervorgebracht werden (§. 24).

Wir wollen uns jetzt A, B, C, ... nicht mehr als einzelne Punkte des Systems, sondern als die Mittelpunkte von Partialsystemen von resp. a, b, c, ... Punkten denken, aus denen das ganze System, dessen Mittelpunkt, wie vorhin, S heisse, zusammengesetzt sei. Erhalten nun alle diese $a + b + c + \dots$ Punkte irgend beliebige Bewegungen, und fangen damit auch A, B, C, ... und S sich zu bewegen an, so wird die Bewegung des S von den Bewegungen der A, B, C, ... dergestalt abhängen, dass für je zwei Zeitpunkte T_0 und T_1

$$(\alpha^*) \quad a \,.\, A_0A_1 + b \,.\, B_0B_1 + \dots \equiv (a + b + \dots)\, S_0S_1$$

ist.

Es erhellet dieses sogleich daraus, dass man nach §. 74, 3 für S denselben Ort und folglich auch dieselbe Bewegung findet, wenn man annimmt, dass die a Punkte, von denen A der Mittelpunkt ist, in A, eben so die folgenden b Punkte in ihrem Mittelpunkte B, u. s. w. vereinigt werden und in dieser Vereinigung mit A, B, ... fortgehen. Denn unter dieser Annahme wird durch (α^*) in Bezug auf das System von $a + b + c + \dots$ Punkten dieselbe Relation, wie vorhin durch (α) rücksichtlich des Systems von n Punkten, ausgedrückt.

Aus (α^*) ist aber auf gleiche Art, wie vorhin aus (α), zu schliessen, dass die $(a + b + \dots)$-fache Bewegung von S aus der a-fachen Bewegung von A, der b-fachen von B, u. s. w. zusammengesetzt ist, und dass dieselbe Beziehung zwischen den Ebensovielfachen der Ge-

schwindigkeiten von S, A, B, ..., so wie auch der Kräfte, durch welche diese Bewegungen hervorgebracht werden, statt hat.

§. 77. Zusätze. *a*) Die Bewegung eines Punktes P wird nach dem Vorigen das a-fache der Bewegung eines anderen Punktes A genannt, wenn sie aus a einander und der Bewegung von A gleichen Bewegungen zusammengesetzt ist, und wenn daher für je zwei Zeitpunkte T_0 und T_1

$$P_0 P_1 \equiv a \,.\, A_0 A_1$$

ist. Die Zahl a ist hierbei eine ganze positive Zahl. Man sieht aber bald, dass die durch letztere Formel gegebene Definition sich ohne Widerspruch auch dann anwenden lässt, wenn a irgend eine gebrochene positive, ja selbst eine ganze oder gebrochene negative Zahl ist, in welchem letzteren Falle die Linien $A_0 A_1$ und $P_0 P_1$ stets einander entgegengesetzte Richtung haben müssen.

Sei in diesem allgemeineren Sinne das a-fache der Bewegung von A dem b-fachen der Bewegung von B gleich. Für irgend drei Zeitpunkte T_0, T_1 und T_2 wird dann sein:

$$a \,.\, A_0 A_1 \equiv b \,.\, B_0 B_1 \quad \text{und} \quad a \,.\, A_1 A_2 \equiv b \,.\, B_1 B_2.$$

Die Dreiecke $A_0 A_1 A_2$ und $B_0 B_1 B_2$ (Fig. 28) sind hiernach in dem Verhältnisse von $b : a$ einander ähnlich, und in direct oder verkehrt ähnlicher Lage, je nachdem der Exponent $b : a$ positiv oder negativ ist. Da dieses auch für je drei andere Zeitpunkte gilt, so schliessen wir:

Dass, wenn das a-fache der Bewegung von A dem b-fachen der Bewegung von B gleich ist, die Bahnen von A und B selbst in dem Verhältnisse von b : a einander ähnlich sind und direct oder verkehrt ähnlich liegen, je nachdem b : a positiv oder negativ ist, und dass A und B in jedem Zeitpunkte sich an ähnlich liegenden Stellen ihrer Bahnen befinden.

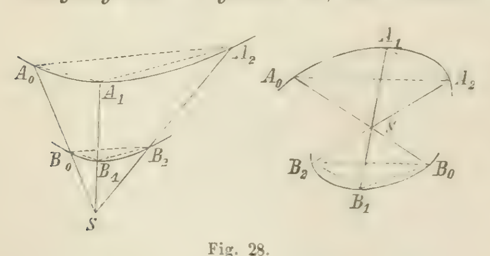


Fig. 28.

Eine weitere Folge hiervon ist, *dass auch die Geschwindigkeiten von A und B sich wie b und a verhalten, und einerlei oder entgegengesetzte Richtungen haben, je nachdem b : a positiv oder negativ ist. Und dasselbe gilt auch von den Kräften, durch welche die Bewegungen von A und B erzeugt werden.* Denn indem man $T_0 T_1$ und $T_1 T_2$ als zwei einander gleiche Zeitelemente annimmt, sind die zur Zeit T_1

stattfindenden Kräfte sowohl, als die Geschwindigkeiten, nichts Anderes als Linien, welche aus den in dem Verhältnisse von $b:a$ einander ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren $A_0 A_1 A_2$ und $B_0 B_1 B_2$ auf gleiche Weise bestimmt werden, und welche daher ebenfalls in dem Verhältnisse $b:a$ zu einander stehen und eine ähnliche, d. i. parallele, Lage haben müssen.

b) Sind die Bewegungen zweier Punkte A und B in dem Verhältnisse von $1 : -1$, also einander gleich und entgegengesetzt, ist also für je zwei Zeitpunkte $A_0 A_1 \equiv B_1 B_0$, so ist die aus ihnen zusammengesetzte Bewegung, folglich auch die des Mittelpunktes von A und B, Null, d. h. der Mittelpunkt ruht.

Sind a und b ganze positive Zahlen, und ist das a-fache der Bewegung von A dem b-fachen der Bewegung von B gleich und entgegengesetzt, so muss aus gleichem Grunde der Mittelpunkt von A und B, wenn dabei A als ein a-facher und B als ein b-facher Punkt genommen wird, in Ruhe sein; d. h.

Stehen die Bewegungen zweier Punkte A und B in dem numerischen Verhältnisse von $-b:a$, so schneiden sich alle successiven Lagen der Linie AB in einem und demselben Punkte S, und theilen sich daselbst in dem Verhältnisse von $a:b$.

Man gewahrt leicht, dass dieser Satz auch dann gilt, wenn das Verhältniss $-b:a$ irrational, so wie auch dann, wenn es positiv ist, in welchem Falle S ausserhalb A und B liegt; und dass dieser Punkt S in jedem Falle gegen die zwei von A und B beschriebenen Curven eine ähnliche Lage hat.

c) Von zwei Bewegungen, die nach der jetzt erklärten Weise in einem numerischen Verhältnisse zu einander stehen, kann man bezeichnender sagen, dass sie in diesem Verhältnisse einander ähnlich sind. So wie ferner nach §. 4 A gegen F dieselbe Bewegung hat, wie B gegen G, wenn stets $FA \equiv GB$ ist, so kann man die relativen Bewegungen von A gegen F und von B gegen G in dem Verhältnisse von $b:a$ einander ähnlich nennen, wenn stets

$$a \,.\, FA \equiv b \,.\, GB$$

ist. Sind F und G feste Punkte, so sind in demselben Verhältnisse auch die absoluten Bewegungen von A und B einander ähnlich.

Hiernach sind z. B. die Bewegungen eines a-fachen und eines b-fachen Punktes um ihren Mittelpunkt stets in dem Verhältnisse von $-b:a$ einander ähnlich; ruht aber der Mittelpunkt, so sind es auch die absoluten Bewegungen.

Anmerkung. Aus dem Bisherigen geht hervor, wie auf den Begriff der Bewegung alle vier Species der Rechenkunst angewendet werden können. Die Addition oder Zusammensetzung der Bewegungen ist bereits in §. 6 erklärt worden. Von der Bewegung eines Punktes A die Bewegung eines anderen B subtrahiren wird nichts Anderes heissen, als die Bewegung eines Punktes C bestimmen, welche, zu der letzteren addirt, die erstere giebt. Es wird daher für je zwei Zeitpunkte

$$A_0 A_1 \equiv B_0 B_1 + C_0 C_1$$

sein müssen, wofür man auch

$$A_0 A_1 - B_0 B_1 \equiv C_0 C_1 \quad \text{oder} \quad A_0 A_1 + B_1 B_0 \equiv C_0 C_1$$

schreiben kann. — Die Multiplication einer Bewegung mit irgend einer reellen Zahl ist im Vorstehenden erklärt worden. Eine Bewegung aber mit einer Zahl a dividiren, ist eben so viel, als sie mit der Zahl $\frac{1}{a}$ multipliciren.

§. 78. Der Mittelpunkt eines Systems materieller Punkte, deren Massen insgesammt einander gleich sind, wird der Schwerpunkt des Systems genannt.

Einen materiellen Körper von endlicher Ausdehnung kann man sich immer als ein Aggregat von Theilchen denken, die an Masse sämmtlich einander gleich und so klein sind, dass ihre Dimensionen gegen die des Körpers nicht in Betracht kommen, dass also sie selbst als materielle Punkte angesehen werden können. Der Mittelpunkt aller dieser Theilchen wird der Schwerpunkt des Körpers zu nennen sein.

Bei einer Kugel, die in gleicher Entfernung von ihrem Mittelpunkte gleiche Dichtigkeit hat, fällt der Schwerpunkt mit dem Mittelpunkte zusammen. Denn man kann die Theilchen von gleicher Masse, in welche man sich eine solche Kugel zerlegt denkt, paarweise so zusammennehmen, dass die zwei Theilchen jedes Paares den Mittelpunkt der Kugel in der Mitte zwischen sich liegen haben; es wird daher auch von allen Paaren in Vereinigung der Mittelpunkt identisch mit dem Mittelpunkte der Kugel sein. — Auf gleiche Art wird auch jeder andere Körper, der einen Mittelpunkt der Figur hat, und dessen Masse in Bezug auf diesen Punkt symmetrisch vertheilt ist, denselben Punkt zu seinem Schwerpunkte haben. Insbesondere müssen daher bei jedem Himmelskörper (§. 69) sein geometrischer Mittelpunkt und sein Schwerpunkt identische Punkte sein.

Seien A, B, C, ... die Schwerpunkte mehrerer Körper. Man denke sich diese Körper in unendlich kleine, an Masse einander gleiche Theilchen zerlegt; bestehe der erste aus a, der zweite aus b, der dritte aus c, etc. solcher Theilchen, und verhalten sich daher die Zahlen $a, b, c, \ldots$ wie die Massen der Körper. Soll nun der Schwerpunkt S' aller Theilchen der zwei ersten Körper, oder kurz: der ge-

meinschaftliche Schwerpunkt dieser Körper, gefunden werden, so hat man nach §. 74, 3) und 4) die Linie AB in S' im Verhältnisse von $b : a$ zu theilen; d. h. *der gemeinschaftliche Schwerpunkt zweier Körper liegt mit den Schwerpunkten der einzelnen in gerader Linie, und theilt dieselbe im umgekehrten Verhältnisse der Massen der Körper.*

Man kann nun die zwei ersten Körper als einen einzigen betrachten, dessen Schwerpunkt S' ist, und dessen Masse aus $a + b$ Theilchen besteht, und wird hiernach den gemeinschaftlichen Schwerpunkt S'' der drei ersten Körper finden, wenn man $S'C$ in S'' im Verhältnisse von $c : a + b$, d. i. im Verhältnisse der Masse des dritten Körpers zur Summe der Massen der beiden ersten, theilt; und so fort bei noch mehreren Körpern. Der somit erhaltene Schwerpunkt wird aber stets derselbe sein, welches auch die Ordnung sei, in welcher man die Körper nach und nach berücksichtigt. Denn eben so wenig, als ein System von Punkten mehr als einen Mittelpunkt haben kann, kann auch ein einzelner Körper, oder ein System von Körpern mehr als einen Schwerpunkt haben.

Zusatz. Statt dieses graphischen Verfahrens, den Schwerpunkt S zu finden, kann man auch die in §. 75 entwickelten Formeln zur Berechnung der Coordinaten von S aus denen von A, B, ... anwenden. Dass man in diesen Formeln die Coëfficienten a, b, ... jetzt als die Massen der Körper zu nehmen hat, bedarf keiner Erörterung.

Eben so erhellet von selbst, dass, a, b, ... in derselben Bedeutung genommen, die in §. 57 für den Mittelpunkt aufgestellte Formel

$$a \,.\, SA + b \,.\, SB + \ldots = 0$$

für den Schwerpunkt gilt, und dass auf gleiche Art, wie wir dort in Bezug auf den Mittelpunkt fanden, die Projection des Schwerpunktes eines Systems von Körpern, sei es auf eine Ebene, oder auf eine Gerade, einerlei mit dem Schwerpunkte der projicirten Körper ist.

§. 79. Bedeuten wiederum A, B, C,... die Schwerpunkte mehrerer Körper, die aus resp. a, b, c,... der Masse nach sämmtlich einander gleichen Theilchen bestehen, so ist bei beliebigen Bewegungen dieser Körper die $(a + b + c + \ldots)$-fache Bewegung ihres gemeinschaftlichen Schwerpunktes S aus der a-fachen Bewegung von A, der b-fachen von B, der c-fachen von C, etc. zusammengesetzt (§. 76), oder, weil es hierbei nur auf die gegenseitigen Verhältnisse der Zahlen a, b, c,... ankommt, und diese sich wie die Massen der Körper verhalten:

Bei einem System sich beliebig bewegender Körper ist die mit der

Summe ihrer Massen multiplicirte Bewegung ihres gemeinschaftlichen Schwerpunktes zusammengesetzt aus den mit den resp. Massen multiplicirten Bewegungen der Schwerpunkte der einzelnen Körper.

Und dieselbe Relation, wie zwischen den Bewegungen der Schwerpunkte, findet auch zwischen ihren Geschwindigkeiten und den beschleunigenden Kräften statt. Da aber das Product aus der Masse in die beschleunigende Kraft die bewegende Kraft genannt wird (§. 61), so können wir unseren Satz, insofern er die Kräfte betrifft, auch also ausdrücken:

Der Schwerpunkt eines Systems sich irgendwie bewegender Körper bewegt sich eben so, als wenn in ihm die Massen der Körper vereinigt wären, und auf diese vereinigte Masse eine bewegende Kraft wirkte, zusammengesetzt aus denen, welche die Bewegungen der Körper selbst hervorbringen: oder — was dasselbe ist — *der Schwerpunkt bewegt sich eben so, als wenn den bewegenden Kräften der Körper gleiche und parallele Kräfte auf die in ihm vereinigte Masse wirkten.*

Folgerungen. *a*) *Von mehreren sich geradlinig und gleichförmig bewegenden Körpern bewegt sich auch der Schwerpunkt geradlinig und gleichförmig, oder ist in Ruhe.* Denn da die Geschwindigkeit jedes Körpers stets dieselbe Richtung und Grösse haben soll, so muss auch die, aus diesen mit den resp. Massen multiplicirten Geschwindigkeiten, zusammengesetzte Geschwindigkeit der Richtung und Grösse nach constant sein. In dem besonderen Falle, wenn die Zusammensetzung Null giebt, ruht der Schwerpunkt.

b) Da bei einem System sich anziehender Körper die bewegenden Kräfte, mit denen je zwei derselben gegen einander getrieben werden, einander gleich und entgegengesetzt sind (§. 61), so wird durch sie die Bewegung des Schwerpunktes nicht geändert, und wir schliessen daher:

Der Schwerpunkt eines Systems von Körpern, auf welche keine anderen Kräfte, als ihre gegenseitigen Anziehungen, wirken, bewegt sich geradlinig und gleichförmig, oder ist in Ruhe.

Man nennt diesen Satz, der übrigens, wie von sich anziehenden, gleicherweise auch von sich abstossenden Körpern gelten muss, das Princip der Erhaltung des Schwerpunktes. Ihm zufolge können wir die Bewegung des Schwerpunktes aller zu unserem Sonnensystem gehörigen Körper als geradlinig und gleichförmig, wenigstens auf lange Zeit hinaus, ansehen. Denn die Kräfte, mit denen diese Körper von anderen Sonnen angezogen werden mögen, sind wegen der unermesslichen Entfernungen jener Sonnen von uns so gering, dass ihre Wirkungen vielleicht erst nach Jahrtausenden

für uns merkbar werden. Bis jetzt wenigstens hat man kaum erst eine Spur von der Richtung, nach welcher sich unser Sonnensystem bewegt, wahrnehmen können.

c) Sind mehrere sich anziehende Körper, und folglich auch ihr Schwerpunkt, Anfangs in Ruhe, so wird letzterer auch bei den darauf folgenden durch die Anziehung bewirkten Bewegungen der Körper in Ruhe verharren, und die Körper werden, durch ihre Anziehung einander immer näher gebracht, zuletzt gleichzeitig in ihm zusammentreffen.

§. 80. Es wird nicht überflüssig sein, das Princip vom Schwerpunkte uns an dem möglich einfachsten Falle, an einem System von nur zwei Körpern, zu erläutern. Setzen wir zuerst voraus, dass dieselben einander nicht anziehen, und dass daher ihre Schwerpunkte, welche A und B heissen, sich geradlinig und gleichförmig bewegen. In Bezug auf einen beliebig wo angenommenen festen Punkt C (Fig. 29) habe ein anderer D dieselbe Bewegung, welche B gegen A hat; sei also stets $CD \equiv AB$ (§. 4). Weil auf A und B keine Kräfte wirken sollen, so ist auch bei der Bewegung von D die Kraft gleich Null (§. 24, *a*), und daher diese Bewegung ebenfalls geradlinig und gleichförmig. Es beschreibt mithin die Linie CD eine Ebene, und dieser Ebene ist die Linie $AB \equiv CD$ stets parallel; also:

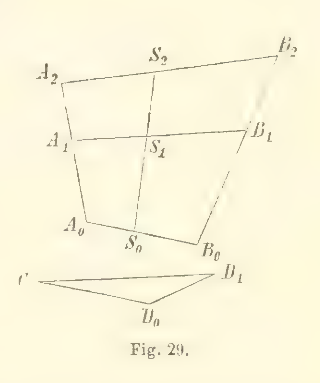


Fig. 29.

Bewegen sich zwei Punkte A und B geradlinig und gleichförmig, so ist die sie verbindende Gerade stets einer und derselben Ebene parallel.

Um die Lage dieser Ebene zu bestimmen, seien A_0, B_0 und A_1, B_1 die Oerter von A, B in irgend zwei Zeitpunkten T_0 und T_1. Die gesuchte Ebene muss so liegen, dass sie mit A_0B_0 und A_1B_1, als zwei successiven Lagen der AB, zugleich parallel ist.

Setzt man T_0T_1 gleich der Zeiteinheit, so werden durch A_0A_1 und B_0B_1 die Geschwindigkeiten von A und B dargestellt; und wenn man noch $CD_0 \equiv A_0B_0$ und $CD_1 \equiv A_1B_1$ macht, so ist D_0D_1 die Geschwindigkeit von D, oder auch von B bei der relativen Bewegung dieses Punktes gegen A.

Seien a und b die Massen der beiden Körper und S ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt. Theilt man daher A_0B_0 in S_0, A_1B_1 in

S_1, etc. in dem Verhältnisse von $b:a$, so sind S_0, S_1, etc. die Oerter von S in den Zeitpunkten T_0, T_1, etc. Wegen der geradlinigen und gleichförmigen Bewegungen von A und B bewegt sich auch S geradlinig und gleichförmig (§. 79, a), welches, in Verbindung mit dem Vorigen, die nachstehenden geometrischen Sätze giebt:

Werden zwei gerade Linien A_0A_2 und B_0B_2 in A_1 und B_1 in gleichen Verhältnissen ($= T_0T_1 : T_1T_2$) getheilt, so sind die drei geraden Linien A_0B_0, A_1B_1, A_2B_2 einer und derselben Ebene parallel.

***Je drei Punkte S_0, S_1, S_2, durch welche diese drei Linien in** gleichen Verhältnissen ($= b:a$) getheilt werden, liegen in gerader Linie, und dieses so, dass S_0S_2 in S_1 in demselben Verhältnisse, wie A_0A_2 in A_1 oder B_0B_2 in B_1, getheilt wird.*

Die drei Linien A_0A_2, B_0B_2 und S_0S_2 sind gleichfalls einer und derselben Ebene parallel.

Der dritte Satz folgt aus dem ersten, weil A_0B_0 und A_2B_2 in S_0 und S_2 in gleichen Verhältnissen getheilt werden*).

§. 81. Nehmen wir jetzt an, dass die zwei Körper, deren Schwerpunkte A und B, und deren Massen a und b sind, nach dem Newton'schen Gesetze einander anziehen, und dass daher auf A und B die resp. nach B und A gerichteten Kräfte

$$\frac{Kb}{AB^2} \quad \text{und} \quad \frac{Ka}{AB^2}$$

wirken. Zur Zeit T_0 seien A_0 und B_0 die Oerter von A und B, und A_0A_1 und B_0B_1 ihre Geschwindigkeiten. Um hieraus (§. 25) die Bewegungen von A und B zu bestimmen, setze man wie vorhin voraus, dass um einen festen Punkt C ein anderer D dieselbe Bewegung, wie B gegen A, habe, und bestimme D_0 und D_1, indem man

$$CD_0 \equiv A_0B_0 \quad \text{und} \quad CD_1 \equiv A_1B_1$$

macht. Hiernach ist zur Zeit T_0, D_0 der Ort und D_0D_1 die Geschwindigkeit von D; die auf D wirkende Kraft aber ist (§. 65)

$$= \frac{K(a+b)}{AB^2} = \frac{K(a+b)}{CD^2},$$

*) In diesen aus der geradlinigen und gleichförmigen Bewegung zweier Körper und ihres Schwerpunktes entspringenden Sätzen sind, wie man sieht, zugleich die Grundeigenschaften des hyperbolischen Paraboloids oder der Fläche enthalten, welche von einer Geraden erzeugt wird, die, stets dieselben zwei Geraden schneidend, sich parallel mit einer Ebene fortbewegt.

und nach C gerichtet. Der Punkt D beschreibt demnach mit constanter Flächengeschwindigkeit gleich CD_0D_1 um C, als den einen Brennpunkt, einen Kegelschnitt, der von D_0D_1 in D_0, wo sich D zur Zeit T_0 befindet, berührt wird, und dessen halber Parameter (§. 55)

$$= \frac{cc}{Trr} = \frac{cc}{K(a+b)} = \frac{(2 \,.\, CD_0D_1)^2}{K(a+b)}$$

ist.

Hiernach kann der Ort von D für jeden Zeitpunkt als bekannt angesehen werden. Dasselbe gilt auch von dem Orte des Schwerpunkts S der beiden Körper. Denn die Bewegung von S ist geradlinig und gleichförmig und wird aus den Oertern A_0, B_0 der Punkte A, B und ihren Geschwindigkeiten A_0A_1, B_0B_1 zur Zeit T_0 eben so, wie in §. 80, gefunden, weil die gegenseitige Anziehung der Körper auf seine Bewegung keinen Einfluss hat.

Mit den Oertern von D und S sind aber auch sogleich die von A und B gefunden. Denn weil die Linie $AB \equiv CD$ ist und von S in dem Verhältnisse von $b:a$ getheilt wird, so hat man nur

$$SA \equiv \frac{b}{a+b} DC \quad \text{und} \quad SB \equiv \frac{a}{a+b} CD$$

zu machen.

Die Bewegungen von A und B gegen S sind demnach einander, sowie der Bewegung von D gegen C oder von B gegen A, in den Verhältnissen von $-b : a : a+b$ ähnlich (§. 77, c). Um sich von diesen Bewegungen eine anschauliche Vorstellung zu machen, denke man sich durch S eine mit CD_0D_1 parallele Ebene gelegt. Indem dieselbe, sich parallel bleibend, mit S geradlinig und gleichförmig fortgeht, bewegen sich in ihr A und B um den zwischen ihnen liegenden Punkt S, als den gemeinschaftlichen Brennpunkt, in einander ähnlichen, aber verkehrt liegenden Kegelschnitten, deren Dimensionen sich umgekehrt wie die Massen von A und B verhalten.

II. Das Princip der Erhaltung der Flächen.

§. 82. Es ist dieses Princip eine Verallgemeinerung des schon in §. 37 bewiesenen Satzes, dass die Flächengeschwindigkeit des Radius Vector eines Körpers durch eine Kraft, welche in der Richtung des Radius wirkt, nicht geändert wird. Um das Princip jetzt in seiner Allgemeinheit zu entwickeln, wollen wir uns zuerst einen sich geradlinig und gleichförmig bewegenden Körper A denken und diese Be-

wegung auf einen irgendwo angenommenen festen Punkt O Fig. 30) beziehen. Weil Dreiecke von gleicher Höhe sich wie ihre Grundlinien verhalten, so wird bei der gedachten Bewegung der nach dem Körper von O aus gezogene Radius OA der Zeit proportionale Flächen beschreiben, in jeder Zeiteinheit eine Fläche gleich OFG, wenn FG der von A in einer Zeiteinheit beschriebene Weg ist; mit anderen Worten: es wird OFG die constante Flächengeschwindigkeit des Radius sein, wenn FG die constante Geschwindigkeit des Körpers ist.

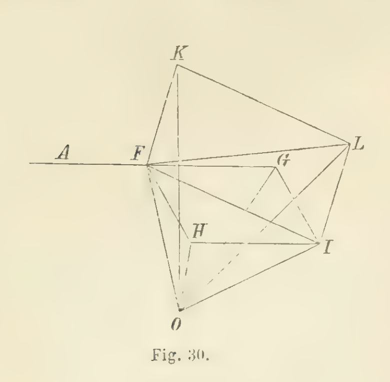


Fig. 30.

Erhalte nun der Körper, in F angelangt, einen Stoss, welcher ihm eine in der Ebene OFG begriffene Geschwindigkeit $\equiv FH$ ertheile. Man construire das Parallelogramm $HFGI$, so ist vom Zeitpunkte des Stosses an FI die Geschwindigkeit des Körpers und OFI die Flächengeschwindigkeit des Radius. Nach §. 37, *b*) ist aber *mit gehöriger Rücksicht auf die Zeichen* — eine Rücksicht, die auch im später Folgenden nie vernachlässigt werden darf — das Dreieck

$$OFI = OFG + OFH ,$$

d. h. die neue Flächengeschwindigkeit ist die Summe der anfänglichen und derjenigen, welche in Folge des Stosses allein statt haben würde.

Zusatz. Man ziehe in der Ebene OFG von F aus noch beliebig die Linie FK und construire das Parallelogramm $IFKL$, so ist das Dreieck

$$OFL = OFI + OFK = OFG + OFH + OFK .$$

Dabei ist FL aus FI und FK, d. i. aus FG, FH und FK zusammengesetzt, weil es FI aus FG und FH ist. Ist daher von mehreren, von einem Punkte F ausgehenden und in einer Ebene enthaltenen, geraden Linien die eine FL aus den übrigen FG, FH, FK zusammengesetzt, so ist auch von den Dreiecken, welche diese Linien zu Grundlinien und einen beliebigen Punkt O der Ebene zur gemeinschaftlichen Spitze haben, das Dreieck über der ersteren Linie der Summe der Dreiecke über den letzteren gleich. — Giebt die Zusammensetzung der Linien FG, FH,... Null, so ist auch die Summe der Dreiecke OFG, OFH,... gleich Null.

§. 83. Betrachten wir jetzt zwei sich in einer Ebene geradlinig und gleichförmig bewegende Körper A und B; seien FG und PQ (Fig. 31) die Geschwindigkeiten derselben, also OFG und OPQ die Flächengeschwindigkeiten in Bezug auf den beliebigen Punkt O der Ebene. Seien ferner F und P zwei gleichzeitige Oerter der Körper. In diesen angelangt, sollen sie nach direct entgegengesetzten Richtungen zwei einander (statisch) gleiche Stösse erhalten, also Stösse, welche ihnen nach FP und PF gerichtete Geschwindigkeiten FH und PR ertheilen, die sich umgekehrt wie die Massen a und b von A und B verhalten. Vom Zeitpunkte der Stösse an werden nach §. 82 die Flächengeschwindigkeiten

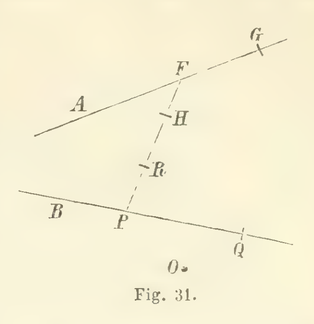


Fig. 31.

$$= OFG + OFH \quad \text{und} \quad = OPQ + OPR$$

sein. Es verhalten sich aber die Dreiecke OFH und OPR ihren absoluten Werthen nach wie

$$FH : PR = b : a$$

und haben entgegengesetzte Zeichen, weil die Richtungen von FH und PR einander entgegengesetzt sind. Mithin ist

$$a \,.\, OFH + b \,.\, OPR = 0 \;,$$

und folglich

$$a\,(OFG + OFH) + b\,(OPQ + OPR) = a \,.\, OFG + b \,.\, OPQ \;,$$

d. h. die Summe der Flächengeschwindigkeiten, jede multiplicirt mit der Masse des Körpers, dem sie zugehört, ist durch die Stösse nicht geändert worden.

Eben so wenig wird diese Summe sich ändern, wenn die Körper noch mehrere Male, jedesmal gleichzeitig, zwei einander gleiche und direct entgegengesetzte Stösse erhalten; also auch nicht, wenn sie sich anziehen (vergl. §. 61). Hat man demnach zwei sich in einer Ebene bewegende Körper, auf welche keine anderen stetigen Kräfte. als ihre gegenseitige Anziehung, wirken, und multiplicirt man die auf irgend einen festen Punkt der Ebene bezogene Flächengeschwindigkeit eines jeden mit seiner Masse, so ist, wie auch die Anziehung von der gegenseitigen Entfernung der Körper abhängen mag, die Summe dieser Producte eine während der ganzen Bewegung constant bleibende Grösse; oder mit anderen Worten, da jede mit constanter Geschwindigkeit sich ändernde Grösse der Zeit proportional zu- oder abnimmt:

Die Summe der von irgend einer Zeit an von den Radien der beiden Körper beschriebenen und mit ihren Massen multiplicirten Flächen wächst der Zeit proportional.

§. 84. Das in §. 83 erhaltene Resultat lässt sich leicht auf drei und mehrere sich in einer Ebene bewegende Körper ausdehnen. Denn setzen wir zuerst voraus, dass die drei Körper A, B, C sich nicht anziehen, und sich daher jeder geradlinig und gleichförmig bewege, so ist von den Flächengeschwindigkeiten der Radien OA, OB, OC jede für sich constant, also auch die Summe der Producte aus ihnen in die resp. Massen der Körper. Auch wird diese Summe nach §. 83 unverändert bleiben, wenn irgend zweien der drei Körper gleichzeitig zwei einander gleiche und direct entgegengesetzte Stösse ertheilt werden; also auch dann, wenn sich Stösse dieser Art, sei es an demselben Körperpaare, oder abwechselnd an verschiedenen Paaren, wiederholen; also auch dann, wenn sich die drei Körper anziehen. Denn man kann sich die gegenseitige Anziehung von A, B und C offenbar auch so vorstellen, dass in unendlich kleinen Intervallen hinter einander zuerst etwa A und B, hierauf A und C, hierauf B und C, dann wiederum A und B, und in dieser Ordnung fort, durch gleiche Stösse gegen einander getrieben werden.

Auf ähnliche Art ist der Beweis bei noch mehreren sich anziehenden Körpern zu führen.

§. 85. Bewegen sich die einander anziehenden Körper A, B, C,... nicht in einer Ebene, so seien A', B', C',... ihnen an Masse gleiche Körper, die sich in einer beliebig gewählten Ebene, als die rechtwinkligen Projectionen von A, B, C,... auf diese Ebene, bewegen. Die Kräfte, wodurch diese letzteren Bewegungen erzeugt werden, sind nach §. 24, *b*) den auf A, B, C,... wirkenden und auf die Ebene projicirten Kräften gleich. Da nun wegen der gegenseitigen Anziehung, von A und B z. B., auf A und B nach den Richtungen AB und BA zwei einander gleiche bewegende Kräfte wirken, so werden auch A' und B' von zwei einander gleichen bewegenden Kräften gegen einander getrieben, nämlich von Kräften, die den auf A und B wirkenden und mit dem Cosinus der Neigung der Linie AB gegen die Ebene multiplicirten Kräften gleich sind. Die Körper A', B', C',... bewegen sich daher in der Ebene gleichfalls als einander anziehend, mithin nach dem vorhin entwickelten Gesetze, und wir schliessen daraus:

Hat man ein System sich bewegender Körper, auf welche bloss ihre gegenseitigen Anziehungen wirken, zieht man von einem beliebigen

festen Punkte nach den einzelnen Körpern Radien und projicirt dieselben auf eine beliebig durch den Punkt gelegte feste Ebene, so ist die Summe der Producte aus der Masse jedes Körpers in die Flächengeschwindigkeit der Projection seines *Radius constant,* oder:

Es wächst die Summe der Producte aus der Masse jedes Körpers in die von der Projection seines Radius in der Ebene beschriebene Fläche der Zeit proportional.

Dies ist der Satz, welchen man das Princip der Erhaltung der Flächen nennt.

§. 86. Die nach diesem Princip bei jedem Systeme sich anziehender Körper von einem Zeitpunkte zum anderen constante Summe von Producten — wir wollen sie kurz das Moment des Systems nennen — hängt von der Wahl der festen Ebene und des darin liegenden festen Punktes O ab, und wird für verschiedene Annahmen jener Ebene und dieses Punktes im Allgemeinen verschiedene Werthe erhalten.

Untersuchen wir zuerst, wie sich das Moment ändert, wenn es bei unverändert bleibender Ebene auf verschiedene Punkte derselben bezogen wird. Seien zu dem Ende A_0, $B_0, \ldots$ und S_0 (Fig. 32) die rechtwinkligen Projectionen der sich anziehenden Körper A, $B, \ldots$ und ihres Schwerpunktes S auf die Ebene zu einer gewissen Zeit; $A_0 A_1$, $B_0 B_1, \ldots$, $S_0 S_1$ die Projectionen der gleichzeitig statthabenden Geschwindigkeiten von A, $B, \ldots$ und S. Nun ist, wo auch der Punkt O in der Ebene liegen mag, die Fläche des Vierecks

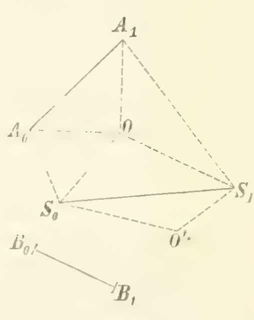


Fig. 32.

$$A_0 A_1 S_1 S_0 = O A_0 A_1 + O A_1 S_1 + O S_1 S_0 + O S_0 A_0 \ .$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung erhellet augenblicklich, sobald die zwei Diagonalen $A_0 S_1$ und $A_1 S_0$ des Vierecks sich innerhalb ihrer Endpunkte schneiden, und der Punkt O innerhalb des Vierecks liegt; sie gilt aber, mit gehöriger Rücksicht auf die Zeichen, auch für jede andere Lage der Punkte A_0, $A_1, \ldots$ und O.

Auf gleiche Art ist die Vierecksfläche

$$B_0 B_1 S_1 S_0 = O B_0 B_1 + O B_1 S_1 + O S_1 S_0 + O S_0 B_0 \ ,$$

u. s. w. Man multiplicire diese Gleichungen resp. mit den Massen a, $b, \ldots$ der Körper, addire sie hierauf und setze

$$a \,.\, A_0 A_1 S_1 S_0 + b \,.\, B_0 B_1 S_1 S_0 + \ldots = Q$$

und

$$a \,.\, OA_0A_1 + b \,.\, OB_0B_1 + \ldots = M\,,$$

wo also M das Moment des Systems in Bezug auf den Punkt O der Ebene ausdrückt, so kommt:

$$Q = M + (a + b + \ldots)\, OS_1S_0\,.$$

Denn weil S der Schwerpunkt der Massen $a, b, \ldots$ in $A, B, \ldots$ ist, so ist auch in der Projection S_0 der Schwerpunkt der in A_0, $B_0, \ldots$ befindlichen Massen (§. 78, Zus.), folglich

$$a \,.\, S_0A_0 + b \,.\, S_0B_0 + \ldots \equiv 0\,,$$

mithin (§. 82, Zus.)

$$a \,.\, OS_0A_0 + b \,.\, OS_0B_0 + \ldots = 0\,,$$

und eben so

$$a \,.\, OS_1A_1 + b \,.\, OS_1B_1 + \ldots = 0\,.$$

Beziehen wir jetzt das System auf den Punkt O' der Ebene und setzen rücksichtlich desselben das Moment gleich M', so findet sich ähnlicherweise:

$$Q = M' + (a + b + \ldots)\, O'S_1S_0\,;$$

folglich

$$M' - M = (a + b + \ldots)\,(OS_1S_0 - O'S_1S_0)$$
$$= s\,(OS_1S_0 + O'S_0S_1) = s \,.\, OS_1O'S_0\,,$$

wo $s = a + b + \ldots$. Es wird hierdurch der merkwürdige Satz ausgedrückt, *dass für je zwei Punkte derselben Ebene der Unterschied der darauf bezogenen Momente des Systems dem mit der Massensumme multiplicirten Viereck gleich ist, welches die Linie von dem einen Punkte zum anderen und die Linie, welche die Geschwindigkeit des Schwerpunkts darstellt, zu Diagonalen hat.*

Folgerung. Für $S_0S_1 = 0$ wird $M = M'$; d. h.

Ruht der Schwerpunkt, so hat das Moment für alle Punkte einer und derselben Ebene gleiche Werthe.

§. 87. Behalten wir jetzt den Punkt O ungeändert bei, lassen aber die ihn enthaltende Ebene ihre Lage ändern und suchen die Abhängigkeit zwischen den auf diese verschiedenen Ebenen bezogenen Momenten zu bestimmen.

Wir wollen deshalb zuvor ein System ihrer Richtung und Grösse nach bestimmter gerader Linien $f, g, h, \ldots$ in Betrachtung ziehen, von denen die erste f aus den übrigen $g, h, \ldots$ zusammengesetzt sei, und die wir uns insgesammt, besserer Anschaulichkeit wegen, von

einem und demselben Punkte O ausgehend denken. Diese Linien wollen wir rechtwinklig auf eine beliebig durch O gelegte Gerade γ projiciren und f_1, g_1, $h_1, \ldots$ die Projectionen nennen, so ist der Voraussetzung zufolge und nach §. 75

$$(a) \qquad f_1 = g_1 + h_1 + \cdots$$

Werde nun zu diesem System von Linien $\gamma, f, g, h, \ldots$ ein System durch O gelegter Ebenen Γ, F, G, $H, \ldots$ hinzugefügt, welche auf den gleichnamigen Linien perpendikular stehen, und von denen man sich F, G, $H, \ldots$ als begrenzte, den Längen von f, g, $h, \ldots$ proportionale Flächen denke, so dass, wenn die Strecke $F:f$ zur Linieneinheit genommen und daher $F=f$ gesetzt wird, man auch $G=g$, $H=h, \ldots$ habe.

So wie vorhin f, g, $h, \ldots$ auf γ, projicire man jetzt die Flächen F, G, $H, \ldots$ auf die Ebene Γ und nenne F_1, G_1, $H_1, \ldots$ diese Projectionen. Weil f auf F und γ auf Γ oder f_1 auf F_1 perpendikular steht, so sind die Winkel von f mit f_1 und von F mit F_1 einander gleich: es verhält sich daher die Linie f zu ihrer Projection f_1, wie die Fläche F zu der ihrigen F_1, und da $F=f$ gemacht worden, so ist auch $F_1 = f_1$, und aus gleichem Grunde $G_1 = g_1$, $H_1 = h_1$, etc., folglich wegen (a)

$$F_1 = G_1 + H_1 + \cdots .$$

Sind demnach — so schliessen wir hieraus umgekehrt — *mehrere begrenzte Ebenen G, $H, \ldots$ gegeben, errichtet man auf denselben ihnen proportionale Perpendikel g, $h, \ldots$ und bestimmt die aus diesen zusammengesetzte Linie f, so hat eine auf f perpendikulare ebene Fläche F, welche mit f in demselben Verhältnisse, wie G mit g, etc. proportional ist, die Eigenschaft, dass die Summe der Projectionen der gegebenen Flächen G, $H, \ldots$ auf eine beliebige Ebene Γ stets der Projection von F auf dieselbe Ebene gleich ist.*

Man kann diese Fläche F die aus den Flächen G, $H, \ldots$ **zusammengesetzte Fläche** nennen, da sie in Bezug auf G, $H, \ldots$ dieselbe Eigenschaft hat, wie in Bezug auf die Linien g, $h, \ldots$ die aus ihnen zusammengesetzte Linie f.

Werden nun — um diese Betrachtung auf die Bestimmung der Momente anzuwenden — durch A^0A^1, $B^0B^1, \ldots$ die zu einer gewissen Zeit statthabenden Geschwindigkeiten der Körper A, $B, \ldots$ im Raume dargestellt, so hat man nur die Flächen OA^0A^1, $OB^0B^1, \ldots$, nachdem sie vorher resp. mit Zahlen a, $b, \ldots$ multiplicirt worden, welche den Massen von A, $B, \ldots$ proportional sind, zu einer einzigen Fläche F zusammenzusetzen. Die Summe Σ der Projectionen von $a \,.\, OA^0A^1$,

$b.OB^0B^1, \ldots$ auf irgend eine durch O gelegte Ebene Γ, oder das Moment des Systems in Bezug auf diese Ebene, wird dann stets der Projection von F auf dieselbe Ebene gleich sein, also

$$\Sigma = F \cos \Gamma' F \ .$$

Unter allen auf denselben Punkt O bezogenen Momenten ist daher dasjenige, dessen Ebene mit F zusammenfällt, am grössten, nämlich gleich F selbst, weshalb wir F das Hauptmoment für den Punkt O nennen wollen. Für jede Ebene, welche auf F perpendikular steht, und wo daher $\Gamma' F = 90^0$, ist das Moment Null. Eben so leuchtet ein, das für alle Ebenen, welche mit F gleiche Winkel machen, die Momente gleiche Werthe haben.

Nachträglich ist noch zu zeigen, wie bei der Zusammensetzung der Flächen der nöthigen Rücksicht auf die Zeichen noch Genüge geschehen muss, was im Vorigen, um die Auffassung der Hauptsache desto leichter zu machen, übergangen wurde. — Seien OQ, $OR, \ldots$ den Flächen $a.OA^0A^1$, $b.OB^0B^1, \ldots$ proportionale und auf ihnen perpendikulare (vorhin mit g, $h, \ldots$ bezeichnete) Linien, und zwar jede derselben auf derjenigen Seite ihrer Fläche stehend, bei welcher, wenn die Richtung von den Füssen nach dem Kopfe nach und nach in die Lagen OQ, $OR, \ldots$ gebracht wird, die darauf resp. perpendikularen Linien A^0A^1, $B^0B^1, \ldots$ jedesmal nach derselben Seite, es sei von der Rechten nach der Linken, gerichtet erscheinen. Ist nun OP (vorhin f) die aus OQ, $OR, \ldots$ zusammengesetzte Linie, so lege man durch O eine zu ihr perpendikulare Ebene und ziehe darin eine Linie K^0K^1 so, dass, den Kopf nach P und die Füsse nach O gebracht, ihre Richtung nach links gehend erscheint, und von solcher Länge, dass für das Dreieck OK^0K^1

$$OK^0K^1 : a.OA^0A^1 : \ldots = OP : OQ : \ldots$$

Dieses Dreieck wird die gesuchte Fläche F sein; es wird nämlich, wenn A_0A_1, $B_0B_1, \ldots$ und K_0K_1 die Projectionen von A^0A^1, $B^0B^1, \ldots$ und K^0K^1 auf irgend eine durch O gelegte Ebene Γ sind, mit gehöriger Rücksicht auf die Zeichen (§. 37, Anm.)

$$a.OA_0A_1 + b.OB_0B_1 + \ldots = OK_0K_1 \ .$$

§. 88. Seien Γ und Γ' zwei einander parallele Ebenen, O ein Punkt in der ersteren, O' in der letzteren, und die Linie OO' auf ihnen perpendikular. Die zwei Momente des Systems, wenn dieses das eine Mal auf Γ und O, das andere Mal auf Γ' und O' bezogen wird, sind dann einander gleich, weil unter der gemachten Voraussetzung von jeder Linie des Systems, wie von A^0A^1, die zwei Pro-

jectionen auf Γ und Γ' offenbar einander gleich und parallel sind und resp. gegen O und O' einerlei Lage haben.

Bei ruhendem Schwerpunkte, wo (§. 86, Folgerung) das Moment für eine Ebene Γ unabhängig von dem Orte des Punktes O in derselben ist und mithin allein schon durch Γ bestimmt wird, — bei einem solchen System sind folglich die Momente für je zwei parallele Ebenen einander gleich, und wenn das Moment für eine gewisse Ebene seinen grössten Werth hat, so hat es denselben auch für jede andere ihr parallele Ebene. Die aus den Flächen $a \, . \, OA^0A^1$, etc. zusammengesetzte Fläche F wird daher, wenn der Schwerpunkt ruht, immer von derselben Grösse und Lage gefunden, wo auch im Raume der Punkt O angenommen werden mag, und — setzen wir nach §. 85 hinzu — welches auch der Zeitpunkt sein mag, auf welchen sich die zur Bestimmung von F angewendeten Geschwindigkeiten beziehen. Die Ebene von F, oder vielmehr die Reihe von Parallelebenen, in deren jeder F liegen kann, wird deshalb die unveränderliche Ebene des Systems genannt.

§. 89. Ruht der Schwerpunkt nicht und bewegt sich daher geradlinig und gleichförmig, so ändert sich bei Annahme eines anderen O im Allgemeinen auch die Lage und Grösse des darauf bezogenen Hauptmoments F. Indessen lässt sich auch in diesem Falle eine von O unabhängige unveränderliche Ebene leicht angeben. Denn da ein System mit fortrückendem Schwerpunkte in Bezug auf einen Raum, der nach derselben Richtung und mit derselben Geschwindigkeit fortrückt, als ein System mit ruhendem Schwerpunkte angesehen werden kann, so wird von den Momenten eines Systems der ersteren Art alles Das gelten, was so eben von den Momenten eines Systems der letzteren Art gezeigt worden, dafern man nur jene Momente auf Ebenen bezieht, welche, sich parallel bleibend, so fortrücken, dass jeder ihrer Punkte dieselbe Bewegung wie der Schwerpunkt hat, oder, was dasselbe ist: wenn man statt der wahren Bewegungen der Körper ihre relativen in Bezug auf den Schwerpunkt in Rechnung nimmt.

Bei einem System von nur zwei Körpern ist hiernach die durch den Schwerpunkt gelegte und von ihm parallel fortgeführte Ebene, in welcher sich die zwei Körper selbst bewegen (§. 81), als die unveränderliche Ebene zu betrachten.

Da bei unserem Sonnensystem von Einwirkungen fremder Sonnen auf dasselbe, bis jetzt wenigstens, keine Spur sich gezeigt hat, so muss sich auch bei ihm eine unveränderliche Ebene nachweisen

lassen, also eine Ebene, die sich immerfort parallel bleibt, während die Ebenen, in denen sich die Planeten und Kometen um die Sonne und die Monde um ihre Planeten bewegen, zufolge der gegenseitigen Störungen aller dieser Körper, stets, wenn auch nur sehr langsam, ihre Lage ändern. Da man die Lage dieser Ebene zu jeder Zeit verhältnissmässig leicht wieder finden kann, so eignet sie sich ganz besonders zu einer Grundebene, auf welche man die Bahnebenen jener Körper bezieht und die allmählichen Aenderungen derselben bestimmt.

In Bezug auf die Lage, welche die Ekliptik zu Anfange des Jahres 1750 hatte, ist die vom damaligen Frühlingsäquinoctium an gerechnete Länge des aufsteigenden Knotens der unveränderlichen Ebene $= 102^{\circ}\, 57'\, 30''$ und die Neigung derselben $= 1^{\circ}\, 35'\, 31''$. (Laplace *Mécanique céleste*, Tome III, pag. 163.)*)

§. 90. Um von unserem Sonnensystem und überhaupt von einem System sich anziehender Körper, deren Schwerpunkt fortrückt, die unveränderliche Ebene zu finden, hätte man nach dem Obigen vor Allem die Bewegung des Schwerpunkts zu bestimmen, indem auf diesen die Bewegungen der Körper bezogen werden müssen. Es lässt sich aber dem Ausdrucke für das Moment noch eine andere Form geben, bei welcher wir der Bestimmung des Schwerpunktes ganz überhoben sind.

Bedeuten wiederum A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1, ... die auf die Ebene selbst, für welche das Moment gesucht wird, projicirten Geschwindigkeiten der Massen a, b, c, ... zu einer gewissen Zeit, so ist das Moment für den Punkt O der Ebene:

$$M = a\,.\,OA_0A_1 + b\,.\,OB_0B_1 + c\,.\,OC_0C_1 + \dots\,.$$

Setzen wir nun zuerst den Fall, dass der Schwerpunkt des Systems ruhe, so ist M unabhängig von O, und daher auch, wenn wir O nach und nach mit A_0, B_0, C_0, ... zusammenfallen lassen:

---

*) Bekannt ist die Controverse, welche sich an die Laplace'sche Bestimmung der invariabeln Ebene unseres Sonnensystems geknüpft hat, nachdem Poinsot im Jahre 1828 darauf aufmerksam machte, dass streng genommen auch die bei der Bewegung der Satelliten um ihre Hauptplaneten, so wie die infolge der Rotationsbewegung der Himmelskörper um ihre eigenen Axen beschriebenen Flächen, bei der Bestimmung der invariabeln Ebene mit in Rechnung gezogen werden müssen. Vergl. z. B. im Anhange zu Poinsot's Statik, dessen *Théorie et détermination de l'équateur du système solaire* (*Éléments de Statique*, 9. édit. 1848, p. 381—420). A. d. H.

$$M = b\,.\,A_0 B_0 B_1 + c\,.\,A_0 C_0 C_1 + \ldots,$$
$$M = a\,.\,B_0 A_0 A_1 + c\,.\,B_0 C_0 C_1 + \ldots,$$
$$M = a\,.\,C_0 A_0 A_1 + b\,.\,C_0 B_0 B_1 + \ldots,$$

u. s. w., weil die Dreiecke $A_0 A_0 A_1$, $B_0 B_0 B_1$, ... Null sind. Man multiplicire diese Gleichungen der Reihe nach mit a, b, c, ... und addire sie hierauf, so kommt:

$$(a + b + c + \ldots) M = ab\,(A_0 B_0 B_1 + B_0 A_0 A_1) +$$
$$+ ac\,(A_0 C_0 C_1 + C_0 A_0 A_1) + bc\,(B_0 C_0 C_1 + C_0 B_0 B_1) + \ldots$$

Es ist aber, wenn man $A_0 Q \equiv A_1 B_1$ (Fig. 33) macht, $A_0 A_1 B_1 Q$ ein Parallelogramm, und daher (§. 37, Anmerk.)

$$B_0 A_0 B_1 = B_0 A_0 Q + B_0 A_0 A_1,$$

oder was dasselbe ist:

$$A_0 B_0 Q = A_0 B_0 B_1 + B_0 A_0 A_1\,,$$

d. i. gleich der in der voranstehenden Gleichung mit ab multiplicirten Fläche. Weil nach dieser Construction $B_0 Q$ die auf die Ebene projicirte Geschwindigkeit von B ist, wenn A ruhend und die Bewegung von B gegen A unverändert angenommen wird (vergl. §. 81), so ist diese Fläche $A_0 B_0 Q$ die unter denselben Bedingungen statthabende, auf die Ebene projicirte Flächengeschwindigkeit des Radius AB. Aehnliches gilt von den übrigen Gliedern auf der rechten Seite der Gleichung, und wir erhalten somit für den Fall, wenn der Schwerpunkt ruht, zur Berechnung des Moments des Systems in Bezug auf eine gegebene Ebene die nachstehende Regel:

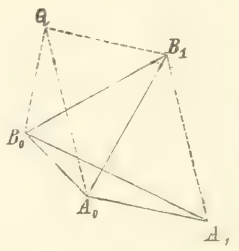


Fig. 33.

Man verbinde je zwei Körper des Systems durch einen Radius, bestimme die Flächengeschwindigkeit desselben, indem man bei unveränderter relativer Bewegung der beiden Körper den einen ruhend annimmt, und multiplicire diese Flächengeschwindigkeit mit dem Producte aus den Massen der beiden Körper. Die Summe der Projectionen dieser multiplicirten Flächen auf die gegebene Ebene, dividirt durch die Summe aller Massen, giebt das gesuchte Moment.

Die aus den multiplicirten Flächen zusammengesetzte Fläche aber (§. 88) *wird, nachdem sie noch durch die Summe der Massen dividirt worden, das Hauptmoment, und die Ebene, in welcher sie liegt, die unveränderliche Ebene des Systems sein.*

Bewegt sich der Schwerpunkt, so gelten dieselben Vorschriften

unter der Voraussetzung, dass die Ebene, auf welche projicirt wird, und so auch die Ebene des Hauptmoments, sich parallel bleibend, mit dem Schwerpunkte fortrückt, und man erhält folglich das in §. 89 Gesuchte — aus dem Grunde, weil bei diesen Vorschriften bloss die relativen Bewegungen der Körper in Rechnung kommen, und die absolute Bewegung des Schwerpunktes ausser allem Betracht bleibt.

III. Das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte.

§. 91. [Unter der lebendigen Kraft eines sich bewegenden Körpers versteht man das Product seiner Masse in das Quadrat seiner Geschwindigkeit. Bei einem System von Körpern, auf welche keine anderen Kräfte als ihre gegenseitige Anziehung wirken, und wo diese Anziehung je zweier Körper eine Function ihrer gegenseitigen Entfernung ist, besteht nun das in der Ueberschrift genannte Princip darin, dass sich immer eine gewisse von den Massen und den gegenseitigen Entfernungen der Körper abhängige Function angeben lässt, von welcher die Summe aller lebendigen Kräfte des Systems, oder kürzer, von welcher die lebendige Kraft des Systems selbst, stets um dieselbe Grösse verschieden ist; dass also, wenn man die Massen der Körper und ihre gegenseitige Lage in irgend zwei Zeitpunkten kennt, man damit ohne Weiteres den Unterschied der Werthe der lebendigen Kraft des Systems in dem einen und dem anderen Zeitpunkte zu bestimmen im Stande ist.

Da von diesem Princip in der Folge kein Gebrauch gemacht werden wird, obschon es bei tiefer in die Mechanik des Himmels eingehenden Untersuchungen grossen Nutzen zu leisten vermag, so will ich es hier bloss für ein System zweier nach dem Newton'schen Gesetze sich anziehender Körper A und B, deren Massen a und b seien, beweisen.

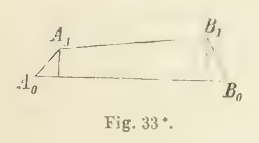


Fig. 33*.

Seien (Fig. 33*) A_0A_1 und B_0B_1 die Wege von A und B während des Zeitelements T_0T_1. Nun ist A_0B_0 gleich der Summe der Projectionen von A_0A_1, A_1B_1 und B_1B_0 auf A_0B_0. Setzt man daher

$$\cos B_0A_0A_1 = P, \qquad \cos A_0B_0B_1 = Q ,$$

und bemerkt, dass der Cosinus des Winkels von A_1B_1 mit A_0B_0, wegen der unendlichen Kleinheit des letzteren, gleich 1 ist, so hat man:

$$A_0B_0 = P \cdot A_0A_1 + A_1B_1 + Q \cdot B_0B_1 .$$

Man setze noch $A_0 B_0 = r$, die Geschwindigkeiten von A und B zur Zeit T_0 gleich v und w, und $m \,.\, T_0 T_1 = 1$ (§. 10), so ist

$$m \,.\, A_0 A_1 = v\,, \qquad m \,.\, B_0 B_1 = w\,,$$

und

$$m(A_1 B_1 - A_0 A_0) = r'\,,$$

gleich der Geschwindigkeit mit welcher r seine Länge ändert. Die vorige Gleichung wird damit

$$(1) \qquad Pv + Qw = -r'\,.$$

Die Kraft, mit welcher a von b angezogen wird, ist gleich $Kb : rr$; folglich die nach $A_0 B_0$ gerichtete Tangentialkraft $= KPb : rr$. Letztere ist aber auch der Kraft bei einer geradlinigen Bewegung gleich, deren Geschwindigkeit sich nach demselben Gesetze, wie bei der krummlinigen, ändert (§. 23, c), also gleich v' (§. 21), folglich

$$(2) \qquad \frac{PKb}{rr} = v'\,,$$

und eben so

$$(3) \qquad \frac{QKa}{rr} = w'\,,$$

gleich der auf B wirkenden Tangentialkraft.

Man multiplicire (2) mit av, (3) mit bw, und addire hierauf diese Gleichungen, so kommt in Verbindung mit (1):

$$avv' + bww' + Kab\,\frac{r'}{rr} = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist aber (§. 11) die Geschwindigkeit von

$$\frac{1}{2}\,avv + \frac{1}{2}\,bww - K\,\frac{ab}{r}\,,$$

und diese Geschwindigkeit, infolge derselben Gleichung, gleich Null; mithin

$$(4) \quad avv + bww - 2K\,\frac{ab}{r} = \text{einer unveränderlichen Grösse};$$

d. h. die lebendige Kraft des Systems ist von der Function $2Kab : r$ stets um dieselbe Grösse verschieden.

Zusätze. a) Ruht der Schwerpunkt des Systems, so haben v und w entgegengesetzte Richtungen, und es ist $av = bw$ (§. 77); die Geschwindigkeit des einen Körpers gegen den anderen ist aber gleich $v + w$, welche u heisse. Es folgt hieraus

$$v = \frac{b}{a+b}\,u \quad \text{und} \quad w = \frac{a}{a+b}\,u\,,$$

womit (4) in

$$uu - 2K\frac{a+b}{r} = \text{einer constanten Grösse}$$

übergeht. Da in dieser Gleichung keine die absoluten Bewegungen der beiden Körper betreffenden Grössen vorkommen, so muss sie auch für den Fall gelten, wenn der Schwerpunkt sich bewegt. Sie ist übrigens mit der schon in §. 52 gefundenen Gleichung (11) identisch, indem (§. 44 u. §. 65) das dortige

$$k^2 = a^3 n^2 = K(M+m)$$

ist. Die constante Grösse in der hier erhaltenen Gleichung ist nach §. 52 gleich $-K(a+b)$, dividirt durch die halbe grosse Axe des Kegelschnitts, welchen der eine Körper um den anderen beschreibt.

b) Durch Betrachtungen, die ganz auf denselben Gründen, wie die vorigen, beruhen, findet man die lebendige Kraft eines Systems von drei oder mehreren, nach dem Newton'schen Gesetze sich anziehenden Körpern A, B, C, ..., deren Massen gleich a, b, c, ... sind,

$$= 2K\left(\frac{a\,.\,b}{AB} + \frac{a\,.\,c}{AC} + \frac{b\,.\,c}{BC} + \dots\right) + \text{einer constanten Grösse.}$$

c) Von einem beliebigen Punkte O ausgehend, mache man OA, OB, OC, ... $\equiv$ den Geschwindigkeiten von A, B, C, ... und OS $\equiv$ der Geschwindigkeit des Schwerpunktes S von A, B, C, ..., so ist nach §. 97 $(a+b+c+\dots)$ OS aus $a\,.\,\mathrm{OA}$, $b\,.\,\mathrm{OB}$, $c\,.\,\mathrm{OC}$, ... zusammengesetzt, also (§. 74)

$$\begin{aligned}(a+b+\dots)\,\mathrm{OS} &\equiv a\,.\,\mathrm{OA} + b\,.\,\mathrm{OB} + \dots \\ &\equiv a\,(\mathrm{OS}+\mathrm{SA}) + b\,(\mathrm{OS}+\mathrm{SB}) + \dots\,,\end{aligned}$$

folglich

$$0 \equiv a\,.\,\mathrm{SA} + b\,.\,\mathrm{SB} + \dots\,;$$

d. h. S ist der Schwerpunkt der in A, B, C, ... befindlichen Massen a, b, c, ... (§. 78, Zusatz).

Nach einem bekannten Satze in der Lehre vom Schwerpunkte ist aber, wo auch der Punkt O angenommen werden mag:

$$(\alpha)\quad a\,.\,\mathrm{OA}^2 + b\,.\,\mathrm{OB}^2 + \dots = (a+b+\dots)\,\mathrm{OS}^2 + a\,.\,\mathrm{SA}^2 + b\,.\,\mathrm{SB}^2 + \dots$$

Lässt man hierin O nach und nach mit A, B, ... zusammenfallen, multiplicirt die dadurch entstehenden Gleichungen resp. mit a, b, ..., addirt sie alsdann, dividirt mit 2 und setzt

$$(\beta)\quad \frac{ab\,.\,\mathrm{AB}^2 + ac\,.\,\mathrm{AC}^2 + bc\,.\,\mathrm{BC}^2 + \dots}{a+b+c+\dots} = \mathrm{L}\,,$$

so kommt:

$$\mathrm{L} = a \,.\, \mathrm{SA}^2 + b \,.\, \mathrm{SB}^2 + c \,.\, \mathrm{SC}^2 + \ldots,$$

und hieraus in Verbindung mit (α):

$$a \,.\, \mathrm{OA}^2 + b \,.\, \mathrm{OB}^2 + \ldots = (a + b + \ldots)\ \mathrm{OS}^2 + \mathrm{L}\ .$$

Der gemachten Construction gemäss ist nun die linke Seite dieser Gleichung gleich der lebendigen Kraft des Systems der Körper A, B, C, ...; die auf der rechten Seite in L, zufolge von (β), enthaltenen Linien AB, AC, BC, ... drücken aber die relativen Geschwindigkeiten von B gegen A, von C gegen A, von C gegen B, ... aus, und man sieht somit, wie die lebendige Kraft eines Systems durch die Geschwindigkeit OS seines Schwerpunktes, und durch die Geschwindigkeiten, welche die Körper des Systems gegen einander haben, dargestellt werden kann.

Bei einem System nach dem Newton'schen Gesetze sich anziehender Körper ist hiernach

$$\frac{ab \,.\, \mathrm{AB}^2 + ac \,.\, \mathrm{AC}^2 + bc \,.\, \mathrm{BC}^2 + \ldots}{a + b + c + \ldots} = 2K\left(\frac{ab}{AB} + \frac{ac}{AC} + \frac{bc}{BC} + \ldots\right)$$

+ einer constanten Grösse,

indem wegen der gegenseitigen Anziehung die Linie OS constant ist, und folglich das Glied $(a + b + \ldots)\ \mathrm{OS}^2$ mit der zu Ende gesetzten constanten Grösse zusammenfliesst.



Dritter Abschnitt.

Von den Störungen des Mondes durch die Sonne.



Erstes Kapitel.

Das Problem der drei Körper.

§. 92. Das Hauptgeschäft der auf den Himmel angewendeten Mechanik besteht darin, die kleinen Abweichungen oder Störungen zu bestimmen, welche in dem ohne solche Abweichungen elliptischen Laufe der Planeten um die Sonne, und der Trabanten um ihre Hauptplaneten, dadurch entstehen müssen, dass jeder dieser Körper nicht bloss von demjenigen, um welchen er sich bewegt, sondern immer zugleich von allen übrigen Körpern angezogen wird. Eine vollständige Lösung dieser verwickelten Aufgabe ist bei dem gegenwärtigen Zustande der Analysis schlechthin unmöglich. Indessen hat man zum praktischen Bedarf vollkommen hinreichende Methoden gefunden, welche die Aufgabe durch Näherung lösen. Die Möglichkeit einer solchen Näherung ist hauptsächlich darin begründet, dass die Kräfte, durch welche die rein elliptische Bewegung eines Planeten um die Sonne oder eines Trabanten um seinen Planeten gestört wird, theils wegen der Kleinheit der Massen der störenden Körper gegen die Masse der Sonne oder des Hauptplaneten, theils wegen der sehr grossen Entfernung jener Körper, immer nur sehr gering gegen die Kräfte sind, welche die elliptischen Bewegungen selbst erzeugen. Auch wird die genäherte Lösung der Aufgabe dadurch noch besonders begünstigt, dass die Bahnen, in denen sich die Planeten und ihre Trabanten bewegen, von der Kreisform nur wenig abweichen, und dass die Ebenen dieser Bahnen nur kleine Winkel mit einander machen.

§. 93. Bei jeder die Störungen betreffenden Aufgabe kommen demnach gleichzeitig zum wenigsten drei Körper in Betracht: ein Hauptkörper S, ein ihn umkreisender Körper P und ein diese Bewegung störender Körper P'.

Sind bloss zwei Körper, S und P, vorhanden, welche sich nach dem Newton'schen Gesetze anziehen, so beschreibt P um S einen Kegelschnitt, dessen einen Brennpunkt S einnimmt, und der Radius Vector SP überstreicht den Zeiten proportionale Flächen. Durch das Hinzukommen des dritten Körpers P', welcher die beiden ersteren nach demselben Gesetz anzieht, wird aber die Bewegung von P um S gestört, so dass die Bahn von P um S nicht mehr ein vollkommener Kegelschnitt ist, und auch die vom Radius SP beschriebene Fläche nicht mehr genau der Zeit proportional zunimmt. Die Aufgabe, welche diese nur von Einem Körper hervorgebrachten Störungen zu entwickeln verlangt, heisst das Problem der drei Körper. Aber auch hiervon ist die Auflösung noch mit solchen Schwierigkeiten verknüpft, dass man sich dabei nur mit Näherungsmethoden begnügen muss.

§. 94. Den Anfang der hierzu nöthigen Untersuchungen macht eine nähere Bestimmung der dabei thätigen Kräfte. Man setze die Massen der Körper S, P, P' resp. gleich M, m, m'; seien ferner die Entfernungen

$$SP = r, \ SP' = r', \ PP' = \varrho,$$

wobei S, P, P' nur die Mittelpunkte der dadurch ausgedrückten Körper bedeuten; endlich sei K die Kraft, mit welcher ein Körper, dessen Masse $= 1$, einen anderen in einer Entfernung $= 1$ von ihm befindlichen Körper anzieht. Alsdann wirken nach dem Gesetze der allgemeinen Schwere und nach dem Satze von sich anziehenden Kugeln (§. 71, c)

$$\text{auf } S \text{ die Kräfte } \frac{Km}{r^2} \text{ und } \frac{Km'}{r'^2} \text{ nach } SP \text{ und } SP',$$

$$\text{auf } P \text{ die Kräfte } \frac{KM}{r^2} \text{ und } \frac{Km'}{\varrho^2} \text{ nach } PS \text{ und } PP',$$

$$\text{auf } P' \text{ die Kräfte } \frac{KM}{r'^2} \text{ und } \frac{Km}{\varrho^2} \text{ nach } P'S \text{ und } P'P.$$

Da es sich aber nicht um die absoluten Bewegungen von S, P und P', sondern nur um die relativen, und zwar von P und P' um S, handelt, so wollen wir uns den Körper S ruhend vorstellen und demgemäss die auf ihn wirkenden Kräfte nach entgegengesetzten Richtungen auf P und P' übertragen (§. 24, a). Auf P wirken alsdann ausser den zwei nach PS und PP' gerichteten Kräften $KM : r^2$ und $Km' : \varrho^2$ noch die zwei Kräfte $Km : r^2$ und $Km' : r'^2$ nach PS und nach einer mit $P'S$ parallelen Richtung, d. i. die drei Kräfte

$\frac{K(M+m)}{r^2}$, $\frac{Km'}{\varrho^2}$ und $\frac{Km'}{r'^2}$ nach PS, PP' und parallel mit $P'S$,

und eben so auf P' die drei Kräfte

$\frac{K(M+m')}{r'^2}$, $\frac{Km}{\varrho^2}$ und $\frac{Km}{r^2}$ nach $P'S$, $P'P$ und parallel mit PS.

Unsere Aufgabe ist hiermit darauf zurückgebracht, die von den drei auf P wirkenden Kräften erzeugte Bewegung dieses Körpers um den als ruhend zu betrachtenden Körper S zu bestimmen.

Offenbar wird hierzu die Bewegung von P' als bekannt vorausgesetzt, zu deren Bestimmung aber aus gleichem Grunde die Kenntniss der Bewegung von P erforderlich ist. Da aber die Wirkungen von P' auf P oder die Störungen, welche P' in dem Laufe von P hervorbringt, verhältnissmässig nur schwach sind, so hat man die Bewegung von P' nicht mit der äussersten Schärfe zu wissen nöthig. Insbesondere können daher die von P in der Bewegung von P' erzeugten Störungen, wenigstens bei einer ersten Annäherung, häufig aber gänzlich, ohne Furcht eines für die Beobachtungen merkbaren Fehlers, vernachlässigt werden. Man kann folglich die Bewegung von P', als allein durch die Kraft $K(M+m'):r'^2$ bewirkt, d. i. als eine rein elliptische um S ansehen.

§. 95. Es kommt nunmehr darauf an, aus den drei vorhin gefundenen auf P wirkenden Kräften die Bewegung von P, oder vielmehr die Störungen zu bestimmen, welche die zweite und dritte dieser Kräfte in der, von der ersten ungleich stärkeren Kraft erzeugten, elliptischen Bewegung von P hervorbringen. Die Mittel hierzu liegen in den in §§. 34, 36 u. 38 erhaltenen allgemeinen Relationen zwischen Bewegungen und den sie bewirkenden Kräften. Zu dem Ende haben wir zuerst die gedachten drei Kräfte in drei andere T, V, W umzuwandeln, von denen T in der Richtung des Radius Vector SP, V normal auf dem Radius in der Ebene, in welcher sich P um S bewegt, und W normal auf dieser Ebene wirkt. Die erste dieser Kräfte, T, ist positiv, wenn sie P von S zu entfernen sucht; die zweite V ist es, wenn sie in der Ebene nach derselben Seite von PS hin gerichtet ist, nach welcher sich P bewegt; die dritte W sei es, wenn sie P über die nördliche Seite der Ebene zu erheben strebt.

Von den oben erhaltenen drei Kräften $K(M+m):r^2$, etc. ist hiernach die erste ein Theil von T. Man fälle ferner von P' auf die Ebene der Bewegung ein Perpendikel $P'Q$ (Fig. 34) und von Q auf SP ein Perpendikel QR, so zerlegt sich die zweite nach PP'

gerichtete Kraft $Km' : \varrho^2$ in drei nach PR, RQ, QP' gerichtete und daher resp. zu T, V, W gehörige Kräfte

$$\frac{Km'}{\varrho^2}\cdot\frac{PR}{\varrho}\,,\qquad \frac{Km'}{\varrho^2}\cdot\frac{RQ}{\varrho}\,,\qquad \frac{Km'}{\varrho^2}\cdot\frac{QP'}{\varrho}\,.$$

Eben so zerfällt die dritte nach $P'S$ gerichtete Kraft $Km' : r'^2$, oder die nach SP' gerichtete Kraft $-Km' : r'^2$, in die drei Kräfte

$$-\frac{Km'}{r'^2}\cdot\frac{SR}{r'}\,,\qquad -\frac{Km'}{r'^2}\cdot\frac{RQ}{r'}\,,\qquad -\frac{Km'}{r'^2}\cdot\frac{QP'}{r'}\,,$$

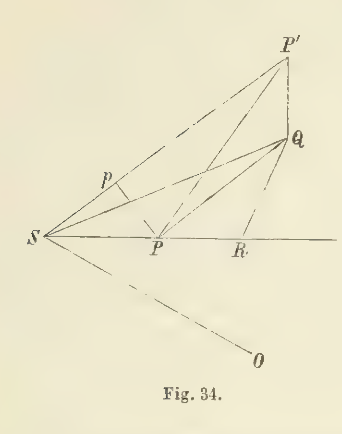


Fig. 34.

welche die Richtungen SR, RQ, QP' haben und mithin gleichfalls Theile von T, V, W sind. Es ist demnach vollständig:

$$T = -\frac{K(M+m)}{r^2} + \frac{Km'}{\varrho^3}\cdot PR - \frac{Km'}{r'^3}\cdot SR\,,$$

$$V = \frac{Km'}{\varrho^3}\cdot RQ - \frac{Km'}{r'^3}\cdot RQ\,,$$

$$W = \frac{Km'}{\varrho^3}\cdot QP' - \frac{Km'}{r'^3}\cdot QP'\,.$$

Sei nun SO die Linie, von welcher an in der Ebene der Bewegung von P, die Längen gerechnet werden (§. 45). Man setze die Winkel OSP, OSQ, als die Längen von P, P', resp. gleich l, l', also $PSQ = l' - l$, und noch den Winkel QSP', als die Breite von P', gleich b'. Hiermit wird

$$QP' = r' \sin b', \qquad SQ = r' \cos b'\,,$$
$$RQ = SQ \sin(l'-l) = -r' \cos b' \sin(l-l')\,,$$
$$SR = SQ \cos(l'-l) = r' \cos b' \cos(l-l')\,,$$
$$PR = r' \cos b' \cos(l-l') - r\,,$$

und die Werthe von T, V, W gehen damit über in

$$T = -\frac{K(M+m)}{r^2} + Km'\left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r'^3}\right) r' \cos b' \cos(l-l') - \frac{Km'}{\varrho^3}\, r\,,$$

$$V = -Km'\left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r'^3}\right) r' \cos b' \sin(l-l')\,,$$

$$W = Km'\left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r'^3}\right) r' \sin b'\,.$$

Wie man sieht, ist es das erste Glied der Kraft T, welches die rein elliptische Bewegung erzeugt, während durch die zwei übrigen

Glieder von T, so wie durch die Kräfte V und W, weil sie insgesammt m' zum Factor haben. die Störungen hervorgebracht werden, und zwar durch T und V in Verbindung die Störungen des Radius Vector und der Länge, durch W aber die Störungen der Breite.

§. 96. Da durch r und l der Ort von P und durch r', l', b' der Ort von P' bestimmt ist, so wird durch diese Grössen auch der gegenseitige Abstand von P und P' bestimmt sein. In der That hat man

$$\varrho^2 = PQ^2 + QP'^2 = PR^2 + RQ^2 + QP'^2 ,$$

und wenn man für PR, RQ, QP' ihre vorhin bemerkten Werthe setzt, nach gehöriger Reduction:

$$\varrho = \sqrt{[r^2 - 2rr' \cos b' \cos (l - l') + r'^2]} .$$

Dieser Ausdruck für ϱ ist demnach in den Formeln für T, V, W noch zu substituiren, ehe man mit ihnen weitere Rechnungen anstellt.

Ferner werde hier noch bemerkt, dass der in T, V, W und ϱ vorkommende Cosinus von b' in dem Folgenden stets gleich 1 gesetzt werden wird. Wegen der Kleinheit der gegenseitigen Neigungen der Bahnen werden wir nämlich bei Berechnung der Störungen bloss die ersten Potenzen der Neigungen berücksichtigen. Es ist aber der grösstmögliche Werth von b' gleich der Neigung ι der Bahn von P' gegen die Bahn von P, also auch der grösstmögliche Werth von $1 - \cos b'$ gleich

$$1 - \cos \iota = 2 \sin \tfrac{1}{2} \iota^2 < \tfrac{1}{2} \iota^2 ;$$

folglich u. s. w.

Indem man aber das Quadrat der Neigung vernachlässigt und damit $\cos b' = 1$ setzt, werden T und V von der Neigung offenbar ganz unabhängig; mithin auch die durch T und V bewirkten Störungen des Radius Vector und der Länge; d. h. bei Berechnung dieser Störungen kann man ohne merklichen Fehler die schon an sich wenig gegen einander geneigten Bahnebenen des störenden und des gestörten Körpers als zusammenfallend betrachten.

Anders verhält es sich mit den durch W erzeugten Störungen der Breite. Denn weil W den Factor $\sin b'$ enthält, so sind diese schon von der ersten Potenz der Neigung abhängig.

§. 97. Die Ausdrücke für T, V und W, wie sie nach der Substitution des Werthes für ϱ hervorgehen, lassen sich in dieser Ge-

stalt zur Bestimmung der Störungen noch nicht unmittelbar anwenden, sondern müssen deshalb auf zweckdienliche Weise umgeformt werden. Diese Umformung ist aber eines der mühevollsten Geschäfte bei der ganzen Störungsrechnung, selbst wenn man mit einer ersten Annäherung sich begnügen will. Nur die Berechnung der Störungen, welche der Mond bei seiner Bewegung um die Erde von der Sonne erleidet, bedarf jener mühevollen Entwickelung nicht, sobald man nämlich bei einer ersten Näherung stehen bleibt. Denn im Gegentheil erfordert die Berechnung der Mondsstörungen, wenn sie mit einer den Beobachtungen genügenden Genauigkeit verlangt werden, ungleich mehr Arbeit und Umsicht, als irgend eine andere Störungsrechnung.

Wegen dieser Leichtigkeit der Entwickelung von T, V und W bei der Mondstheorie, wenn man bloss die ersten Glieder beibehält, und weil die hiermit sich ergebenden Mondsstörungen so beträchtlich sind, dass sie schon von den älteren Astronomen wahrgenommen wurden, und daher noch ein historisches Interesse haben: aus diesen Gründen wollen wir auch gegenwärtig, um uns von den Störungsrechnungen zuerst einen übersichtlichen Begriff zu verschaffen, mit der Mondstheorie den Anfang machen.

Zweites Kapitel.

Von den Kräften, durch welche die Bewegung des Mondes um die Erde gestört wird.

---

§. 98. Bei den Störungen, welche die Sonne im Laufe des Mondes um die Erde hervorbringt*), tritt der eigenthümliche Fall ein, dass die Masse der Sonne, als des störenden Körpers, mehr als

---

*) Die Störungen, welche der Mond von den Planeten erleidet, sind höchst unbedeutend. Nach Damoiseau's Mondstafeln kann die Störung der Länge des Mondes durch Venus, als denjenigen Planeten, welcher ihm am nächsten kommen kann, nur bis auf 1″3 und die Störung durch Jupiter, als den massenreichsten Planeten, nur bis auf 0″8 steigen. [In Hansen's Mondtafeln finden sich noch zwei von der Venus herrührende Störungsglieder sehr langer Periode, welche bis 15″ resp. 21″ steigen, doch ist der letztere Coefficient nur empirisch bestimmt

300000-mal grösser ist als die Masse der Erde (§. 66), welche die Stelle des Hauptkörpers einnimmt, während bei den Planetenstörungen die Masse der Sonne, als des Hauptkörpers, die Masse des störenden Planeten bei weitem überwiegt. Weil aber die Sonne gegen 400-mal weiter, als der Mond, von der Erde entfernt ist und sie folglich auf Erde und Mond nahe mit gleicher Kraft wirkt, so sieht man schon im Voraus, dass die zu entwickelnden Störungen, als welche nur in dem Unterschiede jener Wirkungen bestehen, der Grösse der störenden Masse ungeachtet, doch nicht allzu bedeutend sein können. Die nachfolgende Rechnung wird dieses bestätigen.

§. 99. Zu diesem Ende haben wir zunächst die im Vorigen für das Problem der drei Körper hergeleiteten allgemeinen Formeln dem gegenwärtigen Falle anzupassen. Sie gründeten sich auf die Voraussetzung, dass die absolute Bewegung des Hauptkörpers nach entgegengesetzter Richtung auf die beiden anderen übertragen ist, und wir haben uns daher im Folgenden die Erde, als den jetzigen Hauptkörper, als ruhend, und — ganz dem sinnlichen Scheine gemäss — den Mond und die Sonne in den Zeiträumen eines Monats und eines Jahres, in nahe kreisförmigen und nahezu in derselben Ebene liegenden Bahnen, sich um die Erde bewegend zu denken.

Weil die vorhin mit S, P und P' bezeichneten Körper jetzt die Erde, der Mond und die Sonne sind, so bedeuten nunmehr in jenen Formeln

M, m, m' die Massen von Erde, Mond und Sonne,

r, r' die Entfernungen des Mondes und der Sonne von der Erde,

ϱ die Entfernung der Sonne vom Monde,

l, l' die in der Mondsbahn gerechneten Längen von Mond und Sonne,

b' die Breite der Sonne in Bezug auf die Mondsbahn,

T, V, W die auf den Mond wirkenden rechtwinklig coordinirten Kräfte, von denen T, V in der Ebene der Mondsbahn selbst, T nach der Richtung des Radius Vector des Mondes, wirken.

Der Umstand, durch welchen die weitere Entwickelung jener Formeln bei der Mondstheorie vorzugsweise begünstigt wird, ist die Kleinheit des Verhältnisses $r : r'$. Denn da dieses nahezu nur $1 : 400$

worden. Siehe die Einleitung zu Hansen's „*Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen*", 1. Abhandlung. S. 99. A. d. H.]

ist, so können davon die zweiten und höheren Potenzen, vor der Hand wenigstens, ganz vernachlässigt werden. Hiernach, und wenn wir immer $\cos b' = 1$ setzen (§. 96), ergiebt sich

$$\varrho = r' \sqrt{\left[1 - 2\frac{r}{r'}\cos(l - l') + \frac{r^2}{r'^2}\right]}$$

$$= r' \sqrt{\left[1 - 2\frac{r}{r'}\cos(l - l')\right]} = r'\left[1 - \frac{r}{r'}\cos(l - l')\right] \text{ ,*)}$$

folglich

$$\varrho^{-3} = r'^{-3}\left[1 + 3\frac{r}{r'}\cos(l - l')\right]$$

und

$$\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r'^3} = 3\frac{r}{r'^4}\cos(l - l') \ .$$

Die Substitution hiervon in den Ausdrücken für T, V, W (§. 95) giebt:

$$T = -\frac{K(M+m)}{r^2} + 3\frac{Km'r}{r'^3}\cos(l - l')^2 - \frac{Km'r}{r'^3}$$

$$- 3\frac{Km'r}{r'^3}\cdot\frac{r}{r'}\cos(l - l') \ ,$$

$$V = -3\frac{Km'r}{r'^3}\cos(l - l')\sin(l - l') \ ,$$

$$W = 3\frac{Km'r}{r'^3}\cos(l - l')\sin b' \ ;$$

oder nach bekannten trigonometrischen Umformungen, und weil im Ausdrucke für T das vierte Glied gegen das zweite und dritte wegzulassen ist:

$$T = -\frac{K(M+m)}{r^2} + \tfrac{1}{2}\frac{Km'r}{r'^3}\left[1 + 3\cos 2(l - l')\right] \ ,$$

$$V = -\tfrac{3}{2}\frac{Km'r}{r'^3}\sin 2(l - l') \ .$$

Seien endlich n und n' die mittleren Bewegungen von Mond und Sonne, wie selbige durch Beobachtungen gefunden werden: a und a' die daraus nach der elliptischen Theorie folgenden mittleren Entfernungen des Mondes und der Sonne von der Erde, so ist (§. 65)

$$K(M + m) = n^2 a^3$$

und sehr nahe

$$K(m' + M) = n'^2 a'^3 = Km'$$

---

*) $= r' - r\cos(l - l')$. Dieser Werth von ϱ kann, wie man leicht wahrnimmt, auch schon dadurch gefunden werden, dass man von P (Fig. 34, S. 158) auf SP' ein Perpendikel Pp fällt und wegen des sehr kleinen Winkels $SP'P$ an der Sonne die Linien pP' und PP' als gleich lang betrachtet.

weil M noch nicht der 300000-ste Theil von m' ist (§. 66); also, wenn wir noch

$$n'^2 = n^2 w$$

setzen:

$$Km' = n^2 a'^3 w \;.$$

Mit Einführung dieser Werthe von $K(M+m)$ und Km' in den Gleichungen für T, V, W, und nachdem man noch jede von ihnen mit $n^2 a$ dividirt und der Kürze willen die mit T, V, W proportionalen Quotienten

$$\frac{T}{n^2 a} = T_1\,, \qquad \frac{V}{n^2 a} = V_1\,, \qquad \frac{W}{n^2 a} = W_1$$

gesetzt hat, findet sich:

$$T_1 = -\frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{r}{a}\cdot\frac{a'^3}{r'^3} w\,[1 + 3\cos 2(l - l')]\;,$$

$$V_1 = -\frac{3}{2}\cdot\frac{r}{a}\cdot\frac{a'^3}{r'^3} w \sin 2(l - l')\;,$$

$$W_1 = 3\frac{r}{a}\cdot\frac{a'^3}{r'^3} w \cos(l - l') \sin b'\;.$$

§. 100. Die letzterhaltenen Ausdrücke geben eine sehr klare Uebersicht von dem gegenseitigen Verhalten der Kräfte und ihrer Theile. Es kommen nämlich darin, ausser den trigonometrischen Functionen, noch drei Zahlen $\frac{a}{r}$, $\frac{a'}{r'}$ und w vor. Von diesen sind die beiden ersten nur wenig von der Einheit verschieden; die letzte aber, mit welcher die störenden Kräfte multiplicirt sind, ist sehr klein. Denn es verhält sich (§. 66)

$$n : n' = 365{\cdot}256 : 27{\cdot}322 = 13{\cdot}36875 : 1 = 1 : 0{\cdot}074801\;,$$

woraus

$$w = \frac{n'^2}{n^2} = \frac{1}{178{\cdot}72}$$

folgt.

Der Unterschied der Zahlen $\frac{a}{r}$ und $\frac{a'}{r'}$ von der Einheit rührt hauptsächlich von den Excentricitäten e und e' der Mondsbahn und der Sonnenbahn her. Wir werden diese Excentricitäten (beiläufig gleich $\frac{1}{18}$ und $\frac{1}{60}$), so wie die gegenseitige Neigung der Bahnen $\iota = 5^\circ 9'$ ($= \frac{1}{11}$ in Theilen des Halbmessers) und den Exponenten des Verhältnisses $n' : n = \frac{1}{13}$, als kleine Zahlen der ersten Ordnung

betrachten. Hiernach werden auch die Unterschiede zwischen irgend welchen Potenzen der Zahlen $\frac{a}{r}$ und $\frac{a'}{r'}$ und der Einheit zur ersten Ordnung, dagegen w zur zweiten Ordnung gehören. Alle von der Störung herrührenden Glieder werden mithin, weil sie w zum Factor haben, gleichfalls von der zweiten, oder einer höheren Ordnung sein.

Wegen der nöthigen Schranken unserer Untersuchung wollen wir aber — einige besondere Fälle ausnehmend — im Folgenden nur noch die Störungsglieder der dritten Ordnung berücksichtigen, also überhaupt nur diejenigen, welche entweder w allein, oder ew, $e'w$, ιw zum Factor haben, — nicht etwa die mit $\iota^2 w$ multiplicirten Glieder, was damit zusammenstimmt, dass im Vorigen $\cos b' = 1$ gesetzt wurde.

Insonderheit können deshalb in der Gleichung für W_1, weil $\sin b'$ mit ι von einerlei Ordnung ist (§. 96), die Factoren $\frac{r}{a}$ und $\frac{a'^3}{r'^3}$ unbeachtet bleiben, wodurch diese Gleichung sich in

$$W_1 = 3w \cos(l - l') \sin b'$$

zusammenzieht.

§. 101. Im Folgenden werden wir zunächst die Störungen des Radius Vector und der Länge, also die von den Kräften T und V herrührenden Störungen zu entwickeln suchen. Weil hierbei die kleine gegenseitige Neigung der Monds- und der Sonnenbahn nicht in Betracht kommt (§. 96), so werden wir uns bei diesen Rechnungen beide Körper, als in einer und derselben Ebene um die Erde sich bewegend, vorstellen. Ehe wir aber die Rechnungen beginnen, wird es gut sein, wenn wir uns von der Art, wie die störenden Kräfte nach der verschiedenen Stellung des Mondes gegen die Sonne ihre Werthe ändern, einen übersichtlichen Begriff zu verschaffen suchen.

Nehmen wir dabei die Kraft, mit welcher der Mond, ohne die Störung durch die Sonne, nach der Erde getrieben wird, zur Einheit, so sind, nach §. 99 und wegen der geringen Abweichung der Verhältnisse $a : r$ und $a' : r'$ von $1 : 1$, die störenden Kräfte in der Richtung des Radius Vector und in der darauf perpendikularen Richtung nahe

$$= \frac{1}{2} w [1 + 3 \cos 2(l - l')] \quad \text{und} \quad = -\frac{3}{2} w \sin 2(l - l') .$$

Die erstere dieser Kräfte besteht aus einem constanten und einem veränderlichen Theile. Der constante Theil, welcher zugleich den mittleren Werth dieser Kraft darstellt, ist gleich $\frac{1}{2} w = \frac{1}{357}$. Weil

die im Radius wirkende Kraft als positiv angesehen wird, wenn sie den Mond von der Erde zu entfernen und daher seine Schwere gegen die Erde zu vermindern strebt, so schliessen wir hieraus, *dass die Schwere des Mondes gegen die Erde durch die Sonne durchschnittlich um ihren 357-sten Theil vermindert wird.*

Der veränderliche Theil kann bis zum Dreifachen des constanten nach der einen und anderen Seite anwachsen, wodurch das eine Mal eine Verminderung der Schwere, vier Mal so gross als die mittlere, entsteht, das andere Mal aber eine Verstärkung der Schwere erzeugt wird, welche dem Doppelten der mittleren Verminderung gleich kommt. Ersteres ist der Fall, wenn $\cos 2(l - l') = 1$, also für

$$l - l' = 0 \quad \text{und} \quad = 180^0,$$

d. h. im Neu- und im Vollmonde oder in den Syzygien; letzteres geschieht, wenn $\cos 2(l - l') = -1$, also wenn

$$l - l' = 90^0 \quad \text{und} \quad = 270^0,$$

d. h. im ersten und im letzten Viertel oder in den Quadraturen. Der mittlere Werth hat statt für $\cos 2(l - l') = 0$, also für

$$l - l' = 45^0,\ 135^0,\ 225^0,\ 315^0,$$

d. i. in den zwischen den Syzygien und den Quadraturen mitten inne liegenden Punkten oder in den Octanten.

Was ferner die auf dem Radius Vector perpendikulare Kraft

$$= -\frac{3}{2} w \sin 2(l - l')$$

anlangt, so ist sie in den Syzygien und Quadraturen Null, weil daselbst $\sin 2(l - l') = 0$ ist. Ihren grössten Werth gleich $\frac{3}{2} w = \frac{1}{119}$ erreicht sie in den Octanten, und dieser ist abwechselnd negativ und positiv, d. h. dem Sinne der Bewegung des Mondes entgegen gerichtet und mit ihm übereinstimmend (§. 95), weil $-\sin 2(l - l')$ für

$$l - l' = 45^0,\ 135^0,\ 225^0,\ 315^0,$$

resp.

$$= -1,\ +1,\ -1,\ +1$$

wird. Die auf dem Radius perpendikulare Kraft strebt hiernach den Mond derjenigen Syzygie, welcher er am nächsten ist, noch näher zu bringen, nämlich vom letzten bis zum ersten Viertel dem Neumondspunkte und vom ersten bis zum letzten Viertel dem Vollmondspunkte. Dieses Streben ist am grössten in den Octanten, wo es dem Dreifachen des mittleren Werthes der in der Richtung des Radius störenden Kraft gleich kommt.

Was wir jetzt über die beiden störenden Kräfte besonders bemerkt haben, lässt sich leicht in Einem Satze vereinigt darstellen. Wir haben deshalb nur die zwei Kräfte zu Einer zusammenzusetzen, von deren Richtung und Stärke Folgendes gelten wird:

Während jedes synodischen Umlaufs des Mondes um die Erde dreht sich auch die Richtung der störenden Kraft einmal um ihn herum, nur nach entgegengesetztem Sinne (von der Linken nach der Rechten), so dass sie in den Syzygien abwärts von der Erde, in den Quadraturen nach ihr zu gerichtet ist. Dabei hat sie in den Syzygien ihren grössten Werth $= \frac{1}{2} w$, *in den Quadraturen ihren kleinsten* $= \frac{1}{2} w$; *in den Octanten ist sie nahe* $= \frac{1}{2} w$, *genauer* $= \frac{1}{2}\sqrt{10} \,.\, w$.

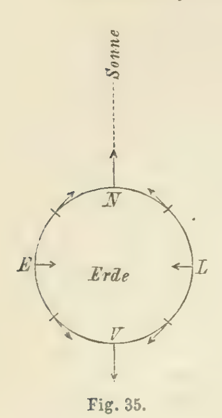


Fig. 35.

Man sehe Fig. 35, worin N, V, E, L die Punkte des Neu- und Vollmondes und des ersten und letzten Viertels sind, und wo die Richtung und Stärke der störenden Kraft durch die Richtung und Länge kleiner Pfeile angedeutet ist.

§. 102. Zusätze. *a*) Dass durch die Sonne die Schwere des Mondes gegen die Erde um ihren 357-sten Theil geschwächt wird, ist eben so viel, als ob die Summe der Massen $M + m$, welcher diese Schwere proportional ist, um ihren ebensovielten Theil verringert worden wäre. Das Product aus dem Quadrate der mittleren Bewegung des Mondes in den Würfel seiner mittleren Entfernung von der Erde wird folglich beim gestörten Monde nicht gleich $K(M + m)$ (§. 65), sondern

$$= K(M + m)\left(1 - \frac{1}{2} w\right) ,$$

also in dem Verhältnisse von 1 zu $1 - \frac{1}{2} w$ kleiner sein. Wenn wir daher die mittlere Bewegung beim gestörten Monde von derselben Grösse n, wie beim ungestörten, annehmen (§. 99), und die mittlere Entfernung des ungestörten gleich a, des gestörten gleich $a_{,}$ setzen, so wird sein:

$$n^2 a_{,}^3 = \left(1 - \frac{1}{2} w\right) n^2 a^3 ,$$

woraus

$$a_{,} = \left(1 - \frac{1}{6} w\right) a = \frac{1071}{1072} \cdot a$$

folgt.

Diese kleine Verminderung der mittleren Entfernung werden wir bald noch auf andere Weise bestätigt finden.

b) Ob wir uns die Verminderung des Productes $n^2 a^3$ durch eine

Verminderung von a allein, oder von n allein, oder durch eine gleichzeitige Aenderung von a und n erklären, ist offenbar gleichgültig. Ueberhaupt wird sein, wenn wir die mittlere Bewegung und die mittlere Entfernung beim gestörten Monde $n_{,}$ und $a_{,}$ nennen:

$$n_{,}^2 a_{,}^3 = (1 - \frac{1}{2} w)\, n^2 a^3 \;,$$

oder, wenn wir die Verhältnisse $n_{,} : n$ und $a_{,} : a$ nur sehr wenig von der Einheit abweichend annehmen und deshalb

$$n_{,} = (1 + pw)\, n \quad \text{und} \quad a_{,} = (1 + cw)\, a$$

setzen:

$$(1 + pw)^2 (1 + cw)^3 = 1 - \frac{1}{2} w \;,$$

d. i.

$$(\alpha) \qquad 2p + 3c = -\frac{1}{2} \;.$$

Hieraus folgt, wie vorhin, bei der Annahme, dass $n_{,}$ mit n gleichen Werth hat, und daher $p = 0$ ist: $c = -\frac{1}{6}$ und damit

$$a_{,} = (1 - \frac{1}{6} w)\, a \;.$$

Wollte man dagegen die mittleren Entfernungen a und $a_{,}$ bei beiden Bewegungen gleich gross annehmen, so würde $c = 0$, folglich $p = -\frac{1}{4}$ und

$$n_{,} = (1 - \frac{1}{4} w)\, n$$

sein.

Um auch ein Beispiel einer gleichzeitigen Aenderung von n und a zu geben, wollen wir festsetzen, dass die vom Radius beschriebene Fläche bei der gestörten Bewegung stets eben so gross, als bei der ungestörten, sei. Weil bei der durch a und n bestimmten Bewegung die vom Radius in der Zeiteinheit beschriebene Fläche gleich $\frac{1}{2} n a^2$ ist, so wird unter der gemachten Voraussetzung:

$$n a^2 = n_{,} a_{,}^2 = (1 + pw)\, n \,.\, (1 + 2cw)\, a^2 \;,$$

mithin $p + 2c = 0$, woraus in Verbindung mit der Relation (α) $p = -1$ und $c = \frac{1}{2}$, folglich

$$n_{,} = (1 - w)\, n \quad \text{und} \quad a_{,} = (1 + \frac{1}{2} w)\, a$$

hervorgeht.

Wir können hieraus noch schliessen, dass, wenn die den Mond störende Kraft bloss aus ihrem mittleren, ihn von der Erde direct abziehenden und daher die Flächengeschwindigkeit nicht ändernden, Theile bestände, ohne den Hinzutritt dieser Störung seine mittlere Entfernung um ihren 357-sten Theil kleiner, und seine mittlere Bewegung um ihren 179-sten Theil grösser sein würde.

§. 103. Zu noch besserer Einsicht in die Natur der störenden Kräfte wollen wir uns die in §. 101 aus den analytischen Ausdrücken für T und V abgeleiteten Resultate durch geometrische Betrachtungen aus den Grundbedingungen der Aufgabe unmittelbar zu beweisen suchen.

Man bezeichne Sonne, Erde und Mond mit S, T und L; die Kraft, mit welcher T von S angezogen wird, setze man gleich A, und die Linien

$$ST = 1\,, \quad TL = \alpha\,,$$

wo daher α nahe gleich $\frac{1}{400}$. Sei nun L zuerst zwischen S und T (Fig. 36, a), also im Neumonde, so ist

$$SL = 1 - \alpha\,,$$

und folglich die Kraft, mit welcher L von S angezogen wird

$$= \frac{A}{(1-\alpha)^2} = (1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + \ldots)\,A\,.$$

Fig. 36 a. b.

Die Kräfte, mit denen T und L von S angezogen werden, haben demnach im Neumonde einerlei Richtung, und wenn sie auch gleiche Stärke hätten, so würde durch sie die relative Lage von T und L nicht geändert, und L in seiner Bewegung um T nicht gestört werden. Es ist aber die auf L wirkende Kraft um $(2\alpha + 3\alpha^2 + \ldots)\,A$ grösser als die auf T wirkende Kraft A. Dieser Ueberschuss, welcher etwas mehr als $2\alpha A = \frac{1}{200} A$ beträgt, strebt L von T nach S hin zu entfernen, und ist eben deshalb die den Mond zur Neumondszeit störende Kraft der Sonne.

Wenn zweitens L im Vollmonde ist, also wiederum mit S und T in gerader Linie, aber ausserhalb S und T auf der Seite von T sich befindet (Fig. 36, b), so ist

$$SL = 1 + \alpha\,.$$

Die Kraft, womit L von S angezogen wird, ist daher

$$= \frac{A}{(1+\alpha)^2} = (1 - 2\alpha + 3\alpha^2 - \ldots)\,A\,,$$

also kleiner, als die Kraft, mit welcher T nach derselben Richtung getrieben wird. Es wird folglich T von L weggezogen, oder vielmehr, weil es hier nur auf die relative Bewegung von L gegen die als ruhend zu denkende Erde ankommt, L von T weggezogen, und

dieses mit einer Kraft, welche dem Unterschiede jener Kräfte gleich, d. h. $= (2\alpha - 3\alpha^2 + \ldots) A$, also etwas kleiner als $\frac{1}{200} A$ ist.

Die Sonne sucht also im Vollmonde sowohl, als im Neumonde, den Mond von der Erde zu entfernen. In beiden Fällen wirkt diese störende Kraft nahe mit derselben Stärke, mit dem 200-sten Theile der ganzen Kraft A, mit welcher die Sonne die Erde anzieht. Doch ist die störende Kraft im Neumonde um $6\alpha^2 A$, d. i. um $\frac{3}{80000} A$, stärker als im Vollmonde.

Hat L irgend eine andere Stellung gegen T und S, so trage man (Fig. 37) von T nach S zu eine Linie $TU = A$ und von L nach S zu eine Linie LM ab, die sich zu TU wie TS^2 zu LS^2 verhält, und die folglich grösser, gleich oder kleiner als TU wird, je nachdem TS grösser, gleich oder kleiner als LS ist. Die Linien TU und LM stellen alsdann die Kräfte vor, mit denen T und L von S angezogen werden. Man mache nun

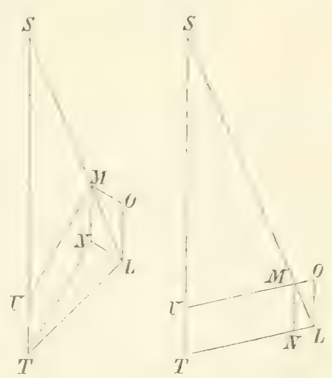


Fig. 37 und 37*.

$$TN = UM \quad \text{und} \quad LO = NM = TU \,,$$

und zerlege somit die Kraft LM in LN und LO. Die auf T und L wirkenden, einander gleichen und parallelen Kräfte TU und LO bringen aber keine Aenderung in der gegenseitigen Lage von T und L hervor, und es ist mithin die noch übrige Kraft LN allein, welche auf L störend wirkt.

Nehmen wir nun erstens an, dass T und L gleich weit von S entfernt sind, welches, sehr nahe wenigstens, in den Quadraturen der Fall ist. Alsdann ist auch $TU = LM$, folglich UM parallel mit TL, und N ein Punkt in TL (Fig. 37*). Es verhält sich daher

$$1 : \alpha = TS : TL = NM : NL = A : NL \,,$$

woraus

$$NL = \alpha A$$

folgt. Uebereinstimmend mit dem Obigen ist demnach in den Quadraturen die störende Kraft LN nach der Erde gerichtet, und halb so gross, als die den Mond in den Syzygien von der Erde entfernende Kraft oder $2\alpha A$.

Ist nicht $LS = TS$, so liegt der Punkt N nicht in TL, aber doch in der Ebene TLS, und zwar mit S auf einerlei Seite von TL,

oder auf der entgegengesetzten, je nachdem $LS <$ oder $> TS$. Denn ist $TS > LS$ (Fig. 37), und wäre dann UM parallel mit TL, so würde $LM < TU$ sein. Es ist aber alsdann $LM > TU$; mithin müssen TL und UM divergiren, und N muss mit S auf einerlei Seite von TL fallen. — Aehnlicher Weise wird der Satz für den zweiten Fall bewiesen, und es erhellet somit, wie sich — übereinstimmend mit dem Obigen — die Kraft LN um L nach rechts dreht, während sich L nach links um T bewegt.

Weil endlich die Kräfte, mit denen T von S und L von T angezogen werden, sich im Mittel wie (§. 22)

$$n'^2 a' : n^2 a = w : a$$

verhalten, so ist, wenn wir, wie in §. 101, die von T auf L ausgeübte Anziehung zur Einheit der Kraft wählen:

$$A = w : a \quad ,$$

wodurch, wie gehörig, die zuletzt erhaltenen Ausdrücke $2aA$ und aA für die störende Kraft in den Syzygien und den Quadraturen, sich in die vorher gefundenen Ausdrücke $2w$ und w derselben Kraft verwandeln.

Da die Kräfte, mit denen S auf T und L wirkt, einander nahe gleich sind, so folgt hieraus noch, dass auch die Kräfte, mit denen L von S und T angezogen wird, sich nahe wie

$$w : a = 400 : 179 = 2\tfrac{1}{4} : 1$$

verhalten, und dass daher der Mond mit einer mehr als doppelt stärkeren Kraft nach der Sonne, als nach der Erde hin, gezogen wird. Dass dessen ungeachtet der Mond nicht die Erde verlässt und der Sonne zueilt, kann für uns kein Paradoxon mehr sein.

Drittes Kapitel.

Von den vorzüglichsten Störungen des Mondlaufs und insbesondere von der Variation.

---

§. 104. Die vorzüglichsten Störungen des Radius Vector und der Länge des Mondes, zu deren Entwickelung wir jetzt übergehen, sind von dreierlei Art, indem sie entweder von den Excentricitäten der Sonnen- und der Mondsbahn ganz unabhängig sind, oder von der ersteren, oder von der letzteren Excentricität abhängen; sie führen

hiernach resp. die Namen der Variation, der jährlichen Gleichung und der Evection. Da bei diesen von den Kräften T und V erzeugten Störungen Sonne und Mond als in derselben Ebene sich bewegend angenommen werden (§. 101), so wollen wir zu ihrer Entwickelung zunächst von den in §. 34 gefundenen Formeln Gebrauch machen, durch welche für eine durch die Polarcoordinaten r und l gegebene, nahe kreisförmige und gleichförmige Bewegung eines Körpers in einer Ebene die Kräfte T und V bestimmt werden, welche die Bewegung hervorbringen. Waren nämlich r und l von der Form

$$r = a\,(1 + f' \cos \lambda' + f'' \cos \lambda'' + \ldots)\ ,$$
$$l = \lambda + g' \sin \lambda' + g'' \sin \lambda'' + \ldots\ ,$$

wo a und λ die mittleren Werthe von r und l; f', g',... kleine Brüche, deren Quadrate vernachlässigt werden konnten, und λ, λ', λ'',... der Zeit proportional wachsende Winkel bedeuten, so ergaben sich T und V von der Form

$$T = -a\,(n^2 + F' \cos \lambda' + F'' \cos \lambda'' + \ldots)\ ,$$
$$V = -a\,(G' \sin \lambda' + G'' \sin \lambda'' + \ldots)\ ,$$

wo F', G',... kleine von f', g',... und von den Geschwindigkeiten n, n', n'',..., mit denen sich λ, λ', λ'',... ändern, abhängige Brüche vorstellen.

Obschon nun im Gegenwärtigen umgekehrt aus den Kräften T und V die Coordinaten r und l gefunden werden sollen, so sieht man doch bald, wie auch zur Lösung dieser umgekehrten Aufgabe jene Formeln benutzt werden können. Da nämlich die Reihen für r und T, so wie die für l und V, von einerlei Form sind und sich im Ganzen nur durch die constanten Coefficienten unterscheiden, so hat man wegen je zweier Glieder in T und V, von denen das Glied in T den Cosinus eines der Zeit proportional wachsenden Winkels, das Glied in V den Sinus desselben Winkels zum Factor hat, auf zwei Glieder mit demselben Cosinus und Sinus in r und l zu schliessen. Auf solche Weise sind die Formen von r und l bestimmt. Die darin noch unbekannten Coefficienten der Cosinus und der Sinus ergeben sich aber dadurch, dass man nach jenen Formeln aus den angenommenen Formen für r und l die Kräfte T und V herleitet, und diese mit den gegebenen Werthen von T und V in Vergleichung bringt. Das Uebrige, was hierbei noch zu bemerken ist, wird sich am besten aus den nun folgenden Rechnungen selbst erkennen lassen.

§. 105. Um uns den Anfang unserer Untersuchungen möglichst leicht zu machen, wollen wir für's Erste nicht die Bewegung, welche

der von der Sonne gestörte Mond wirklich hat, sondern unter allen Bahnen, welche er bei dieser Störung möglicher Weise haben kann, diejenige zu bestimmen suchen, welche von der Kreisform und der Gleichförmigkeit am wenigsten abweicht, so dass die Grössen, um welche r und l von ihren mittleren Werthen unterschieden sind, nur von der Störung herrühren und daher den kleinen Störungscoefficienten w zum Factor haben.

Heisse λ der mittlere Werth von l. Die constante Geschwindigkeit, mit welcher sich λ ändert, ist gleich n, und der hieraus nach der elliptischen Theorie folgende mittlere Werth von r ist in §. 99 mit a bezeichnet worden. Wie wir bereits aus §. 102 wissen, ist hiervon der mittlere Werth von r bei der gestörten Bewegung um etwas Weniges verschieden: werde letzterer, wie dort, gleich $a_{,}$, und sein Unterschied von a, als von der Störung herrührend, gleich acw, also

$$a_{,} = a(1 + cw)$$

gesetzt, wo c eine noch zu bestimmende constante Zahl (nach §. 102 gleich $-\frac{1}{6}$) ist.

Ferner wollen wir um möglichster Einfachheit willen die Excentricität der Sonnenbahn für den Anfang unberücksichtigt lassen, und daher $r' = a'$ und die Länge l' ihrem mittleren Werthe, welcher λ' sei, gleichsetzen.

Erwägen wir nun noch, dass hier bloss die erste Potenz von w in Betracht kommen soll, und dass daher in den mit w multiplicirten Gliedern statt r und l ihre mittleren Werthe $a(1 + cw)$ und λ, oder auch schlechthin a und λ, gesetzt werden können, so reduciren sich die in §. 99 für T_1 und V_1 erhaltenen Werthe auf

$$(1) \qquad \begin{aligned} T_1 &= -\frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{2}w\,[1 + 3\cos 2(\lambda - \lambda')]\,, \\ V_1 &= -\frac{3}{2}w \sin 2(\lambda - \lambda')\,. \end{aligned}$$

Nach der in §. 104 gemachten Bemerkung können wir nun erwarten, dass, eben so wie in T_1 und V_1, auch in r und l resp. mit $w\cos 2(\lambda - \lambda')$ und $w \sin 2(\lambda - \lambda')$ multiplicirte Glieder vorkommen, und dass daher r und l ihren mittleren, um solche Glieder vermehrten Werthen gleich sein werden. Wir setzen demnach

$$(2) \qquad \begin{aligned} r &= a(1 + cw)\,[1 + fw \cos \lambda_1]\,, \\ l &= \lambda + gw \sin \lambda_1\,, \end{aligned}$$

wo f und g endliche constante Zahlen sind, und zur Abkürzung λ_1 statt $2(\lambda - \lambda')$ geschrieben worden. Hieraus folgt zunächst

$$\frac{a^2}{r^2} = 1 - 2cw - 2fw \cos\lambda_1 \ ,$$

und nach Substitution dieses Werthes in (1):

$$(3) \quad \begin{aligned} T_1 &= -1 + (\tfrac{1}{2} + 2c)\,w + (\tfrac{3}{2} + 2f)\,w \cos\lambda_1 \ , \\ V_1 &= -\tfrac{3}{2}\,w \sin\lambda_1 \ . \end{aligned}$$

Aus (2) aber fliesst nach den Formeln in §. 34:

$$\begin{aligned} T &= -a\,(1 + cw)\,\{n^2 + [(n^2 + n_1^2)f + 2nn_1 g]\,w \cos\lambda_1\} \ , \\ V &= -a\,(1 + cw)\,[2nn_1 f + n_1^2 g]\,w \sin\lambda_1 \ , \end{aligned}$$

wo n_1 die Geschwindigkeit von λ_1 bedeutet; und wenn wir mit $n^2 a$ dividiren (§. 99) und $n_1 = kn$ setzen:

$$(4) \quad \begin{aligned} T_1 &= -1 - cw - [(1 + k^2)f + 2kg]\,w \cos\lambda_1 \ , \\ V_1 &= -[2kf + k^2 g]\,w \sin\lambda_1 \ . \end{aligned}$$

Diese unmittelbar aus (2) gefolgerten Werthe von T_1 und V_1 müssen nun, wenn anders die Voraussetzung (2) richtig war, mit den Werthen (3) derselben Grössen durch gehörige Bestimmung der Constanten c, f und g identisch gemacht werden können, so dass die Coefficienten von $\cos\lambda_1$ und $\sin\lambda_1$ und das noch übrige constante Glied in (4) den entsprechenden Grössen in (3) gleich werden, dass also

$$-c = \frac{1}{2} + 2c \ ,$$

$$-(1 + k^2)f - 2kg = \frac{3}{2} + 2f \ ,$$

$$2kf + k^2 g = \frac{3}{2} \ .$$

In der That lassen sich aus diesen Gleichungen c, f und g ohne Widerspruch bestimmen, nämlich

$$c = -\frac{1}{6} \ ,$$

wie schon in §. 102, a) gefunden wurde;

$$f = -\frac{3}{2} \cdot \frac{k + 2}{k(k^2 - 1)} \ ,$$

$$g = \frac{3}{2} \cdot \frac{k^2 + 2k + 3}{k^2(k^2 - 1)} \ .$$

Die in (2) angenommene Form von r und l ist demnach die richtige, und die darin eingeführten Constanten c, f und g müssen die jetzt gefundenen Werthe haben, wenn die aus (2) herzuleitenden Kräfte mit den in (1) gegebenen, wie verlangt wird, übereinstimmen sollen.

§. 106. Es bleibt uns noch übrig, die Werthe von fw und gw numerisch zu entwickeln. — Die Geschwindigkeit, mit welcher sich $\lambda_1 = 2(\lambda - \lambda')$ ändert, ist

$$n_1 = 2(n - n') ;$$

folglich (§. 100)

$$k = \frac{n_1}{n} = 2\frac{n - n'}{n} = 2 \cdot \frac{12 \cdot 36875}{13 \cdot 36875}$$
$$= 1 \cdot 8504 .$$

Hiermit findet sich

$$f = - 1 \cdot 2876 , \qquad g = 1 \cdot 8297 ,$$

also (§. 100)

$$fw = - \frac{1 \cdot 2876}{178 \cdot 72} = - \frac{1}{138 \cdot 80} = - 0 \cdot 007204 ,$$

$$gw = \frac{1 \cdot 8297}{178 \cdot 72} = \frac{1}{97 \cdot 677} = 0 \cdot 010238 .$$

Bei diesem Werthe von gw wird die Länge l, in welcher er vorkommt, in Theilen des Halbmessers ausgedrückt vorausgesetzt. Soll aber, wie gewöhnlich, l in Graden, Minuten und Secunden bestimmt werden, so muss dieses auch mit gw geschehen. Nun ist, in Secunden ausgedrückt,

$$w = \frac{1}{178 \cdot 72} \cdot \frac{1''}{\sin 1''} = 1154''1 = 19' \, 14'' 1 ,$$

und daher

$$gw = 1 \cdot 8297 \times 1154''1 = 35' \, 12'' .$$

Nach diesem Allen wird

$$r = a,[1 - 0 \cdot 007204 \cos 2(\lambda - \lambda')] ,$$
$$l = \lambda + 35' \, 12'' \sin 2(\lambda - \lambda') .$$

§. 107. Die somit gefundene Bewegung des Mondes weicht von seiner mittleren gleichförmigen Kreisbewegung dergestalt ab, dass seine wahre Entfernung von der Erde um den 139-sten Theil der mittleren bald grösser, bald kleiner ist, als die mittlere, und dass, von der Erde aus gesehen, der wahre Ort des Mondes bis auf 35′ dem mittleren bald vorauseilt, bald hinter ihm zurückbleibt.

Am grössten ist die Entfernung, nämlich gleich $\frac{140}{139} a,$, für $\cos 2(\lambda - \lambda') = - 1$, also in den Quadraturen (§. 101); am kleinsten, gleich $\frac{138}{139} a,$, für $\cos 2(\lambda - \lambda') = 1$, also in den Syzygien, und der Mond beschreibt hiernach eine Art Ellipse, in deren Mittelpunkte die Erde steht, und deren kleinster Durchmesser in die Linie der Syzygien fällt (siehe Fig. 38).

Hinsichtlich der Länge fällt der wahre Mondsort mit dem mittleren zusammen für $\sin 2(\lambda - \lambda') = 0$, also in den Syzygien und Quadraturen; dagegen ist der wahre Ort W dem mittleren M am weitesten, nämlich um 35′, voraus für $\sin 2(\lambda - \lambda') = 1$, d. i. in den Mitten A und C des ersten und des dritten Quadranten; und um ebensoviel hinter dem mittleren Orte zurück für $\sin 2(\lambda - \lambda') = -1$, d. i. in den Mitten B und D des zweiten und vierten Quadranten. Von D bis A und von B bis C ist folglich die wahre Geschwindigkeit des Mondes grösser als die mittlere; dagegen von A bis B und von C bis D kleiner als die mittlere.

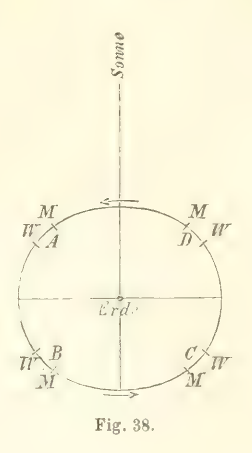


Fig. 38.

Dasselbe ergiebt sich auch, wenn man aus der Gleichung für l die Geschwindigkeit, mit welcher l wächst, bestimmt. Nach §. 35 (C) findet sich dieselbe

$$= n + n_1 gw \cos \lambda_1$$
$$= n\,[1 + kgw \cos 2(\lambda - \lambda')] \;,$$

wo

$$kgw = \frac{1 \cdot 8504}{97 \cdot 677} = \frac{1}{52 \cdot 8} \;.$$

Der grösste und der kleinste Werth dieser Geschwindigkeit ist hiernach von ihrem mittleren Werthe n um den 53-sten Theil des mittleren verschieden. Am grössten ist sie in den Syzygien, am kleinsten in den Quadraturen; in den Octanten hat sie ihren mittleren Werth. Uebereinstimmend mit dem Vorigen, nimmt sie daher im ersten Quadranten ab, im zweiten zu, und so fort abwechselnd.

§. 108. Es ist nicht schwer, sich von der Richtigkeit dieser Resultate im Allgemeinen auch ohne Rechnung zu überzeugen. Zuerst erklärt sich die von einem Quadranten zum anderen abwechselnd ab- und zunehmende Geschwindigkeit des Mondes sogleich dadurch, dass der auf dem Radius Vector perpendikulare, und daher nahe in der Richtung der Bahn wirkende, Theil der störenden Kraft den Mond derjenigen der beiden Syzygien, welcher er am nächsten ist, noch näher zu bringen strebt (§. 101). Wäre ferner die Kraft, welche den Mond nach der Erde treibt, überall gleich gross, so würde schon deshalb, weil die Geschwindigkeit in den Syzygien am grössten und in den Quadraturen am kleinsten ist, die Bahn in den ersteren Punkten am schwächsten, in den letzteren am stärksten gekrümmt sein; denn je grösser die Geschwindigkeit eines Körpers ist, desto weniger wird er durch eine auf seiner Bahn perpendikulare Kraft von der Bahn

abgelenkt. Da aber die den Mond nach der Erde ziehende Kraft durch die Sonne in den Syzygien geschwächt und in den Quadraturen verstärkt wird, so muss um so mehr die Krümmung in den Syzygien schwächer, als in den Quadraturen sein. Dieses ist aber nicht anders möglich, als wenn sich der Mond in den Quadraturen weiter als in den Syzygien von der Erde entfernt; — auf ähnliche Art, als wie bei der in §. 24, 2) betrachteten elliptischen Bewegung eines Körpers, die nach dem Mittelpunkte der Ellipse gerichtete Kraft am stärksten bei der grössten Entfernung des Körpers vom Mittelpunkte und am schwächsten bei der kleinsten Entfernung war.

§. 109. Die Glieder, welche zu den mittleren Werthen des Radius Vector und der Länge addirt werden müssen, um die wahren Werthe dieser Grössen zu erhalten, nennt man Gleichungen*). Sie sind in der Regel Producte aus Constanten in die Cosinus (beim Radius) und in die Sinus (bei der Länge) von Winkeln, welche vom mittleren Stande des gestörten und des störenden Körpers gegen einander und gegen ihre Apsiden abhängen, und folglich der Zeit proportional wachsen. Es sind daher diese Gleichungen periodischer Natur, und die durch sie ausgedrückten Störungen periodische Störungen. Die Zeit, in welcher der Winkel um 360^0 wächst, ist die Periode der Gleichung oder Störung und wird gefunden, wenn man die Geschwindigkeit seines Wachsthums in 360^0 dividirt (§. 34, Zus.). Der Winkel selbst heisst das Argument, und die in seinen Cosinus oder Sinus multiplicirte Constante der Coefficient der Gleichung. Letzterer giebt zugleich den grössten Werth an, bis zu welchem die Gleichung nach der positiven und der negativen Seite anwachsen kann.

Mit den in §§. 105 und 106 entwickelten Werthen von r und l haben wir demnach zwei Gleichungen, die eine für r, die andere für l, gefunden, deren jede zu ihrem Argumente die doppelte Winkelentfernung des Mondes von der Sonne, und folglich zu ihrer Periode einen halben synodischen Monat hat. Die Coefficienten dieser Gleichungen aber sind $-0{\cdot}007204\,a$, und $35'\,12''$. Die Folge wird lehren, dass, ungeachtet die Mondsbewegung nicht so einfach ist, als wie sie durch die jetzt für r und l erhaltenen Werthe dargestellt wird, unter den vielen zu den mittleren Werthen von r und l hinzuzufügenden Gleichungen immer auch die zwei jetzt gefundenen mit vorkommen. Von diesen ist besonders die Gleichung der Länge für die Beobachtungen sehr merkbar, da ihr Werth bis über einen halben Grad an-

*) [auch wohl Ungleichheiten (*inégalités*)].

wachsen kann. Sie wird die Variation genannt und ist von Tycho de Brahe (geb. 1546, gest. 1601) durch Beobachtungen entdeckt worden.

§. 110. Die Veränderungen des Radius Vector des Mondes geben sich durch Beobachtung seines scheinbaren Halbmessers und seiner Horizontalparallaxe zu erkennen, indem diese letzteren dem Radius Vector umgekehrt proportional sind. Eben deshalb wird auch jede Gleichung des Radius Vector eine Gleichung des scheinbaren Halbmessers und der Horizontalparallaxe zur Folge haben. In der That sei p die Horizontalparallaxe oder der Winkel, unter welchem der Halbmesser des Erdäquators vom Mittelpunkte des Mondes aus bei einer Entfernung des Mondes von der Erde gleich r erscheint. Der mittlere Werth dieses Winkels oder derjenige, welcher für $r = a_,$ statt hat, beträgt $57' 1''$. Mithin ist

$$p = \frac{a_,}{r} \cdot 57' 1''.$$

Substituirt man hierin für r seinen in §. 106 gefundenen Werth, so wird

$$\begin{aligned} p &= [1 + 0{\cdot}007204 \cos 2(\lambda - \lambda')] \cdot 57' 1'' \\ &= 57' 1'' + 24''6 \cos 2(\lambda - \lambda') \ , \end{aligned}$$

und man hat somit das Glied $24''6 \cos 2(\lambda - \lambda')$, als Gleichung der Horizontalparallaxe, erhalten.

Eben so findet sich der scheinbare Halbmesser des Mondes

$$\begin{aligned} &= [1 + 0{\cdot}007204 \cos 2(\lambda - \lambda')] \cdot 15' 33''5 \\ &= 15' 33''5 + 6''7 \cos 2(\lambda - \lambda'') \ ; \end{aligned}$$

denn $15' 33''5$ ist der scheinbare Halbmesser des Mondes in seiner mittleren Entfernung von der Erde.

Weil bei astronomischen Rechnungen die Horizontalparallaxe des Mondes häufiger, als sein Radius Vector, gebraucht wird, so geben die Tafeln, die man zur Berechnung des Mondlaufs construirt hat, unmittelbar die Horizontalparallaxe p, aus der man, wenn es nöthig ist, den Radius nach der Formel $r = a_, \cdot \frac{57' 1''}{p}$ herleiten kann.

§. 111. Bei der Vernachlässigung der höheren Potenzen von $\frac{r}{r'}$, und w, die wir uns hier gestatten (§§. 99 und 100), können wir nicht erwarten, dass die Coefficienten der erhaltenen Gleichungen und derer, welche wir noch entwickeln werden, mit den Coefficienten, welche bei Berücksichtigung jener Potenzen sich finden, ganz übereinstimmen werden, so wie aus demselben Grunde bei einer schärfer

geführten Rechnung eine bei weitem grössere Anzahl von Gleichungen, als hier, sich ergeben müssen. In Damoiseau's Mondstafeln, welche von den Beobachtungen sich nur um wenige Secunden entfernen, sind von den Gleichungen für die Länge und die Horizontalparallaxe, welche $2(\lambda - \lambda')$ zum Argumente haben, die Coefficienten $39'29''7$ und $28''5$ statt der hier gefundenen $35'12''$ und $24''6$. Ueberhaupt aber sind in diesen Tafeln die von den Excentricitäten der Monds- und Sonnenbahn unabhängigen Gleichungen

der Länge: $- 2'2''1 \sin\delta + 39'29''7 \sin 2\delta + 0''4 \sin 3\delta + 14''2 \sin 4\delta$,

der Horizontalparallaxe: $- 1''0 \cos\delta + 28''5 \cos 2\delta + 0''2 \cos 4\delta$,

wo $\delta = \lambda - \lambda'$.*)

Historisch werde hierbei noch bemerkt, dass die erste dieser Gleichungen mit dem nicht unbeträchtlichen Coefficienten von $122''$ daher rührt, dass der Mond im Neumonde etwas stärker als im Vollmonde von der Erde abgezogen wird. Das Verhältniss zwischen diesen Abziehungen hängt von dem Verhältnisse zwischen den Entfernungen des Mondes und der Sonne von der Erde ab (§. 103); und da letzteres Verhältniss einerlei mit dem zwischen den Horizontalparallaxen der Sonne und des Mondes ist, so wird jene Gleichung auch die parallaktische Gleichung genannt.

Viertes Kapitel.

Von der jährlichen Gleichung.

§. 112. Eben so, wie uns im Vorigen das Vorhandensein von Störungsgleichungen, deren Argument $2(\lambda - \lambda')$ war, durch die in w multiplicirten Glieder von T und V, welche dasselbe Argument hatten, angedeutet wurde, so können sich auch die Argumente aller übrigen Gleichungen durch nichts Anderes, als die weitere Entwickelung dieser in w multiplicirten Glieder, zu erkennen geben. Auch wird uns dieselbe Methode, nach welcher wir die Coefficienten der Gleichungen, deren Argument $2(\lambda - \lambda')$ war, bestimmten, zur Ermitte-

*) Genauere Werthe der Mondstörungen sind von Hansen gegeben, vergl. die Anmerkungen zu §§. 148 und 149. A. d. H.

lung der Coefficienten der übrigen Gleichungen dienen können, so lange wir noch, wie in §. 105, voraussetzen, dass die Bewegung des Mondes von einer vollkommen kreisförmigen und gleichförmigen Bewegung bloss wegen der Störung durch die Sonne abweicht.

In der That sei durch weitere Entwickelung der in w multiplicirten Glieder

$$(1)\qquad \begin{aligned} T_1 &= -\frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{2}w + F_1 w \cos\lambda_1 + F_2 w \cos\lambda_2 + \ldots \\ V_1 &= G_1 w \sin\lambda_1 + G_2 w \sin\lambda_2 + \ldots \end{aligned}$$

gefunden worden, wo F_1, G_1, F_2, G_2, ... endliche Constanten, und λ_1, λ_2, ... mit den constanten Geschwindigkeiten n_1, n_2, ... sich ändernde Winkel bedeuten. Hiernach werden auch die Coordinaten r und l mit w behaftete periodische Glieder, deren Argumente λ_1, λ_2, ... sind, und keine anderen, enthalten. Wir setzen deshalb, und wegen der zu erwarten stehenden Aenderung der elliptischen Relation zwischen n und a (§. 102):

$$(2)\qquad \begin{aligned} r &= a\,(1 + cw)\,[1 + f_1 w \cos\lambda_1 + f_2 w \cos\lambda_2 + \ldots]\,, \\ l &= \lambda + g_1 w \sin\lambda_1 + g_2 w \sin\lambda_2 + \ldots \end{aligned}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt:

$$\frac{a^2}{r^2} = 1 - 2cw - 2f_1 w \cos\lambda_1 - 2f_2 w \cos\lambda_2 - \ldots,$$

und es wird damit

$$(3)\qquad \begin{aligned} T_1 &= -1 + (\tfrac{1}{2} + 2c)\,w + (F_1 + 2f_1)\,w \cos\lambda_1 + \ldots\,, \\ V_1 &= G_1 w \sin\lambda_1 + G_2 w \sin\lambda_2 + \ldots \end{aligned}$$

Entwickelt man aber nach §. 34 die Kräfte, von welchen die durch (2) ausgedrückte Bewegung hervorgebracht wird, dividirt dieselben durch $n^2 a$ und setzt zur Abkürzung

$$n_1 = k_1 n\,, \qquad n_2 = k_2 n\,, \qquad \text{etc.}\,,$$

so kommt (vergl. §. 105):

$$(4)\qquad \begin{aligned} T_1 &= -1 - cw - [(1 + k_1^2) f_1 + 2k_1 g_1]\, w \cos\lambda_1 - \ldots \\ V_1 &= -[2k_1 f_1 + k_1^2 g_1]\, w \sin\lambda_1 - [2k_2 f_2 + k_2^2 g_2]\, w \sin\lambda_2 - \ldots \end{aligned}$$

Da nun diese Werthe von T_1 und V_1 mit denen in (3) von einerlei Form sind, so wird die durch (2) dargestellte Bewegung, eben so, wie sie eine Folge der Kräfte (4) ist, auch als eine Folge der Kräfte (3) oder (1) angesehen werden können, wenn wir die Coefficienten in (2) so bestimmen, dass die in (3) und (4) ent-

sprechenden Gliedern zugehörigen Coefficienten einander gleich werden, dass also

$$-c = \frac{1}{2} + 2c_1$$

$$-(1+k_1^2)f_1 - 2k_1g_1 = F_1 + 2f_1 \ ,$$

$$-2k_1f_1 - k_1^2g_1 = G_1 \ ,$$

$$-(1+k_2^2)f_2 - 2k_2g_2 = F_2 + 2f_2 \ ,$$

$$-2k_2f_2 - k_2^2g_2 = G_2 \ ,$$

u. s. w. Aus der ersten dieser Gleichungen fliesst aber, wie in §. 105,

$$c = -\frac{1}{6} \ ,$$

aus den zwei folgenden:

$$f_1 = -\frac{k_1F_1 - 2G_1}{k_1(k_1^2-1)} \ , \qquad g_1 = \frac{2k_1F_1 - (3+k_1^2)G_1}{k_1^2(k_1^2-1)} \ ;$$

aus den zwei nächstfolgenden:

$$f_2 = -\frac{k_2F_2 - 2G_2}{k_2(k_2^2-1)} \ , \qquad g_2 = \frac{2k_2F_2 - (3+k_2^2)G_2}{k_2^2(k_2^2-1)} \ ;$$

u. s. w., wodurch die Coefficienten in (2), und damit die gesuchte Bewegung, vollkommen bestimmt sind.

§. 113. Im vorigen Kapitel haben wir bei Bestimmung der einfachsten Bahn, welche der von der Sonne gestörte Mond beschreiben kann, die Bewegung der Sonne genau kreis- und gleichförmig angenommen. Wir wollen aber jetzt die in der Natur von dieser Hypothese stattfindende Abweichung nicht mehr unberücksichtigt lassen und den Einfluss untersuchen, den die Excentricität e' der Sonnenbahn auf die Mondsbewegung ausübt.

Weil auch jetzt noch r und l von ihren mittleren Werthen a und λ nur um Glieder verschieden sein sollen, welche von der Störung herrühren und daher w zum Factor haben, und weil von w immer nur die erste Potenz berücksichtigt werden soll, so haben wir:

$$T_1 = -\frac{a^2}{r^2} + \frac{a'^3}{2r'^3}w[1 + 3\cos 2(\lambda - l')] \ ,$$

$$V_1 = -\frac{3a'^3}{2r'^3}w\sin 2(\lambda - l') \ ,$$

worin für r' und l' ihre elliptischen Werthe zu substituiren sind. Diese sind, wenn α' die mittlere Anomalie der Sonne bezeichnet (§. 43):

$$r' = a'(1 - e'\cos\alpha') \quad \text{und} \quad l' = \lambda' + 2e'\sin\alpha' \ .$$

Hieraus folgt:

$$\frac{a'^3}{r'^3} = 1 + 3e'\cos\alpha' \ ,$$

$$2(\lambda - l') = \lambda_1 - 4e' \sin\alpha' ,$$

wenn wiederum $2(\lambda - \lambda') = \lambda_1$ gesetzt wird; mithin

$$\cos 2(\lambda - l') = \cos\lambda_1 + 4e' \sin\alpha' \sin\lambda_1 \,^{*)}$$

$$= \cos\lambda_1 + 2e' \cos(\lambda_1 - \alpha') - 2e' \cos(\lambda_1 + \alpha') ,$$

$$\sin 2(\lambda - l') = \sin\lambda_1 - 4e' \sin\alpha' \cos\lambda_1 \,^{*)}$$

$$= \sin\lambda_1 + 2e' \sin(\lambda_1 - \alpha') - 2e' \sin(\lambda_1 + \alpha') ,$$

$$\frac{a'^3}{r'^3} \cos 2(\lambda - l') = \cos\lambda_1 + 2e' \cos(\lambda_1 - \alpha') - 2e' \cos(\lambda_1 + \alpha') + 3e' \cos\alpha' \cos\lambda_1$$

$$= \cos\lambda_1 + \frac{7}{2} e' \cos(\lambda_1 - \alpha') - \frac{1}{2} e' \cos(\lambda_1 + \alpha')$$

und eben so

$$\frac{a'^3}{r'^3} \sin 2(\lambda - l') = \sin\lambda_1 + \frac{7}{2} e' \sin(\lambda_1 - \alpha') - \frac{1}{2} e' \sin(\lambda_1 + \alpha') .$$

Die Subsitution hiervon in den obigen Werthen von T_1 und V_1 giebt:

$$T_1 = -\frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{2} w + \frac{3}{2} w \cos\lambda_1 + \frac{3}{2} e' w \cos\alpha' + \frac{21}{4} e' w \cos(\lambda_1 - \alpha') - \frac{3}{4} e' w \cos(\lambda_1 + \alpha') ,$$

$$V_1 = -\frac{3}{2} w \sin\lambda_1 - \frac{21}{4} e' w \sin(\lambda_1 - \alpha') + \frac{3}{4} e' w \sin(\lambda_1 + \alpha') .$$

Hiermit sind die Ausdrücke für T_1 und V_1 auf die in §. 112 angenommene Form (1) gebracht, und es wird sich nun die aus ihnen folgende Bewegung nach den daselbst entwickelten Formeln leicht bestimmen lassen.

Zuerst sind die dortigen Argumente

$$\lambda_1 = \lambda_1 , \quad \lambda_2 = \alpha' , \quad \lambda_3 = \lambda_1 - \alpha' , \quad \lambda_4 = \lambda_1 + \alpha' ,$$

also (§. 106)

$$n_1 = 2(n - n') , \quad n_2 = n' ,$$

weil $\alpha' = \lambda' - \omega'$ (§. 45), und weil die Länge des Perigäums der Sonnenbahn ω' constant ist, wenigstens hier als constant angesehen werden kann,

$$n_3 = n_1 - n_2 , \quad n_4 = n_1 + n_2 .$$

---

*) Nach den Formeln

$$\cos(x - \xi) = \cos x + \xi \sin x$$

und

$$\sin(x - \xi) = \sin x - \xi \cos x ,$$

wenn von ξ nur die erste Potenz beibehalten wird.

Ferner sind die dortigen Coefficienten

$$F_1 = \frac{3}{2}, \quad F_2 = \frac{3}{2}e', \quad F_3 = \frac{21}{4}e', \quad F_4 = -\frac{3}{4}e',$$

$$G_1 = -\frac{3}{2}, \quad G_2 = 0, \quad G_3 = -\frac{21}{4}e', \quad G_4 = \frac{3}{4}e'.$$

Mit diesen Werthen von F_1, G_1, F_2, G_2,... und den aus n_1, n_2, ... fliessenden Werthen von

$$k_1 = 2\left(1 - \frac{n'}{n}\right), \quad k_2 = \frac{n'}{n}, \quad k_3 = k_1 - k_2, \quad k_4 = k_1 + k_2$$

finden sich nun für f_1 und g_1 die bereits in §. 105 erhaltenen Ausdrücke und nächstdem

$$f_2 = \frac{3}{2}e' \cdot \frac{1}{1 - k_2^2}, \qquad g_2 = -3e' \cdot \frac{1}{k_2(1 - k_2^2)},$$

$$f_3 = -\frac{21}{4}e' \cdot \frac{2 + k_3}{k_3(k_3^2 - 1)}, \quad g_3 = \frac{21}{4}e' \cdot \frac{3 + 2k_3 + k_3^2}{k_3^2(k_3^2 - 1)},$$

$$f_4 = \frac{3}{4}e' \cdot \frac{2 + k_4}{k_4(k_4^2 - 1)}, \qquad g_4 = -\frac{3}{4}e' \cdot \frac{3 + 2k_4 + k_4^2}{k_4^2(k_4^2 - 1)};$$

und hiermit die gesuchten Coordinaten:

$$r = a_{\prime}[1 + f_1 w \cos\lambda_1 + f_2 w \cos\alpha' + f_3 w \cos(\lambda_1 - \alpha') + f_4 w \cos(\lambda_1 + \alpha')],$$

$$l = \lambda + g_1 w \sin\lambda_1 + g_2 w \sin\alpha' + g_3 w \sin(\lambda_1 - \alpha') + g_4 w \sin(\lambda_1 + \alpha').$$

§. 114. Wegen der Excentricität der Sonnenbahn kommen demnach sowohl für den Radius Vector, als für die Länge, drei Gleichungen hinzu, welche die Anomalie der Sonne und den doppelten Winkelabstand des Mondes von der Sonne. das eine Mal um die Anomalie der Sonne vermindert, das andere Mal um dieselbe vermehrt, zu Argumenten haben, und deren Coefficienten Producte aus der Excentricität e' der Sonnenbahn in gewisse Functionen des Verhältnisses $n' : n$ zwischen den mittleren Bewegungen von Sonne und Mond sind. Um diese Coefficienten jetzt numerisch zu bestimmen, so ist

$$e' = 0{\cdot}016792, \qquad k_2 = \frac{n'}{n} = 0{\cdot}074801.$$

folglich

$$k_1 = 2(1 - k_2) = 1{\cdot}8504,$$

$$k_3 = k_1 - k_2 = 1{\cdot}7756,$$

$$k_4 = k_1 + k_2 = 1{\cdot}9252.$$

Mit diesen Werthen für e', k_2, ... und mit $w = k_2^2 = 0{\cdot}005595$ finden sich die Werthe von

$$f_2 w = 0{\cdot}000142\,, \qquad f_3 w = -0{\cdot}000487\,, \qquad f_4 w = 0{\cdot}000053\,.$$

Ferner ergeben sich, wenn man für w seinen in Secunden ausgedrückten Werth $= 1154''1$ (§. 106) nimmt:

$$g_2 w = -13'2''\,, \qquad g_3 w = 2'25''\,, \qquad g_4 w = -15''\,;$$

und es wird daher und nach §. 106:

$$\frac{r}{a_{\prime}} = 1 - 0{\cdot}007204 \cos\lambda_1 + 0{\cdot}000142 \cos\alpha' - 0{\cdot}000487 \cos(\lambda_1 - \alpha') + 0{\cdot}000053 \cos(\lambda_1 + \alpha')\,,$$

$$l = \lambda + 35'12'' \sin\lambda_1 - 13'2'' \sin\alpha' + 2'25'' \sin(\lambda_1 - \alpha') - 15'' \sin(\lambda_1 + \alpha')\,.$$

Aus dem Werthe für r fliesst noch die Horizontalparallaxe (§. 110) oder $\frac{a_{\prime}}{r} \cdot 57'1''$

$$= 57'1'' + 24''6 \cos\lambda_1 - 0''5 \cos\alpha' + 1''7 \cos(\lambda_1 - \alpha') - 0''2 \cos(\lambda_1 + \alpha')\,.$$

Nach Damoiseau sind die Coefficienten der drei letzten Glieder für die Länge

$$-11'13''0\,; \qquad +2'45''5\,; \qquad -24''6\,;$$

für die Horizontalparallaxe:

$$-0''3\,; \qquad +1''9\,; \qquad -0''3\,.$$

§. 115. Unter den jetzt gefundenen, von der Excentricität der Sonnenbahn herrührenden Gleichungen ist die bei weitem beträchtlichste die Gleichung für die Länge, deren Argument die mittlere Anomalie der Sonne, und deren Coefficient nach unserer Rechnung $-13'$, richtiger $-11'$, ist. Sie ist eben so, wie die Variation, von Tycho de Brahe entdeckt worden, und wird, weil sie zu ihrer Periode ein (anomalistisches) Jahr hat, die jährliche Gleichung genannt.

Das Argument dieser Gleichung ist dasselbe, welches die Mittelpunktsgleichung der Sonne, $+2e' \sin\alpha'$, hat, nur das Zeichen das entgegengesetzte. Lassen wir daher die übrigen Gleichungen unberücksichtigt, so ist zufolge der jährlichen Gleichung der wahre Mondsort desto mehr — bis auf $11'$ — dem mittleren voraus oder hinter ihm zurück, je mehr der wahre Sonnenort hinter dem mitt-

leren zurück oder ihm voraus ist. Es wird mithin auch die wahre Winkelgeschwindigkeit des Mondes grösser oder kleiner als die mittlere sein, je nachdem die wahre Winkelgeschwindigkeit der Sonne kleiner oder grösser als ihre mittlere ist.

Dasselbe giebt auch geradezu die aus der Länge $\lambda - 11' \, 13'' \sin \alpha'$ nach §. 35 gefolgerte Geschwindigkeit

$$= n - 11' \, 13'' \, . \sin 1'' \, . \, n' \cos \alpha' = n \, (1 - 0{\cdot}000244 \cos \alpha')$$

zu erkennen, wonach die grössten und kleinsten Werthe der wahren Geschwindigkeit $= 1 \pm 0{\cdot}000244$ der mittleren sind und für $\alpha' = 180^0$ und $= 0^0$, also dann stattfinden, wenn die Sonne in der Erdferne und in der Erdnähe ist und daher ihre kleinste und ihre grösste Geschwindigkeit hat.

Auf ähnliche Weise verhält es sich auch mit dem Radius Vector des Mondes. Denn die Gleichung für denselben, welche mit der jährlichen Gleichung einerlei Argument hat, ist $+ 0{\cdot}000142 \cos \alpha'$, und folglich der Radius des Mondes am grössten, wenn $\alpha' = 0^0$ und mithin der Radius der Sonne am kleinsten ist; dagegen ist der Radius des Mondes am kleinsten für $\alpha' = 180^0$, wo der Radius der Sonne am grössten ist.

In dem Halbjahre also, in welchem sich die Sonne von der Erde entfernt und ihre Geschwindigkeit sich verringert (vom 1. Januar bis 2. Juli), kommt der Mond der Erde näher und seine Geschwindigkeit wächst. In dem folgenden Halbjahre aber, in welchem sich die Sonne der Erde wieder nähert und ihre Geschwindigkeit zunimmt, entfernt sich der Mond von der Erde und seine Geschwindigkeit nimmt ab.

§. 116. Um uns den Grund dieser Erscheinung unmittelbar aus der Natur der störenden Kraft deutlich zu machen, dürfen wir nur erwägen, dass diese Kraft, abgesehen von einem bestimmten Orte des Mondes in seiner Bahn, den Mond von der Erde zu entfernen strebt (§. 102), und dieses offenbar desto stärker, je näher die Sonne der Erde ist. Das Glied, welches diese von einem bestimmten Orte des Mondes unabhängige Kraft darstellt, ist das in T_1 vorkommende Glied $\frac{a'^3}{2 r'^3} w$ (§. 113) und giebt damit zu erkennen, dass diese Kraft dem Würfel der Entfernung der Sonne von der Erde umgekehrt proportional ist.

Je nachdem sich daher die Sonne der Erde nähert oder von ihr entfernt, muss der Radius des Mondes wachsen oder abnehmen; und da die Kraft selbst, welche dieses bewirkt, in der Richtung des Radius wirkt, mithin seine Flächengeschwindigkeit unverändert lässt,

so wird im ersteren Falle seine Winkelgeschwindigkeit kleiner, im letzteren grösser werden.

Zusatz. Dass sich bei der jetzt in Rede stehenden Ungleichheit die Flächengeschwindigkeit nicht ändert, geht auch leicht aus den diese gestörte Bewegung ausdrückenden Formeln

$$r = a_{,}[1 + f_2 w \cos\alpha'] \quad \text{und} \quad l = \lambda + g_2 w \sin\alpha'$$

hervor. Bedeutet nämlich, wie in §. 35, l' die Geschwindigkeit von l, so ist

$$l' = n + n' g_2 w \cos\alpha' = n(1 + k_2 g_2 w \cos\alpha'),$$

und damit die doppelte Flächengeschwindigkeit (ebendas.)

$$= rrl' = a_{,}^2 n\,(1 + 2 f_2 w \cos\alpha')(1 + k_2 g_2 w \cos\alpha')$$
$$= a_{,}^2 n\,[1 + (2 f_2 + k_2 g_2) w \cos\alpha'] = a_{,}^2 n,$$

also constant, weil nach den in §. 113 für f_2 und g_2 gefundenen Werthen $2 f_2 + k_2 g_2 = 0$ ist.

Fünftes Kapitel.

Von der Evection.

§. 117. Wir haben in dem Vorhergehenden eine sehr nahe kreis- und gleichförmige Bewegung gefunden, welche der in seinem Laufe um die Erde von der Sonne gestörte Mond möglicher Weise haben kann, und in dem Falle auch wirklich haben würde, wenn irgend einmal seinem Radius Vector und seiner Länge, so wie den Geschwindigkeiten, mit denen sich beide ändern, diejenigen Werthe zugekommen wären, welche aus den vorhin (§. 114) für r und l erhaltenen Ausdrücken fliessen (§. 25).

Statt dieser Bewegung, die sich von einer vollkommen kreis- und gleichförmigen nur durch die mit w behafteten Glieder unterscheidet, geben aber die Beobachtungen deutlich genug eine Ellipse als Grundform der Mondsbahn zu erkennen. Die Excentricität dieser Ellipse ist $= \frac{1}{18}$, und die daraus folgende Mittelpunktsgleichung (§. 43) hat einen Coefficienten, $= 6^0 17'$, der bedeutend grösser als

der Coefficient jeder Störungsgleichung ist. Wir wollen daher in dem Folgenden statt der vorigen Kreisform diese elliptische der Rechnung zum Grunde legen und untersuchen, ob und was für neue Ungleichheiten bei dieser Hypothese zum Vorschein kommen; denn nur auf solche Weise können wir hoffen, die Formeln der Theorie mit den Beobachtungen in die zu wünschende Uebereinstimmung zu bringen.

§. 118. Bezeichnet e die Excentricität der Mondsbahn und α die mittlere Anomalie des Mondes, so wird sein elliptischer Ort, mit Weglassung der zweiten und höheren Potenzen von e, durch

$$r = a(1 - e\cos\alpha) \quad \text{und} \quad l = \lambda + 2e\sin\alpha$$

bestimmt. Um daher die bei dem elliptischen Laufe des Mondes statt habenden Störungen zu finden, wollen wir zunächst diese elliptischen Werthe von r und l in den mit w multiplicirten Gliedern von T und V substituiren. Denn damit werden T und V noch immer bis auf die erste Potenz von w genau, und somit alle die Störungen zu liefern im Stande sein, welche w und ew, so wie $e'w$, zu Factoren haben. Weil ferner das Glied mit dem Factor $ee'w$, als einer höheren Ordnung angehörig, hier ausser Betracht bleibt (§. 100), und wir daher auch jetzt mit Berücksichtigung von e' keine anderen Glieder, als die schon in §§. 113 und 114 entwickelten, finden würden, so nehmen wir gegenwärtig für die Sonnencoordinaten r' und l' schlechthin ihre mittleren Werthe a' und λ' und schreiben demnach statt der in §. 99 für T_1 und V_1 aufgestellten Formeln:

$$T_1 = -\frac{a^2}{r^2} + \frac{r}{2a} w[1 + 3\cos 2(l - \lambda')] ,$$

$$V_1 = -\frac{3r}{2a} w \sin 2(l - \lambda') .$$

Nun ist mit Anwendung der elliptischen Werthe von r und l (vergl. §. 113):

$$2(l - \lambda') = \lambda_1 + 4e\sin\alpha , \qquad \text{wo } \lambda_1 = 2(\lambda - \lambda') ,$$

$$\cos 2(l - \lambda') = \cos\lambda_1 - 2e\cos(\lambda_1 - \alpha) + 2e\cos(\lambda_1 + \alpha) ,$$

$$\sin 2(l - \lambda') = \sin\lambda_1 - 2e\sin(\lambda_1 - \alpha) + 2e\sin(\lambda_1 + \alpha) ,$$

$$\frac{r}{a}\cos 2(l - \lambda') = \cos\lambda_1 - \tfrac{5}{2}e\cos(\lambda_1 - \alpha) + \tfrac{3}{2}e\cos(\lambda_1 + \alpha) ,$$

$$\frac{r}{a}\sin 2(l - \lambda') = \sin\lambda_1 - \tfrac{5}{2}e\sin(\lambda_1 - \alpha) + \tfrac{3}{2}e\sin(\lambda_1 + \alpha) .$$

Hiermit wird

$$(1)\quad T_1 = -\frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{2}w - \frac{1}{2}ew\cos\alpha + \frac{3}{2}w\cos\lambda_1$$
$$-\frac{15}{4}ew\cos(\lambda_1 - \alpha) + \frac{9}{4}ew\cos(\lambda_1 + \alpha)\ ,$$

$$(2)\quad V_1 = -\frac{3}{2}w\sin\lambda_1 + \frac{15}{4}ew\sin(\lambda_1 - \alpha) - \frac{9}{4}ew\sin(\lambda_1 + \alpha)\ .$$

Wir erkennen hieraus, dass r und l, bei Berücksichtigung der Excentricität der Mondsbahn, ausser den uns schon bekannten Gliedern, welche λ_1 zum Argument und w zum Factor haben, noch mit ew multiplicirte Störungsglieder erhalten, deren Argumente α, $\lambda_1 - \alpha$ und $\lambda_1 + \alpha$ sind. Indem wir daher alle diese Glieder zu den elliptischen Werthen von r und l hinzufügen und den mittleren Werth von r um die Constante acw vergrössern (§. 105), setzen wir:

$$(3)\quad \frac{r}{a} = 1 - e\cos\alpha + cw + f_0 ew\cos\alpha + f_1 w\cos\lambda_1$$
$$+ f_5 ew\cos(\lambda_1 - \alpha) + f_6 ew\cos(\lambda_1 + \alpha)\ ,$$

$$(4)\quad l = \lambda + 2e\sin\alpha + g_0 ew\sin\alpha + g_1 w\sin\lambda_1$$
$$+ g_5 ew\sin(\lambda_1 - \alpha) + g_6 ew\sin(\lambda_1 + \alpha)\ ,$$

und suchen nun die Zahlen $c, f_0, g_0, \ldots$ so zu bestimmen, dass die aus (3) und (4) zu folgernden Kräfte mit (1) und (2) identisch werden. Hierzu sind aber die in §. 34 entwickelten und bisher benutzten Formeln nicht mehr ausreichend, weil jetzt nicht mehr, wie dort vorausgesetzt wurde, alle die zu den mittleren Werthen von r und l hinzugefügten Glieder so klein sind, dass ihre Producte in einander vernachlässigt werden können. Es ist nämlich r sowohl, als l, von der Form

$$A + Be + Cw + Dew\ ,$$

und es kann daher das Product aus den Gliedern Be und Cw gegen das letzte Glied Dew nicht unbeachtet bleiben. Auch würde, weil nach der Annahme in §. 100, e von der ersten und w von der zweiten, also ew von der dritten Ordnung ist, noch das Quadrat und der Cubus von Be mit zu berücksichtigen sein. Da aber die Glieder ohne w zur rein elliptischen Bewegung gehören, und wir es hier nur mit der Entwickelung der von der Störung herrührenden und daher in w multiplicirten Glieder zu thun haben, so brauchen wir auf die höheren Potenzen von e keine Rücksicht zu nehmen.

Um, diesen Bemerkungen gemäss, zuerst das in (1) vorkommende Glied $-\frac{a^2}{r^2}$ zu entwickeln, setzen wir:

$$-e\cos\alpha + cw + f_0 ew\cos\alpha + f_1 w\cos\lambda_1 + \ldots = x$$

und damit

$$\frac{r}{a} = 1 + x \ .$$

Hieraus folgt, bis auf die zweite Potenz von x genau:

$$\frac{a^2}{r^2} = 1 - 2x + 3x^2 \ .$$

Es ist aber mit Weglassung der zweiten Potenzen von e und w:

$$3x^2 = -6e\cos\alpha\,(cw + f_1 w\cos\lambda_1)$$
$$= -6cew\cos\alpha - 3f_1 ew[\cos(\lambda_1 - \alpha) + \cos(\lambda_1 + \alpha)] \ ,$$

folglich

$$\frac{a^2}{r^2} = 1 + 2e\cos\alpha - 2cw - (6c + 2f_0)ew\cos\alpha - 2f_1 w\cos\lambda_1$$
$$- (3f_1 + 2f_5)ew\cos(\lambda_1 - \alpha) - (3f_1 + 2f_6)ew\cos(\lambda_1 + \alpha) \ .$$

Dieses in (1) substituirt und der Kürze willen $\lambda_1 - \alpha = \lambda_5$ und $\lambda_1 + \alpha = \lambda_6$ gesetzt, erhalten wir:

$$(1^*)\quad T_1 = -1 + (2c + \tfrac{1}{2})w - 2e\cos\alpha + (6c + 2f_0 - \tfrac{1}{2})ew\cos\alpha$$
$$+ (2f_1 + \tfrac{3}{2})w\cos\lambda_1 + (3f_1 + 2f_5 - \tfrac{15}{4})ew\cos\lambda_5$$
$$+ (3f_1 + 2f_6 + \tfrac{9}{4})ew\cos\lambda_6 \ ,$$

$$(2^*)\quad V_1 = -\tfrac{3}{2}w\sin\lambda_1 + \tfrac{15}{4}ew\sin\lambda_5 - \tfrac{9}{4}ew\sin\lambda_6 \ .$$

§. 119. Wir haben nunmehr T_1 und V_1 aus den in (3) und (4) für r und l angenommenen Werthen herzuleiten. Da aus den angegebenen Gründen von der Methode in §. 112 hier kein Gebrauch gemacht werden kann, so wollen wir die allgemein gültigen Formeln (D) in §. 36 anwenden. Bedeuten demnach im jetzigen Paragraphen, wie dort, r' und l' die Geschwindigkeiten von r und l, r'' und l'' die von r' und l', und setzen wir die constanten Geschwindigkeiten, mit denen sich die Argumente

$$\lambda, \quad \alpha, \quad \lambda_1, \quad \lambda_5, \quad \lambda_6$$

ändern, resp.

$$= n, \quad k_0 n, \quad k_1 n, \quad k_5 n, \quad k_6 n \ ,$$

wobei noch zu bemerken, dass k_0 entweder $= 1$, oder von 1 doch nur sehr wenig verschieden ist. Denn bezeichnet ω die Länge des Perigäums des Mondes, so ist (§. 45)

$$\alpha = \lambda - \omega \ .$$

In der elliptischen Theorie ist aber ω von constanter Länge, folg-

lich die Geschwindigkeiten n und $k_0 n$ von λ und α einander gleich, folglich $k_0 = 1$. Sollte daher k_0 von 1 abweichen, also ω sich ändern, so könnte dieses nur in Folge der Störung geschehen, und es muss mithin der Unterschied zwischen k_0 und 1, wenn anders ein solcher stattfindet, von gleicher Ordnung mit w sein; woraus noch folgt, dass in allen den Gliedern, welche bereits w als Factor enthalten, k_0 geradezu $= 1$ gesetzt werden kann.

Es findet sich somit:

$$\frac{r'}{na} = k_0 e \sin\alpha - f_0\, ew \sin\alpha - k_1 f_1\, w \sin\lambda_1$$
$$- k_5 f_5\, ew \sin\lambda_5 - k_6 f_6\, ew \sin\lambda_6 \;,$$
$$\frac{r''}{nna} = k_0^2 e \cos\alpha - f_0\, ew \cos\alpha - k_1^2 f_1\, w \cos\lambda_1$$
$$- k_5^2 f_5\, ew \cos\lambda_5 - k_6^2 f_6\, ew \cos\lambda_6 \;,$$
$$\frac{l'}{n} = 1 + 2k_0 e \cos\alpha + g_0\, ew \cos\alpha + k_1 g_1\, w \cos\lambda_1$$
$$+ k_5 g_5\, ew \cos\lambda_5 + k_6 g_6\, ew \cos\lambda_6 \;,$$
$$\frac{l''}{nn} = -2k_0^2 e \sin\alpha - g_0\, ew \sin\alpha - k_1^2 g_1\, w \sin\lambda_1$$
$$- k_5^2 g_5\, ew \sin\lambda_5 - k_6^2 g_6\, ew \sin\lambda_6 \;.$$

Hieraus folgt weiter mit der Berücksichtigung, dass

$$\cos\alpha \cos\lambda_1 = \tfrac{1}{2}\cos\lambda_5 + \tfrac{1}{2}\cos\lambda_6 \;,$$
$$\sin\alpha \cos\lambda_1 = -\tfrac{1}{2}\sin\lambda_5 + \tfrac{1}{2}\sin\lambda_6 \;,$$
$$\cos\alpha \sin\lambda_1 = \tfrac{1}{2}\sin\lambda_5 + \tfrac{1}{2}\sin\lambda_6$$

ist:

$$\frac{l'^2}{nn} = 1 + 4k_0 e \cos\alpha + 2g_0\, ew \cos\alpha + 2k_1 g_1\, w \cos\lambda_1$$
$$+ 2(k_1 g_1 + k_5 g_5)\, ew \cos\lambda_5 + 2(k_1 g_1 + k_6 g_6)\, ew \cos\lambda_6 \;,$$
$$\frac{r l'^2}{nna} = 1 + cw + (4k_0 - 1)\, e \cos\alpha + (4c + f_0 + 2g_0)\, ew \cos\alpha$$
$$+ (f_1 + 2k_1 g_1)\, w \cos\lambda_1 + (f_5 + 2f_1 + k_1 g_1 + 2k_5 g_5)\, ew \cos\lambda_5$$
$$+ (f_6 + 2f_1 + k_1 g_1 + 2k_6 g_6)\, ew \cos\lambda_6 \;;$$

folglich

$$(5)\quad T_1 = \frac{r'' - r l'^2}{nna} = -1 - cw + F_0 e \cos\alpha + F_1 w \cos\lambda_1$$
$$+ F_5\, ew \cos\lambda_5 + F_6\, ew \cos\lambda_6 \;,$$

wo

$$F_0 = -4k_0 + 1 + k_0^2 - 2(2c + f_0 + g_0)\, w \;,$$
$$F_1 = -(1 + k_1^2)\, f_1 - 2k_1 g_1 \;,$$
$$F_5 = -2f_1 - k_1 g_1 - (1 + k_5^2) f_5 - 2k_5 g_5 \;,$$
$$F_6 = -2f_1 - k_1 g_1 - (1 + k_6^2) f_6 - 2k_6 g_6 \;;$$

und nachdem man ähnlicher Weise $\frac{rl''}{nna}$ und $\frac{r'l'}{nna}$ entwickelt hat:

$$(6)\quad V_1 = \frac{2r'l' + rl''}{nna} = G_0 e \sin \alpha + G_1 w \sin \lambda_1 + G_5 ew \sin \lambda_5 + G_6 ew \sin \lambda_6 \; ,$$

wo

$$G_0 = 2k_0 - 2f_0 w - 2k_0^2 - g_0 w - 2cw \; ,$$

$$G_1 = -2k_1 f_1 - k_1^2 g_1 \; ,$$

$$G_5 = -2k_5 f_5 - 2k_1 f_1 - k_1 g_1 - k_5^2 g_5 + \tfrac{1}{2} k_1^2 g_1 + f_1 \; ,$$

$$G_6 = -2k_6 f_6 - 2k_1 f_1 + k_1 g_1 - k_6^2 g_6 + \tfrac{1}{2} k_1^2 g_1 - f_1 \; .$$

§. 120. Um nun, was das Ziel unserer Aufgabe ist, die Werthe der Coefficienten in den Ausdrücken (3) und (4) für r und l zu bestimmen und uns überhaupt zu vergewissern, dass die für r und l angenommenen Formen die richtigen sind, müssen wir die jetzt auf doppelte Weise ausgedrückten Werthe von T_1 und V_1 in Bezug auf die einzelnen Argumente α, λ_1, λ_5, λ_6 mit einander vergleichen.

Es giebt aber die Vergleichung der zwei Werthe von T_1 in (1*) und (5):

$$[1]\qquad -c = 2c + \tfrac{1}{2} \; ,$$

$$[2]\qquad F_0 = -2 + (6c + 2f_0 - \tfrac{1}{2})\, w \; ,$$

$$[3]\qquad F_1 = 2f_1 + \tfrac{3}{2} \; ,$$

$$[4]\qquad F_5 = 3f_1 + 2f_5 - \tfrac{15}{4} \; ,$$

$$[5]\qquad F_6 = 3f_1 + 2f_6 + \tfrac{9}{4} \; ;$$

und die Vergleichung der zwei Werthe von V_1 in (2*) und (6):

$$[6]\qquad G_0 = 0 \; , \qquad\qquad [8]\qquad G_5 = \tfrac{15}{4} \; ,$$

$$[7]\qquad G_1 = -\tfrac{3}{2} \; , \qquad\qquad [9]\qquad G_6 = -\tfrac{9}{4} \; .$$

Aus der ersten dieser neun Gleichungen folgt $c = -\frac{1}{6}$, wie schon früher gefunden worden. Von den acht übrigen Gleichungen, in denen man sich für $F_0, \ldots G_0, \ldots$ ihre Werthe aus §. 119 substituirt denken muss, geben [3] und [7] die schon in §. 105 entwickelten Coefficienten f_1 und g_1 der Variation. Die Gleichungen [2] und [6] werden im folgenden Kapitel näher betrachtet werden. Für jetzt wollen wir aus den noch übrigen vier Gleichungen die Coefficienten der Argumente λ_5 und λ_6 zu bestimmen suchen. Dieses

ist aber ganz leicht; denn es werden nach der eben gedachten Substitution, und wenn man die Zahlen

$$\left.\begin{aligned}
\frac{15}{4} - 5f_1 - k_1 g_1 &= p_5 \,, \\
-\frac{15}{4} + f_1 - 2k_1 f_1 - k_1 g_1 + \frac{1}{2}k_1^2 g_1 &= q_5 \,, \\
-\frac{9}{4} - 5f_1 - k_1 g_1 &= p_6 \,, \\
\frac{9}{4} - f_1 - 2k_1 f_1 + k_1 g_1 + \frac{1}{2}k_1^2 g_1 &= q_6
\end{aligned}\right\} \quad (M)$$

setzt, die Gleichungen erhalten:

$$p_5 = (3 + k_5^2) f_5 + 2k_5 g_5 \,, \qquad [4]$$

$$q_5 = 2k_5 f_5 + k_5^2 g_5 \,, \qquad [8]$$

$$p_6 = (3 + k_6^2) f_6 + 2k_6 g_6 \,, \qquad [5]$$

$$q_6 = 2k_6 f_6 + k_6^2 g_6 \,. \qquad [9]$$

Aus den zwei ersten derselben ergeben sich:

$$f_5 = -\frac{k_5 p_5 - 2q_5}{k_5(1 - k_5^2)} \,, \qquad g_5 = \frac{2k_5 p_5 - (3 + k_5^2) q_5}{k_5^2 (1 - k_5^2)} \,,$$

und aus den zwei letzten: (N)

$$f_6 = -\frac{k_6 p_6 - 2q_6}{k_6(1 - k_6^2)} \,, \qquad g_6 = \frac{2k_6 p_6 - (3 + k_6^2) q_6}{k_6^2 (1 - k_6^2)} \,.$$

§. 121. Um nach den jetzt erhaltenen Formeln die Werthe von f_5, g_5, f_6, g_6 numerisch zu bestimmen, haben wir die Zahlenwerthe von f_1, g_1, k_1, k_5, k_6 zu wissen nöthig. Von diesen sind die drei ersten schon in §. 106 berechnet worden, nämlich:

$$f_1 = -1{\cdot}2876 \,, \qquad g_1 = 1{\cdot}8297 \,, \qquad k_1 = 1{\cdot}8504$$

Da ferner $\lambda_5 = \lambda_1 - \alpha$, $\lambda_6 = \lambda_1 + \alpha$, und hier $k_0 = 1$ ist, so haben wir

$$k_5 = k_1 - 1 = 0{\cdot}8504 \,, \qquad k_6 = k_1 + 1 = 2{\cdot}8504 \,.$$

Hiermit finden sich nach (M) die Zahlen

$$p_5 = 6{\cdot}8023 \,, \qquad p_6 = p_5 - 6 = 0{\cdot}8023 \,,$$

$$q_5 = -0{\cdot}5257 \,, \qquad q_6 = 14{\cdot}8209 \,.$$

Mit diesen Werthen für k, p, q ergeben sich nach (N)

$$f_5 = -29{\cdot}039 \,, \qquad f_6 = -1{\cdot}3469 \,,$$

$$g_5 = 67{\cdot}568 \,, \qquad g_6 = 2{\cdot}7692 \,.$$

Nun ist die Excentricität der Mondsbahn

$$e = 0{\cdot}054844$$

und $w = 0{\cdot}0055952$, oder in Secunden (§. 106) gleich $1154''1$; folglich

$$f_5 ew = -0{\cdot}008911\ , \qquad f_6 ew = -0{\cdot}000413$$
$$g_5 ew = 1^0\ 11'\ 17'', \qquad g_6 ew = 2'\ 55''.$$

Mit Berücksichtigung der Excentricität der Mondsbahn erhalten wir demnach zu den bereits gefundenen folgende neue Störungsgleichungen

für die Länge: $+ 1^0\ 11'\ 17'' \sin\lambda_5 + 2'\ 55'' \sin\lambda_6$,

für den Radius Vector: $- 0{\cdot}008911 \cos\lambda_5 - 0{\cdot}000413 \cos\lambda_6$.

Endlich ist, um die Parallaxe zu bestimmen (§. 118):

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2\ .$$

Es ist aber, wenn wir in x und x^2 bloss die Glieder, deren Argumente λ_5 und λ_6 sind, berücksichtigen:

$$x = f_5 ew \cos\lambda_5 + f_6 ew \cos\lambda_6\ ,$$
$$x^2 = -f_4 ew \cos\lambda_5 - f_4 ew \cos\lambda_6\ .$$

Die hierher gehörigen Gleichungen der Parallaxe sind demnach:

$$-57'\ 1''\,.\,ew\,[(f_5 + f_4) \cos\lambda_5 + (f_6 + f_4) \cos\lambda_6]$$
$$= + 31''9 \cos\lambda_5 + 2''8 \cos\lambda_6\ ,$$

wo

$$\lambda_5 = 2(\lambda - \lambda') - \alpha \quad \text{und} \quad \lambda_6 = 2(\lambda - \lambda') + \alpha\ .$$

Bei Damoiseau sind die Coefficienten dieser Gleichungen

für die Länge: $+ 1^0\ 16'\ 28''2$, $+ 3'\ 12''2$,

für die Parallaxe: $+ 34''4$, $+ 3''1$.

§. 122. Die grösste unter den somit gefundenen Gleichungen, so wie unter allen Störungsgleichungen überhaupt, ist die Gleichung für die Länge, welche $2(\lambda - \lambda') - \alpha$, d. i. das Doppelte der mittleren Winkelentfernung des Mondes von der Sonne, vermindert um die mittlere Anomalie des Mondes, zum Argumente hat. Sie wird die Evection genannt und kann die Länge des Mondes bis auf $1^0\ 16'28''$ (nach Damoiseau) ändern.

Im Neu- und Vollmonde ist $2\lambda - \lambda' = 0$ und $= 360^0$, folglich $\sin\lambda_5 = -\sin\alpha$, und die Evection

$$= -1^0\ 16' \sin\alpha\ .$$

Letztere vermengt sich daher in den Syzygien mit der Mittelpunktsgleichung $= 6^0\ 17' \sin\alpha$, die dadurch auf $5^0\ 1' \sin\alpha$ herabgeht, also um den ganzen Werth der Evection kleiner wird. In den Quadraturen dagegen, wo $2(\lambda - \lambda') = 180^0$ und $= 360^0 + 180^0$, wird die Evection

$$= + 1^0\ 16' \sin\alpha\ ,$$

und die Mittelpunktsgleichung scheint dadurch in $7^0\ 33' \sin\alpha$ übergegangen, also um die ganze Evection vergrössert zu sein.

In den frühesten Zeiten bestimmten die Astronomen den Mondlauf nur aus Finsternissen, also aus Beobachtungen von Neu- und Vollmonden, und fanden hiernach die Mittelpunktsgleichung um den ganzen Betrag der Evection zu klein. Hipparch, Astronom der Alexandrinischen Schule im zweiten Jahrhunderte vor unserer Zeitrechnung, scheint der Erste gewesen zu sein, welcher den Mond auch in den Quadraturen beobachtete und dabei grosse Abweichungen von der bis dahin angenommenen Theorie fand. Ptolemäus, Astronom derselben Schule im zweiten Jahrhunderte nach Christus, bestimmte das Gesetz und die Grösse dieser Abweichungen und ward dadurch der Entdecker der Evection.

§. 123. So wie die Evection die grösste unter den Störungsgleichungen der Länge ist, so zeichnet sich auch die Gleichung des Radius Vector, welche mit der Evection dasselbe Argument hat, als die grösste unter den Gleichungen des Radius aus. Die Wirkung, welche diese beiden Gleichungen in Vereinigung hervorbringen, lässt sich, wie ich noch zeigen will, durch eine nach einem sehr einfachen Gesetz erfolgende Aenderung der Form und Lage der Mondsellipse vorstellig machen.

Weil $\alpha = \lambda - \omega$, so ist das Argument

$$2(\lambda - \lambda') - \alpha = \lambda - (2\lambda' - \omega)\ .$$

Nun hat $2\lambda' - \omega$, welches wir gleich ω_1 setzen wollen, im Vergleich mit λ eine nicht sehr beträchtliche Geschwindigkeit. Es ist ferner nach unserer Rechnung das Verhältniss

$$g_5 : f_5 = - 2{\cdot}33 : 1\ ,$$

also nicht sehr vom Verhältnisse $-2:1$ verschieden; um eben so viel nach Damoiseau, wo

$$f_5\, ew = - \frac{32''8}{57'\ 1''} = - \frac{1}{104{\cdot}3}$$

und

$$g_5 e w = 1^\circ\, 16'\, 28''2 \,.\, \sin 1'' = \frac{1}{45\cdot 0}\,,$$

also

$$g_5 : f_5 = -\,2\cdot 32 : 1$$

ist. Setzen wir daher

$$g_5 e w = 2 e_, \,, \quad \text{so ist nahe} \quad f_5 e w = -\, e_, \,,$$

und die zwei in Rede stehenden Gleichungen der Länge und des Radius werden

$$2 e_, \sin(\lambda - \omega_,) \quad \text{und} \quad -\, e_, \cos(\lambda - \omega_,)\,,$$

also von derselben Form, wie bei einer rein elliptischen Bewegung, wo die Excentricität $= e_,$ und die Länge des Perigäums $= \omega_,$ ist.

Abgesehen von allen übrigen Störungen, ist demnach

$$\frac{r}{a_,} = 1 - e \cos(\lambda - \omega) - e_, \cos(\lambda - \omega_,)\,,$$

$$l = \lambda + 2 e \sin(\lambda - \omega) + 2 e_, \sin(\lambda - \omega_,)\,;$$

d. h. zu der elliptischen Ungleichheit, welche e zur Excentricität und ω zur Länge des Perigäums hat, tritt wegen der Evection eine zweite hinzu, deren Elemente

$$e_, = \frac{1}{90} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{5} e\,, \qquad \text{und} \qquad \omega_, = 2\lambda' - \omega$$

sind.

Diese zwei elliptischen Ungleichheiten lassen sich aber leicht zu einer einzigen verbinden. Denn löst man die Cosinus und Sinus auf bekannte Weise auf und setzt alsdann

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} e \cos \omega + e_, \cos \omega_, &= E \cos \Omega\,, \\ e \sin \omega + e_, \sin \omega_, &= E \sin \Omega\,, \end{aligned}$$

so wird

$$\frac{r}{a_,} = 1 - E \cos(\lambda - \Omega) \qquad \text{und} \qquad l = \lambda + 2 E \sin(\lambda - \Omega)\,.$$

Die Evection, in Verbindung mit der ursprünglichen durch e und ω bestimmten elliptischen Bewegung des Mondes, erzeugt daher wiederum eine elliptische Bewegung, welche durch E und Ω bestimmt ist, nur dass letztere zwei Elemente sich ziemlich schnell und ungleichförmig ändern, während e constant ist, und ω, wie das folgende Kapitel lehren wird, langsam und der Zeit proportional zunimmt.

§. 124. Das durch die Formeln (α) ausgedrückte Gesetz der Aenderung von E und Ω lässt sich leicht graphisch veranschaulichen.

Sei in T (Fig. 39) die Erde, TX die in der Ebene der Bewegung gezogene feste Linie, von welcher an die Längen gerechnet werden, und c der Mittelpunkt der Ellipse, welche der Mond ohne den Einfluss der Evection um T beschreibt, so ist $XTc = 180^\circ + \omega$ und, wenn man $a_, = 1$ setzt, $Tc = e$. Sei ferner

$$TX^\frown cC = 180^\circ + \omega_, ,$$

und

$$cC = e_, ,$$

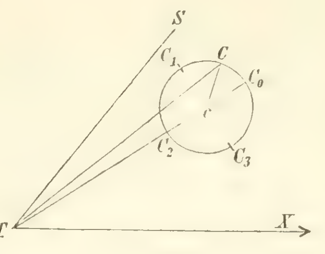


Fig. 39.

so ist, wenn man die Seiten des Dreiecks TcC das eine Mal auf TX, das andere Mal auf eine die TX rechtwinklig schneidende Linie projicirt:

$$TC \cos XTC = -e \cos \omega - e_, \cos \omega_, = -E \cos \Omega ,$$
$$TC \sin XTC = -e \sin \omega - e_, \sin \omega_, = -E \sin \Omega ,$$

folglich

$$TC = E \quad \text{und} \quad XTC = 180^\circ + \Omega ,$$

mithin C der Mittelpunkt der durch die Evection geänderten Ellipse.

Es ist aber

$$cC = e_, = \frac{1}{5} e = \frac{1}{5} Tc$$

und

$$Tc^\frown cC = TX^\frown cC - XTc = \omega_, - \omega = 2 (\lambda' - \omega) ,$$

wegen $\omega_, = 2\lambda' - \omega$; und wir schliessen daher:

Die Ellipse, welche der Mond um die in dem einen ihrer Brennpunkte befindliche Erde T beschreibt, erscheint durch die Wirkung der Evection ihrer Form und Lage nach dergestalt veränderlich, dass ihr Mittelpunkt C um den Mittelpunkt c der Ellipse, welche ohne den Einfluss der Evection statthaben würde, in einer Entfernung $cC = \frac{1}{5} Tc$ einen Kreis beschreibt, und dieses auf solche Weise, dass der Winkel, welchen cC mit Tc macht, stets doppelt so gross ist, als der Winkel $(\lambda' - \omega)$ des Radius Vector der Sonne mit Tc, und dass daher in Bezug auf Tc der Kreis während jedes Sonnenumlaufs zwei Mal von C beschrieben wird.

Um die vorzüglicheren Fälle, welche hiernach während eines Sonnenumlaufs eintreten können, näher zu betrachten, nenne man C_0 den Punkt, in welchem von der über c hinaus verlängerten Linie Tc der gedachte Kreis geschnitten wird, und theile letzteren von C_0 aus nach der Linken herum in den Punkten C_1, C_2, C_3 in vier

gleiche Theile. Heisse überdies S der Ort der Sonne, so ist allgemein

$$C_0 c C = 2 c T S \ .$$

Wenn daher

1) $cTS = 0$ oder $= 180^0$, wenn also S in der Apsidenlinie des Mondes Tc steht, und folglich die Zeiten der Erdnähe und Erdferne des Mondes mit den Zeiten der Syzygien zusammenfallen, so ist C in C_0. Die Excentricität TC hat dann folglich ihren grössten Werth

$$= TC_0 = \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{15} \, ,$$

und die Apsidenlinie hat ihre mittlere Lage Tc. Ist aber

2) $cTS = 90^0$ oder $= 270^0$, also TS auf Tc perpendikular, und fallen mithin die Zeiten der Erdnähe und der Erdferne in die Zeiten der Quadraturen, so ist C_2 der Ort von C, also die Excentricität am kleinsten, nämlich

$$= TC_2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{22 \cdot 5} \, ,$$

und die Apsidenlinie ist abermals in ihrer mittleren Lage.

3) Wenn cTS dem 1-, 3-, 5- oder 7-fachen von 45^0 gleich wird, also zu den Zeiten, wo die Erdnähe und Erdferne in die Mitte zwischen die Syzygien und Quadraturen fallen, so ist C abwechselnd in C_1 und C_3. Die Excentricität, gleich $TC_1 = TC_3$, hat alsdann, nahe wenigstens, ihren mittleren Werth $= \frac{1}{18}$, die Apsidenlinie aber ist von ihrer mittleren Lage Tc nach der einen oder anderen Seite am weitesten entfernt. — Von dem Winkel, bis zu welchem sie sich von Tc entfernen kann, ist der Sinus gleich $cC : Tc = \frac{1}{5}$, und daher der Winkel selbst $= 11\frac{1}{2}^0$.

Noch folgt aus der rechtläufigen Kreisbewegung von C, dass, wenn die Excentricität am grössten (kleinsten) ist, die Apsidenlinie am schnellsten vorwärts (rückwärts) geht, und dass, wenn die Apsidenlinie sich von ihrer mittleren Lage am weitesten vorwärts (rückwärts) entfernt hat, die Excentricität am schnellsten abnimmt (zunimmt).

Mit diesem periodischen Vor- und Rückwärtsgehen der Apsidenlinie ist noch das sogleich näher zu behandelnde gleichförmige Vorrücken derselben zu verbinden, welches in einem siderischen Monate $3^0\ 3'$ beträgt, und wodurch es geschieht, dass in Bezug auf Tc die Sonne ihren Umlauf erst in 411·78 Tagen vollendet, und folglich der Punkt C seinen Kreis in 205·89 Tagen, also in einem siderischen Monat einen Bogen von $47^0 77$ beschreibt. Von T aus gesehen, erscheint dieser Bogen, wenn C_0 seine Mitte ist, unter einem Winkel

von $7\frac{3}{4}^\circ$, und, wenn C_2 seine Mitte ist, unter einem Winkel von 11°. In Bezug auf Tc beträgt daher das Vorwärtsgehen der Linie TC, wenn es am schnellsten ist, in einem siderischen Monate $7\frac{3}{4}^\circ$, und das schnellste Rückwärtsgehen während desselben Zeitraums 11°. Da aber in dieser Zeit die Linie Tc um 3° unter den Sternen vorrückt, so beträgt in Bezug auf die Sterne die grösste rechtläufige Bewegung der Apsiden $10\frac{3}{4}^\circ$, und 103 Tage später die grösste rückläufige Bewegung 8° in einem siderischen Monate.

Sechstes Kapitel.

Von dem Vorwärtsgehen der Apsiden der Mondsbahn.

§. 125. Als wir im vorigen Kapitel, die Excentricität der Mondsbahn berücksichtigend, die elliptischen Werthe von r und l in die mit w multiplicirten Glieder von T_1 und V_1 substituirten, gab uns die Analyse das Vorhandensein von drei neuen Ungleichheiten, deren Argumente

$$\alpha, \qquad 2(\lambda - \lambda') - \alpha \qquad \text{und} \qquad 2(\lambda - \lambda') + \alpha$$

waren, zu erkennen. Von diesen Ungleichheiten haben wir bis jetzt bloss die den zwei letzteren Argumenten zugehörigen in Untersuchung genommen und ihre Coefficienten berechnet. Es bleibt uns daher noch übrig, die Coefficienten f_0 und g_0 der Glieder, welche α oder die mittlere Anomalie des Mondes selbst zum Argumente haben, zu bestimmen.

Die hierzu dienenden Gleichungen sind [2] und [6] in §. 120. Sie werden, nachdem man in ihnen für F_0 und G_0 ihre Werthe aus §. 119 substituirt und $c = -\frac{1}{6}$ gesetzt hat:

$$[2] \qquad -4k_0 + 3 + k_0^2 - \left(4f_0 + 2g_0 - \frac{13}{6}\right) w = 0\ ,$$

$$[6] \qquad 2k_0 - 2k_0^2 - \left(2f_0 + g_0 - \frac{1}{3}\right) w = 0\ .$$

Hieraus lassen sich aber f_0 und g_0 nicht einzeln, sondern nur das Aggregat $2f_0 + g_0$, welches h heisse, bestimmen. Dass dieses

so kommen musste, hätte man auch leicht vorhersehen können. Man setze zu dem Ende

$$e - f_0 e w = e_, \quad \text{und} \quad 2e + g_0 e w = 2e_{,,} \; ,$$

wodurch die Gleichungen (3) und (4) in §. 118:

$$\frac{r}{a} = 1 - e_, \cos \alpha + \ldots \quad \text{und} \quad l = \lambda + 2e_{,,} \sin \alpha + \ldots$$

werden. Den Gliedern $-e \cos \alpha$ und $2e \sin \alpha$ in den Formeln für r und l die Glieder $f_0 e w \cos \alpha$ und $g_0 e w \sin \alpha$ hinzufügen, ist daher eben so viel, als eine andere Excentricität $e_,$ zur Berechnung von r, eine andere $e_{,,}$ zur Berechnung von l anwenden. Durch die Theorie der Störungen kann aber nichts weiter, als der Unterschied zwischen diesen Excentricitäten, welcher

$$e_{,,} - e_, = (f_0 + \tfrac{1}{2} g_0) e w = \tfrac{1}{2} h e w$$

beträgt, ermittelt werden. Mit anderen Worten: in den Formeln für r und l ist der zu bestimmenden Constanten eine zu viel (e, f_0, g_0 statt $e_,$, $e_{,,}$) angenommen worden, und es kann folglich eine der Zahlen f_0 und g_0 nach Belieben bestimmt werden, z. B. $f_0 = 0$, wodurch die beiden Excentricitäten $= e$ und $= e + \frac{1}{2} g_0 e w$ werden, und wo daher $\frac{1}{2} g_0 e w$ ihr zu ermittelnder Unterschied ist.

Was ferner die in den Gleichungen [2] und [6] noch enthaltene Zahl k_0 anlangt, so erhellet augenblicklich, dass diese nicht, wie bei der elliptischen Bewegung, der Einheit gleich sein kann, indem sich damit die Gleichungen auf die einander widersprechenden

$$-(2h - \tfrac{13}{6}) w = 0 \quad \text{und} \quad (h - \tfrac{1}{3}) w = 0$$

reduciren würden. Mithin ist k_0 von 1 verschieden, und die zwei Gleichungen, aus denen wir anfangs f_0 und g_0 bestimmen zu können erwarteten, werden uns statt dessen zur Bestimmung des Aggregats $2f_0 + g_0 = h$ und der Differenz $k_0 - 1$ dienen.

In der That, setzt man letztere, weil sie nur von der Störung herrührt, gleich pw, also

$$k_0 = 1 + pw \; ,$$

so wird

$$-4k_0 + 3 + k_0^2 = -2pw \quad \text{und} \quad 2k_0 - 2k_0^2 = -2pw \; ,$$

und die Gleichungen [2] und [6] gehen damit über in

$$[2^*] \qquad -(2p + 2h - \tfrac{13}{6}) w = 0 \; ,$$

$$[6^*] \qquad -(2p + h - \tfrac{1}{3}) w = 0 \; ,$$

woraus $h = \frac{11}{6}$ und $p = -\frac{3}{4}$, also

$$e_{\prime\prime} = e_{\prime}\,(1 + \tfrac{11}{12} w) \quad \text{und} \quad k_0 = 1 - \tfrac{3}{4} w$$

folgt. Es ist aber $\omega = \lambda - \alpha$, und daher die Geschwindigkeit des Winkels ω, oder der Apsidenlinie, gleich der Geschwindigkeit von $\lambda - \alpha$, d. i.

$$= n - k_0 n = \tfrac{3}{4} n w \; .$$

Die Apsiden haben demnach eine gleichförmige und positive, d. i. vorwärtsgehende, Bewegung und ihre Umlaufszeit ist (§. 99)

$$= 360^0 : \tfrac{3}{4} n w = \tfrac{4}{3} \cdot \frac{360^0}{n} \cdot \frac{n^2}{n'^2} = \tfrac{4}{3} \cdot \frac{n}{n'} \cdot \frac{360^0}{n'}$$

$= \frac{4}{3} \cdot \frac{n}{n'}$ siderischen Jahren $= 17{\cdot}825$ siderischen Jahren,

weil $\frac{360^0}{n'}$ die siderische Umlaufszeit der Sonne und $\frac{n}{n'} = 13{\cdot}369$ ist (§. 100).

§. 126. Abgesehen von den Ungleichheiten, welche vom scheinbaren Stande des Mondes gegen die Sonne oder dem Winkel $\lambda - \lambda'$ abhängen, ist nach §. 125 und nach §. 118:

$$r = a\,(1 - \tfrac{1}{6} w - e_{\prime} \cos \alpha) \; ,$$

$$l = \lambda + 2 e_{\prime}\,(1 + \tfrac{11}{12} w) \sin \alpha \; ;$$

oder, wenn man

$$e_{\prime} = e_0\,(1 - \tfrac{1}{6} w) \; ,$$

und damit

$$e_{\prime}\,(1 + \tfrac{11}{12} w) = e_0\,(1 - \tfrac{1}{6} w)\,(1 + \tfrac{11}{12} w) = e_0\,(1 + \tfrac{3}{4} w)$$

setzt:

$$(a) \qquad r = a\,(1 - \tfrac{1}{6} w)\,(1 - e_0 \cos \alpha) \; ,$$

$$l = \lambda + 2 e_0\,(1 + \tfrac{3}{4} w) \sin \alpha \; ;$$

wozu noch, wegen der Excentricität der Sonnenbahn, die wir aber jetzt unberücksichtigt lassen, in r sowohl, als in l, ein Glied mit dem Argumente α' hinzutritt (§. 114). So wie jene Ungleichheiten in den vom Winkel $l - l'$ abhängigen Theilen der störenden Kraft ihren Ursprung haben, so sind die mit w multiplicirten Glieder, welche in den jetzt hingeschriebenen Ausdrücken für r und l vorkommen, aus dem von jenem Winkel freien Theile der Kraft, dem Gliede $\frac{r}{2a} \cdot \frac{a'^3}{r'^3} w$ in T_1 (§. 99), entstanden.

Der von der gegenseitigen Stellung der Sonne und des Mondes unabhängige Theil der störenden Kraft bewirkt demnach: erstens eine Verringerung, in dem Verhältnisse von 1 zu $1 - \frac{1}{6}w$, der mittleren Entfernung a des Mondes, welche aus seiner mittleren Bewegung n folgt; zweitens eine Verschiedenheit, gleich $\frac{3}{4}e_0 w$, der Excentricitäten, mit denen der Radius Vector und die Länge des Mondes zu berechnen sind, und drittens ein mit der Geschwindigkeit $\frac{3}{4}nw$ erfolgendes Vorrücken der Apsiden der Mondsbahn.

Es lassen sich aber die zwei letzteren Wirkungen auf eigenthümliche Art vereinigt darstellen. Weil nämlich $\lambda = \varepsilon + nt$ (§. 45) und $k_0 = 1 - \frac{3}{4}w$ ist, so wird

$$(b) \qquad l = \varepsilon + \frac{1}{k_0}[k_0 nt + 2e_0 \sin \alpha] \,.$$

Nun ist $k_0 n$ die Geschwindigkeit von α (§. 119), und es wird folglich durch die Gleichung (a) und durch

$$(c) \qquad l_0 = \varepsilon + k_0 nt + 2e_0 \sin \alpha$$

eine rein elliptische Bewegung dargestellt. Ersichtlich stehen aber die Geschwindigkeiten, mit denen sich l und l_0 ändern, in dem constanten Verhältnisse von $1 : k_0$. Die Verschiedenheit der Geschwindigkeiten von λ und α, oder die gleichförmige Drehung der Apsidenlinie, und die Verschiedenheit der Excentricitäten für r und l in der rein elliptischen Bewegung, können wir uns daher mit einem Male dadurch erzeugt denken, dass bei der durch (a) und (c) ausgedrückten elliptischen Bewegung die Winkelgeschwindigkeit des Radius Vector in dem Verhältnisse von

$$k_0 : 1 = 1 : 1 + \frac{3}{4}w$$

vergrössert wird, und folglich in $l_0' + \frac{3}{4}wl_0'$ übergeht, wo l_0' die Winkelgeschwindigkeit bei der elliptischen Bewegung bezeichnet.

Wir können uns daher auch vorstellen, dass während der Mond nach den Formeln (a) und (c) elliptisch um die Erde läuft, die Ellipse selbst mit einer der Geschwindigkeit l_0' des Radius stets proportionalen Geschwindigkeit $\frac{3}{4}wl_0'$ nach derselben Richtung um die Erde gedreht wird.

§. 127. Zusätze. a) Betrachten wir überhaupt zwei Körper A_0 und A, welche sich in einer Ebene um einen festen Punkt O derselben dergestalt bewegen, dass ihre Radien OA_0 und OA stets einander gleich sind und sich mit constanten Flächengeschwindigkeiten

$\frac{1}{2}c_0$ und $\frac{1}{2}c$ um O drehen. Sei r der gemeinschaftliche Werth der Radien, und l'_0 und l' ihre Winkelgeschwindigkeiten, so ist (§. 35)

$$(\alpha) \qquad c_0 = rrl'_0 \quad \text{und} \quad c = rrl' ;$$

mithin stehen auch die Winkelgeschwindigkeiten in dem constanten Verhältnisse der Flächengeschwindigkeiten, welches $= k_0 : 1$ gesetzt werde, und man kann sich die Bewegung des einen Körpers A aus der des anderen A_0 dadurch entstehend denken, dass die Bahn, in welcher A_0 fortgeht, mit einer Winkelgeschwindigkeit um O gedreht wird, welche sich zu der von A_0 wie $1 - k_0$ zu k_0 verhält.

Heissen noch T_0 und T die Kräfte, durch welche die Bewegungen von A_0 und A erzeugt werden; sie sind nach O gerichtet (§. 37), und es ist (§. 36)

$$T_0 = r'' - rl_0'^2 = r'' - \frac{c_0^2}{r^3} ,$$

wegen (α), und eben so $T = r'' - \frac{c^2}{r^3}$, folglich

$$(A) \qquad T - T_0 = -\frac{c^2 - c_0^2}{r^3} .$$

»*Bewegt sich demnach ein Körper A_0 in einer Ebene um einen festen Punkt O derselben mit constanter Flächengeschwindigkeit, und wird aus dieser Bewegung eine zweite hergeleitet, indem man, während A_0 in seiner Bahn fortgeht, die Bahn selbst mit einer Winkelgeschwindigkeit, welche der von A_0 proportional ist, um O sich drehen lässt, so ist von den zwei Kräften, durch welche diese zwei Bewegungen von A_0 hervorgebracht werden, und welche beide nach O gerichtet sind, der Unterschied dem Würfel des Radius OA_0 umgekehrt proportional.*« — *Princ. philos. nat.*, lib. I. propos. 44.

b) Man sieht leicht, dass sich mit Hülfe der Relation (A) die Bewegung der Mondsapsiden gleichfalls ermitteln lassen muss. Es ist nämlich bei der wirklichen Mondsbahn, also bei der sich drehenden Ellipse des §. 126, die doppelte Flächengeschwindigkeit

$$c = na_{,}^2 \ ;^{*})$$

dagegen ist bei der ruhenden Ellipse

$$c_0 = k_0 c = k_0 na_{,}^2 ,$$

und die zur Bewegung in dieser Ellipse nöthige Kraft (§. 55)

$$T_0 = -\frac{k_0^2 n^2 a_{,}^3}{r^2} .$$

*) Eigentlich $c = na_{,}^2 \sqrt{\frac{p}{a_{,}}}$ (§. 52). Der Factor $\sqrt{\frac{p}{a_{,}}}$ kann aber hier weggelassen werden, weil er von der Einheit nur um $\frac{1}{2}e^2$ unterschieden ist (§ 49).

Hieraus folgt nach (A) die Kraft bei der sich drehenden Ellipse, also die den Mond treibende Kraft,

$$T = -\frac{k_0^2 n^2 a_i^3}{r^2} + (k_0^2 - 1)\frac{n^2 a_i^4}{r^3},$$

oder wenn, wie in §. 125, $k_0 = 1 + pw$ gesetzt wird:

$$T = -(1 + 2pw)\frac{n^2 a_i^3}{r^2} + 2pw\frac{n^2 a_i^4}{r^3}.$$

Dieselbe Kraft ist aber nach §. 99:

$$T = -\frac{K(M+m)}{r^2} + \frac{Km'r}{2a'^3},$$

oder weil $\frac{m'}{M+m} = \frac{a'^3}{a_i^3}w$ ist (ebendas.):

$$T = -K(M+m)\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{2a_i^3}w\right).$$

Dies giebt die Gleichung:

$$(a) \qquad n^2 a_i^3 \left[1 + 2pw\left(1 - \frac{a_i}{r}\right)\right] = K(M+m)\left(1 - \frac{r^3}{2a_i^3}w\right),$$

welche unabhängig von einem bestimmten Werthe von r bestehen muss. Für $r = a_i$ wird sie:

$$(b) \qquad n^2 a_i^3 = K(M+m)(1 - \tfrac{1}{2}w),$$

was mit dem schon in §. 102 Bemerkten übereinstimmt.

Man dividire nun (a) durch (b), so findet sich

$$1 + 2pw\left(1 - \frac{a_i}{r}\right) = 1 + \frac{1}{2}w\left(1 - \frac{r^3}{a_i^3}\right)$$

und hieraus

$$p = -\frac{r}{4a_i^3}\cdot\frac{r^3 - a_i^3}{r - a_i} = -\frac{r^3 + a_i r^2 + a_i^2 r}{4a_i^3},$$

oder, weil die Bewegung nahe kreisförmig, und daher nahe $r = a_i$ ist: $p = -\frac{3}{4}$, woraus das Uebrige, wie in §. 125, fliesst.

Es ist dieses eine ungefähre Angabe des höchst sinnreichen Verfahrens, durch welches Newton die Bewegung der Apsiden zu bestimmen gesucht hat. *Princ. philos. nat.*, lib. I, sect. IX.

§. 128. Die vorwärtsgehende Bewegung der Mondsapsiden ist eine schon seit den ältesten Zeiten beobachtete Thatsache. Allein merkwürdiger Weise beträgt die aus den Beobachtungen folgende Umlaufszeit der Apsiden nur 8·850 siderische Jahre, ist also nahe nur halb so gross, als diejenige, welche sich uns im Vorigen ergab, und

welche auch Newton und späterhin die zu ihrer Zeit ausgezeichnetsten Geometer Clairaut, Euler und d'Alembert fanden, als sie diesen Gegenstand theoretisch zu untersuchen anfingen. Clairaut, der erste, welcher (im Jahre 1743) die Mondsstörungen mit Hülfe der Analysis zu entwickeln unternahm, wurde durch diesen so auffallenden Unterschied zwischen der Theorie und den Beobachtungen zu der Vermuthung geleitet, dass das Gesetz der Anziehung nicht so einfach sei, als man es seit Newton angenommen habe, und dass in seinem Ausdrucke dem Gliede, welches dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist, ein zweites hinzugefügt werden müsse, welches, nur für die Bewegung der Apsiden von beträchtlicher Wirkung, auf die übrigen Ungleichheiten des Mondes und auf die Bewegungen der Planeten keinen merkbaren Einfluss habe. Als er aber, um dieses Glied näher zu bestimmen, alle Rechnungen mit noch grösserer Schärfe, als früher, von Neuem unternahm, machte er die wichtige Entdeckung, dass, wenn nur die Entwickelung weit genug fortgesetzt wird, und Grössen nicht vernachlässigt werden, die man wegen ihrer Kleinheit anfangs fast für einflusslos zu halten geneigt ist, die Apsidenbewegung des Mondes sich eben so gross als in der Natur findet.

Von dieser schärferen Rechnung werden die folgenden Paragraphen einen ungefähren Begriff zu geben suchen.

§. 129. Die durch die bisherige Rechnung gefundenen Werthe der Coordinaten r und l sind bis auf die erste Potenz des Störungscoefficienten w, und damit bis zu den Störungsgliedern der dritten Ordnung (§. 100), richtig. Um diese Werthe zu erhalten, fingen wir damit an, in den mit w multiplicirten Gliedern von T_1 und V_1, oder in P und Q, wenn

$$T_1 = -\frac{a^2}{r^2} + wP \quad \text{und} \quad V_1 = wQ$$

gesetzt wird, für r, l, r', l', wovon P und Q Functionen sind, die bis zur ersten Ordnung richtigen Werthe dieser Coordinaten, also ihre bis zur ersten Potenz der Excentricitäten e und e' richtigen Werthe zu substituiren. Denn somit erhielten T_1 und V_1 selbst eine bis zu ew und $e'w$, also bis zur dritten Potenz gehende Genauigkeit.

So wie nun auf solche Weise aus den bloss bis zur ersten Ordnung richtigen Werthen von r und l ihre bis zur dritten Ordnung richtigen Werthe gefunden wurden, so wird man durch Wiederholung desselben Verfahrens mit letzteren Werthen von r und l, und mit den bis zur dritten Ordnung genauen Werthen von r' und l',

indem man nämlich dieselben in P und Q substituirt, eine bis zur fünften Ordnung gehende Genauigkeit erreichen.

Ehe man aber diese Substitution unternimmt, müssen P und Q selbst genauer, als in §. 99 geschehen, nämlich bis zur dritten Ordnung genau, entwickelt werden. Zu den dort erhaltenen Werthen von P und Q muss deshalb erstens ein aus der weiteren Entwickelung von ϱ entstehendes, mit $\frac{a}{a'} = \frac{1}{399}$ multiplicirtes Glied, und zweitens, wegen des Factors $\cos b'$ in T, V und ϱ (§. 96), ein mit $\iota^2 = \frac{1}{121}$ multiplicirtes Glied hinzukommen: denn $\frac{a}{a'}$ und ι^2 sind als Grössen der zweiten Ordnung zu betrachten. Endlich müssen bei der Substitution von r, l, r', l' in P und Q, von den elliptischen Theilen dieser Coordinaten, d. i. von den nach den Potenzen der Excentricitäten geordneten Reihen, welche r, l, etc. durch die mittleren Anomalieen ausdrücken (§. 51), noch die Glieder der zweiten und dritten Ordnung berücksichtigt werden.

Schon diese Substitutionen und Entwickelungen machen, wie man sieht, eine etwas lange Rechnung nothwendig. Allein noch viel weitläufiger und verwickelter ist die Rechnung, welche erfordert wird, um aus den somit bis zur fünften Ordnung genau bestimmten Werthen von wP und wQ die bis zu derselben Ordnung, also bis zur zweiten Potenz von w, genauen Werthe von r und l selbst herzuleiten. Gleichwohl kann eine so weit und wohl noch weiter fortgesetzte Rechnung nicht abgewiesen werden, wenn das endliche Ziel derselben, eine mit den Beobachtungen gleichen Schritt haltende Genauigkeit, erreicht werden soll.

Eine besondere Schwierigkeit erwächst diesen Rechnungen noch durch den Umstand, dass zwar im Allgemeinen der Coefficient eines Störungsgliedes desto kleiner ist, je höher die Ordnung ist, zu welcher er seinem analytischen Ausdrucke nach gehört, dass aber diese Regel nicht selten Ausnahmen erleidet, und man daher bei der Beurtheilung der wegen ihrer hohen Ordnung wegzulassenden Glieder mit grösster Vorsicht zu Werke gehen muss.

Ein Beispiel von einer solchen Ausnahme giebt uns schon die im Vorigen entwickelte Evection. Denn der Coefficient derselben, den wir $= 1^\circ 11' 17''$ fanden, gehört wegen seines Factors ew zur dritten Ordnung, ist aber nahe doppelt so gross, als der in §. 106 erhaltene Coefficient der Variation $= 35' 12''$, obschon letzterer, weil er bloss w zum Factor hat, von der zweiten Ordnung ist.

§. 130. Die Evection, die grösste unter allen Störungsgleichungen, ist es nun auch, durch welche die Geschwindigkeit der Apsidenbewegung so beträchtlich vermehrt wird. In der That sind die Coefficienten der Evection ihrem Zahlenwerthe nach nahe von derselben Ordnung wie e. Denn setzen wir diese Coefficienten

$$f_5 e w = F e \quad \text{und} \quad g_5 e w = G e \ ,$$

so werden

$$F = f_5 w = -\frac{29 \cdot 039}{178 \cdot 72} = -0 \cdot 16248 = -\frac{1}{6 \cdot 15} \text{ sehr nahe} \ ,$$

$$G = g_5 w = +\frac{67 \cdot 568}{178 \cdot 72} = +0 \cdot 37806 = +\frac{1}{2 \cdot 64} \text{ sehr nahe} \ ,$$

und hiernach etwa erst FF, GG und FG von gleicher Ordnung mit $e = \frac{1}{18}$. Es lässt sich daher erwarten, dass wir uns schon dadurch der wahren Mondsbewegung um ein Bedeutendes nähern und insbesondere die Apsidenbewegung um Vieles richtiger erhalten werden, wenn wir bei einer zweiten Näherungsrechnung, als wodurch die Glieder von der Ordnung w^2 gefunden werden sollen, die in P und Q zu substituirenden elliptischen Werthe von r und l durch keine anderen von w abhängigen Glieder, als durch die Evection allein, gleichsam als durch eine zweite Mittelpunktsgleichung, verbessern und dann die Rechnung eben so fortführen, als wollten wir nur die Glieder der Ordnung w ermitteln.

Wir setzen demnach

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos \alpha + F e \cos(\lambda_1 - \alpha) \ ,$$

$$l = \lambda + 2 e \sin \alpha + G e \sin(\lambda_1 - \alpha) \ .$$

Hieraus folgt

$$2(l - \lambda') = \lambda_1 + 4 e \sin \alpha + 2 G e \sin(\lambda_1 - \alpha) \ ,$$

$$\cos 2(l - \lambda') = \cos \lambda_1 - 2 e \cos(\lambda_1 - \alpha) + 2 e \cos(\lambda_1 + \alpha)$$
$$- G e \cos \alpha + G e \cos(2 \lambda_1 - \alpha) \ ;$$

und daher, wenn wir von jetzt an bloss diejenigen Glieder beachten, deren Argument α ist:

$$\frac{r}{a} \cos 2(l - \lambda') = -(G - \tfrac{1}{2} F) e \cos \alpha \ ,$$

und eben so

$$\frac{r}{a} \sin 2(l - \lambda') = -(G - \tfrac{1}{2} F) e \sin \alpha \ ,$$

folglich (§. 99)

$$T_1 = -\frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{2}w - \frac{1}{2}ew\cos\alpha - \frac{3}{2}(G - \frac{1}{2}F)\,ew\cos\alpha\ ,$$

$$V_1 = \frac{3}{2}(G - \frac{1}{2}F)\,ew\sin\alpha\ .$$

Wir sehen hieraus, dass wir auf der rechten Seite der Gleichungen [2] und [6] in §. 120, welche aus der Vergleichung der auf doppelte Weise ausgedrückten Werthe von T_1 und V_1 in Bezug auf das Argument α entsprangen, resp.

$$-\frac{3}{2}(G - \frac{1}{2}F)w \quad \text{und} \quad +\frac{3}{2}(G - \frac{1}{2}F)w$$

hinzufügen müssen. Dieselben Zusätze sind daher auch bei den Gleichungen [2*] und [6*] in §. 125 zu machen. Letztere verwandeln sich dadurch in

$$[2^{**}] \quad -(2p + 2h - \frac{13}{6})w = -\frac{3}{2}(G - \frac{1}{2}F)w\ ,$$

$$[6^{**}] \quad -(2p + h - \frac{1}{3})w = \frac{3}{2}(G - \frac{1}{2}F)w\ ,$$

woraus nach Elimination von h

$$p = -\frac{3}{4} - \frac{9}{4}(G - \frac{1}{2}F) = -1{\cdot}7834$$

folgt. Dies giebt (§. 125) eine Umlaufszeit der Apsiden von

$$\frac{13{\cdot}369}{1{\cdot}7834} = 7{\cdot}496 \text{ siderischen Jahren,}$$

welche von der wahren Umlaufszeit, = 8·850 Jahren (§. 128), noch nicht um den sechsten Theil der letzteren verschieden ist.

§. 131. Aus der so eben geführten Rechnung geht wenigstens der mächtige Einfluss hervor, den die Evection auf die Vergrösserung der Apsidenbewegung ausüben kann. Denn die Genauigkeit, mit welcher wir diese Bewegung jetzt gefunden haben, ist fast eine bloss zufällige zu nennen, da wir nur den auf P und Q statthabenden Einfluss der Evection in Rechnung genommen, dagegen die in §§. 119 und 118 gemachten Entwickelungen von $r'' - rl'^2$, $2r'l' + rl''$ und die des Gliedes $-a^2 . r^2$ von T_1 unverändert beibehalten haben, obschon auch in diesen Entwickelungen, bei Berücksichtigung der jetzt als eine Ungleichheit der ersten Ordnung anzusehenden Evection, neue Glieder mit dem Argumente α sich bilden müssen. Wie man bald sieht, können diese neuen Glieder nicht anders, als durch Multiplication der Evection mit der Variation, entstehen. Um daher die in den gedachten Entwickelungen wegen der Evection noch hinzukommenden Glieder zu finden und damit die Apsidenbewegung noch genauer zu bestimmen, wird es hinreichen,

$$\frac{r}{a} = 1 + f_1 w \cos\lambda_1 + Fe\cos(\lambda_1 - \alpha) = 1 + x\,,$$
$$l = \lambda + g_1 w \sin\lambda_1 + Ge\sin(\lambda_1 - \alpha)$$

zu setzen. Hieraus folgt zuerst

$$x^2 = \ldots + 2Ff_1 ew\cos(\lambda_1 - \alpha)\cos\lambda_1 = \ldots + Ff_1 ew\cos\alpha\,,$$

und daher

$$\frac{a^2}{r^2} = 1 - 2x + 3x^2 = \ldots + 3Ff_1 ew\cos\alpha\,.$$

Ferner wird:

$$\frac{r'}{na} = -k_1 f_1 w\sin\lambda_1 - k_5 Fe\sin(\lambda_1 - \alpha)\,,$$
$$\frac{l'}{n} = 1 + k_1 g_1 w\cos\lambda_1 + k_5 Ge\cos(\lambda_1 - \alpha)\,,$$
$$\frac{l''}{nn} = -k_1^2 g_1 w\sin\lambda_1 - k_5^2 Ge\sin(\lambda_1 - \alpha)\,,$$
$$\frac{l'^2}{nn} = 1 + 2k_1 g_1 w\cos\lambda_1 + 2k_5 Ge\cos(\lambda_1 - \alpha) - k_1 k_5 Gg_1 ew\cos\alpha\,,$$
$$\frac{rl'^2}{nna} = \ldots + (k_1 Fg_1 + k_5 Gf_1 + k_1 k_5 Gg_1) ew\cos\alpha\,,$$
$$\frac{r'l'}{nna} = \ldots + \tfrac{1}{2}k_1 k_5 (Fg_1 - Gf_1) ew\sin\alpha\,,$$
$$\frac{rl''}{nna} = \ldots - \tfrac{1}{2}(k_1^2 Fg_1 - k_5^2 Gf_1) ew\sin\alpha\,.$$

Hiermit, und weil r'' kein Glied mit dem Argumente α enthält, findet sich

$$T_1 = \frac{r'' - rl'^2}{nna} = \ldots - Aew\cos\alpha\,,$$
$$V_1 = \frac{2r'l' + rl''}{nna} = \ldots - Bew\sin\alpha\,,$$

wo

$$A = k_1 Fg_1 + k_5 Gf_1 + k_1 k_5 Gg_1$$

und

$$B = (\tfrac{1}{2}k_1 - k_5)k_1 Fg_1 + (k_1 - \tfrac{1}{2}k_5)k_5 Gf_1$$
$$= \tfrac{1}{2}(1 - k_5)k_1 Fg_1 + \tfrac{1}{2}(1 + k_1)k_5 Gf_1\,,$$

wegen $k_1 - k_5 = 1$ (§. 121). Man hat demnach zu den Gleichungen [2] und [6] in §. 120, also auch zu [2*] und [6*] in §. 125, mithin auch zu den schon durch die Evection, wiewohl nur unvollständig, verbesserten Gleichungen [2**] und [6**] in §. 130, linker Hand

resp. $-Aw$ und $-Bv$, rechter Hand resp. $-3Ff_1 v$ (wegen $T_1 = -a^2 r^{-2} + \ldots$) und o hinzuzufügen. Letztere Gleichungen gehen dadurch über in

$$-2p - 2h + \frac{13}{6} - A = -\frac{3}{2}\left(G - \frac{1}{2}F\right) - 3Ff_1 \,,$$

$$-2p - h + \frac{1}{3} - B = \frac{3}{2}\left(G - \frac{1}{2}F\right) \,,$$

und wenn man hieraus h eliminirt, so ergiebt sich

$$p = -\frac{3}{4} - \frac{9}{4}\left(G - \frac{1}{4}F\right) + \frac{1}{2}A - B - \frac{3}{2}Ff_1 \,;$$

d. h. zu dem in §. 130 berechneten Werthe von p muss noch die Correction

$$\frac{1}{2}A - B - \frac{3}{2}Ff_1 = \frac{1}{2}k_1 k_5 [G(g_1 - f_1) + Fg_1] - \frac{3}{2}Ff_1$$

addirt werden. Mit den in §§. 106, 121 und 130 erhaltenen Werthen von

$$k_1 = 1{\cdot}8504 \,, \qquad k_5 = 0{\cdot}8504 \,,$$

$$f_1 = -1{\cdot}2876 \,, \qquad F = -0{\cdot}1625 \,,$$

$$g_1 = 1{\cdot}8297 \,, \qquad G = 0{\cdot}3781 \,,$$

findet sich aber diese Correction $= 0{\cdot}3795$, und damit

$$p = -1{\cdot}7834 + 0{\cdot}3795 = -1{\cdot}4039 \,,$$

woraus die Umlaufszeit der Apsiden $= 9{\cdot}522$ Jahren folgt, welche die wahre von $8{\cdot}850$ Jahren nur um den dreizehnten Theil der letzteren übertrifft*).

Siebentes Kapitel.

Von der Säculargleichung des Mondes.

§. 132. Zum Schlusse Dessen, was über die Ungleichheiten des Radius Vector und der Länge des Mondes hier füglich mitgetheilt werden konnte, mag noch in Kurzem die Theorie einer dahin ge-

*) Hansen setzt die jährliche Bewegung der Apsidenlinie (für 1800) $= 146435{\cdot}6016$ Secunden, mit einer Umlaufszeit von $3232{\cdot}574$ Tagen. A. d. H.

hörigen Ungleichheit gegeben werden, die zwar an sich eine der am wenigsten bemerkbaren ist, die aber dadurch, dass sie, so lange Beobachtungen existiren, immer nach einerlei Seite hin gewirkt hat, und dass die Geometer lange Zeit sich vergeblich bemüht haben, sie aus dem Gesetze der allgemeinen Schwere zu erklären, ein grosses Interesse gewonnen hat. Bei Vergleichung von Beobachtungen, die um mehrere Jahrhunderte von einander entfernt liegen, hat man nämlich gefunden, dass der Mond in jedem folgenden Jahrhunderte einen Bogen von etwa 21 Secunden mehr beschreibt, als in dem vorhergehenden. Der englische Astronom Halley (geb. 1656, gest. 1742) war der Erste, welcher auf diese Beschleunigung der Mondsbewegung aufmerksam machte (im Jahre 1693). Allein erst den Bemühungen eines Laplace (geb. 1749, gest. 1827) gelang es (im Jahre 1787), auch diese Erscheinung auf das Gesetz der Schwere zurückzuführen und ihren Grund in der durch die Einwirkung der Planeten sich allmählich ändernden Excentricität der Erdbahn nachzuweisen.

In der That ist, sobald man noch die zweite Potenz dieser Excentricität mit berücksichtigt, der Radius Vector der Sonne (§. 51)

$$r' = a'(1 - e'\cos\alpha' + e'^2 \sin\alpha'^2) = a'(1+x) ,$$

folglich

$$\frac{a'^3}{r'^3} = (1+x)^{-3} = 1 - 3x + 6x^2$$
$$= 1 + 3e'\cos\alpha' - 3e'^2\sin\alpha'^2 + 6e'^2\cos\alpha'^2$$
$$= 1 + 3e'\cos\alpha' + \frac{3}{2}e'^2(1 + 3\cos 2\alpha') .$$

Hiermit wird, wenn man in

$$T_1 = -\frac{a^2}{r^2} + wP \quad \text{und} \quad V_1 = wQ$$

bloss die nicht periodischen Glieder von P und Q in Betracht zieht (§. 99):

$$P = \frac{r}{2a}\cdot\frac{a'^3}{r'^3} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{2}e'^2\right) \quad \text{und} \quad Q = 0 .$$

Wegen der Excentricität der Erdbahn wird demnach der mittlere Werth der störenden Kraft, welche den Mond von der Erde zu entfernen sucht, um $\frac{3}{4}e'^2w$ vergrössert; der mittlere Werth der auf dem Radius Vector in der Bahnebene perpendikular wirkenden Kraft bleibt aber, wie vorher, Null. Wenn folglich diese Excentricität nicht constant ist, sondern, wie es bisher geschehen, sich allmählich vermindert, so wird auch die störende Kraft, als welche im Mittel den Mond von der Erde abzuziehen strebt, immer kleiner werden, mithin auch die

Entfernung des Mondes von der Erde sich allmählich verringern, seine Winkelgeschwindigkeit aber zunehmen (vergl. §. 116).

§. 133. Der Werth von e' zu Anfange des Jahres 1800 war

$$= 0{\cdot}01679226 = C \;,$$

und die Abnahme von e' in je hundert Jahren ist

$$= 0{\cdot}00004299 = N \;;$$

also, wenn der Anfang von 1800 zur Epoche genommen wird, und t die Zahl der seitdem verflossenen Jahrhunderte bedeutet:

$$e' = C - Nt \;.$$

Mit Vernachlässigung des Quadrats und der höheren Potenzen von N können wir alsdann

$$e'^2 = C^2 - 2\,CNt = C^2 - 2\,C \sin Nt$$
$$= C^2 + 2\,C \cos (90^0 + Nt)$$

setzen, wodurch (§. 132)

$$T_1 = -\frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{2} w \left(1 + \frac{3}{2} C^2\right) + \frac{3}{2} Cw \cos (90^0 + Nt) , \qquad V_1 = 0$$

wird.

Aus der somit dem Ausdrucke für T_1 gegebenen Form lässt sich nun die gesuchte Bewegung ganz auf dieselbe Weise folgern, als wie in §. 113 aus dem Gliede $\frac{3}{2} e'w \cos \alpha'$ in T_1 — der Coefficient von $\sin \alpha'$ in V_1 war Null — die Glieder mit dem Argumente α in r und l hergeleitet wurden. Es wird nämlich

$$r = a_1 [1 + fw \cos (90^0 + Nt)] \;,$$
$$l = \lambda + gw \sin (90^0 + Nt) \;,$$

wo

$$f = \frac{3}{2} C \frac{1}{1 - K^2} , \quad g = -3\,C \frac{1}{K(1 - K^2)} , \quad K = \frac{N}{n}$$

ist.

Mit Weglassung der zweiten und höheren Potenzen von N, und folglich auch von K, wird aber

$$f \cos (90^0 + Nt) = -f \sin Nt = -\frac{3}{2} CNt \;,$$

$$g \sin (90^0 + Nt) = g \cos Nt = -\frac{3\,Cn}{N} \left(1 + \frac{N^2}{n^2} - \frac{1}{2} N^2 t^2\right) ,$$

und damit

$$r = a_1 \left[1 - \frac{3}{2} CNwt\right] ,$$

$$l = \lambda - \frac{3\,Cn}{N} w - \frac{3\,CN}{n} w + \frac{3}{2} CNnw \,.\, t^2 \;.$$

Infolge der ersteren dieser Gleichungen nimmt r in jeder Zeiteinheit um $\frac{3}{2}CNw \,.\, a,$ ab. Infolge der letzteren ist die Geschwindigkeit, mit welcher sich l ändert (§. 10),

$$= n + 3\,CNnw \,.\, t \ ,$$

und nimmt folglich in jeder Zeiteinheit um $3CNnw$ zu. Die Abnahme von r ist für die Beobachtungen nicht merklich, wohl aber die Zunahme der Geschwindigkeit von l. Weil die Zeiteinheit im Gegenwärtigen ein Jahrhundert ist, und daher n die mittlere Bewegung des Mondes in 100 julianischen Jahren oder 36525 Tagen bedeutet, so ist (§. 66)

$$n = \frac{360 \times 60 \times 60}{27 \cdot 3217} \times 36525 \text{ Secunden.}$$

Mit diesem Werthe von n und mit den oben bemerkten Werthen von C und N findet sich das hundertjährige Wachsthum der Mondsbewegung

$$3CNnw = 21''00 \ .$$

Zusatz. Zu demselben Resultate kann man auch schon durch den Satz gelangen, dass, wenn die den Mond nach der Erde treibende Kraft in dem Verhältnisse von $1 : 1 \mp \frac{1}{2} w$ ab- oder zunimmt, die mittlere Entfernung und die mittlere Bewegung in den Verhältnissen von $1 : 1 \pm \frac{1}{2} w$ und $1 : 1 \mp w$ sich ändern (§. 102, b). Denn da in jedem Jahrhunderte e'^2 um $2\,CN$ kleiner, folglich

$$-T_1 = \frac{a^2}{r^2} - \frac{1}{2} w \left(1 + \frac{3}{2} e'^2\right) ,$$

um $\frac{3}{2}\,CNw$ grösser, und mithin jene Kraft in dem Verhältnisse von $1 : 1 + \frac{3}{2}\,CNw$ grösser wird, so muss in jedem Jahrhunderte $a,$ um $\frac{3}{2} a, CNw$ abnehmen und n um $3\,n\,CNw$ wachsen.

§. 134. Das stets positive Glied

$$\frac{3}{2}\,CNnwt^2 = 10''50 \,.\, t^2 \ ,$$

womit nach §. 133 die mittlere Länge des Mondes verbessert werden muss, wird die Säculargleichung des Mondes genannt. Sie ist am Ende des ersten, zweiten, dritten, etc. Jahrhunderts nach der Epoche und am Anfange des ebensovielten vor derselben gleich 10''5, 42''0, 1' 34''5, etc. Setzt man sie $= 1^0$, so wird $t = \sqrt{\frac{3600}{10 \cdot 50}} = 18 \cdot 5$, d. h. zu der mittleren Länge des Mondes, welche mit den zur Zeit der Epoche stattfindenden Elementen für einen Zeitpunkt berechnet

worden ist, der $18\frac{1}{2}$ Jahrhunderte vor oder nach der Epoche liegt, muss ein ganzer Grad addirt werden.

Um sich die Wirkung dieser Gleichung zu noch klarerer Anschauung zu bringen, denke man sich den mittleren Weg des Mondes während mehrerer Jahrhunderte in eine gerade Linie ausgedehnt. Zur Zeit der Epoche sei der Mond in A (Fig. 40). Seien ferner A_1, A_2, $A_3, \ldots$ und ${}_1A$, ${}_2A$, ${}_3A, \ldots$ seine Oerter, erstere 1, 2, 3, ... Jahrhunderte nach der Epoche, letztere eben so lange vorher, wenn er stets dieselbe Geschwindigkeit, wie in der Epoche selbst, hätte, so dass die Theile, in welche die Gerade durch diese Punkte getheilt wird, sämmtlich von gleicher Länge sind. Man mache nun in der Richtung der Bewegung

$$A_1 B_1 = {}_1A_1 B = x, \quad A_2 B_2 = {}_2A_2 B = 4x,$$
$$A_3 B_3 = {}_3A_3 B = 9x, \text{ etc., wo } x = 10''5,$$

so sind $\ldots {}_2B$, ${}_1B$, A, B_1, $B_2, \ldots$ die Oerter des Mondes bei der durch die Säculargleichung beschleunigten Bewegung, und man sieht leicht, wie von den alsdann in den einzelnen Jahrhunderten durchlaufenen Wegen

$$\ldots {}_3B\,{}_2B,\ {}_2B\,{}_1B,\ {}_1BA,\ AB_1,\ B_1B_2,\ B_2B_3 \ldots$$

jeder folgende um $2x$ grösser als der nächstvorhergehende ist.

Die Theorie der Planetenstörungen lehrt übrigens, dass die Excentricität der Erdbahn zwar mehrere Jahrhunderte hindurch als der Zeit proportional sich ändernd angesehen werden kann, dass aber bei längeren Zeiträumen das Quadrat und noch höhere Potenzen der Zeit mit in Rechnung genommen werden müssen, indem die Excentricität innerhalb gewisser ziemlich enger Grenzen in Perioden, deren Dauer viele Jahrtausende beträgt, abwechselnd grösser und kleiner wird. Dasselbe wird daher auch von der Aenderung der mittleren Mondsbewegung gelten, in welcher sich jene Aenderung der Excentricität gleichsam wie in einem vielfach vergrössernden Spiegel abbildet, und die jetzige Beschleunigung dieser Bewegung wird einst in eine Verzögerung übergehen.

Fig. 40.

Nach Damoiseau ist die Säculargleichung bis zur dritten Potenz der Zeit genau und für den Anfang des Jahres 1801 als Epoche:

$$10''8786 \cdot t^2 + 0''015981 \cdot t^3 \; ,$$

wovon das zweite Glied für Zeitpunkte, welche vor die Epoche fallen, seiner Natur nach negativ ist, und dessen Berücksichtigung nothwendig wird, wenn man z. B. bis zu der von den Chaldäern 720 Jahre vor Chr. beobachteten und von Ptolemäus uns aufbewahrten Mondfinsterniss zurückgehen will.

Es mag noch bemerkt werden, dass nach Laplace's weiteren Forschungen (*Mécan. cél.*, Tome III, pag. 175) auch die Länge der Apsiden und die der Knoten des Mondes durch die Verminderung der Excentricität der Erdbahn säculare Aenderungen erfahren, wodurch die vorwärtsgehende Bewegung der Apsiden und die rückwärtsgehende der Knoten verzögert werden, während die des Mondes selbst beschleunigt wird, und dass die Säculargleichungen dieser drei Bewegungen in den Verhältnissen von 3 : 0·74 : 1 zu einander stehen.

Anmerkung des Herausgebers. Die Säcularänderung der mittleren Länge des Mondes hat nicht allein vor hundert Jahren, sondern auch in den letzten Decennien Anlass zu sehr interessanten Controversen unter den Astronomen gegeben. Hansen hat in seinen Mondtafeln für dieselbe den Werth

$$+ 12''180\, t^2 + 0{\cdot}013473\, t^3\, {}^{*})$$

zu Grunde gelegt und gezeigt, dass hierbei die chronologischen Sonnenfinsternisse des Alterthums vortrefflich dargestellt werden. Adams und Delaunay sind zu dem Resultate gelangt, dass der Hansen'sche, mit den Rechnungen von Laplace und Damoiseau nahe übereinkommende Werth des Coefficienten von t^2 um c. 6″, also nahe auf die Hälfte, zu verkleinern sei, und Hansen selbst hat sich überzeugt, dass eine solche Reduction in der That eintrete, sobald die von ihm in den Mondtafeln übergangenen Glieder dritter Ordnung aus dem Element Ξ Art. 298 der „*Darlegung*“ in Rechnung gezogen werden (das Ergebniss der umfangreichen Rechnung Hansen's hat der Herausgeber zu Anfang des Jahres 1863 vor Augen gehabt). Da jedoch der Einfluss dieser Reduction, wenigstens in Bezug auf die chronologischen Finsternisse, welche sonst nicht befriedigend dargestellt werden können, durch andere Störungsglieder wieder compensirt werden muss, so bleibt die Frage nach dem Ursprunge solcher Störungsglieder offen. Hansen hat selbst darauf hingewiesen, dass die Annahme einer minimalen Verzögerung der Rotationsdauer der Erde, durch welche seit dem Zeitalter Hipparch's bis jetzt, also in 2000 Jahren, die Dauer des Sterntags um den 84-sten Theil einer Zeitsecunde zugenommen habe — ausreiche, um die besprochenen Differenzen

---

*) in seiner späteren „*Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen*“ berechnet er

$$+ 12''557\, t^2 + 0''012561\, t^3$$

nebst den zugehörigen Säculargliedern resp. für die Bewegung der Apsiden- und Knotenlinie

$$- 38''577\, t^2 - 0''038590\, t^3$$

und

$$+ 6''623\, t^2 + 0''006625\, t^3 \; .$$

zu compensiren (siehe den Aufsatz „*Einige Bemerkungen über die Säcularänderung der mittleren Länge des Mondes*“ in den *Berichten der mathem.-physischen Classe der Sächs. Gesellschaft der Wiss.* vom 15. April 1863). Dass Einflüsse existiren, welche in dem angedeuteten Sinne wirksam sein können, ist nicht in Abrede zu stellen und in dieser Beziehung z. B. an die Bewegung der Ebbe und Fluth, sowie einen etwaigen Reibungswiderstand des Aethers zu erinnern.

Achtes Kapitel.

Von den Störungen der Breite des Mondes.

§. 135. In dem Bisherigen, wo wir die hauptsächlichsten Störungen der Länge und des Radius Vector des Mondes zu bestimmen suchten, nahmen wir den Mond und die Sonne in derselben Ebene sich bewegend an, da bei der hier beabsichtigten Genauigkeit die kleine Neigung, welche die Bahnebenen von Sonne und Mond gegen einander haben, auf diese Störungen keinen Einfluss hatte. Die Neigung der beiden Bahnen kann aber durchaus nicht mehr unberücksichtigt bleiben, sobald wir die Störungen in der Breite des Mondes bestimmen wollen, als welche eben daher rühren, dass die Sonne bei ihrem jährlichen Umlauf um die Erde in dem einen Halbjahr über, in dem anderen unter der Ebene der Mondsbahn steht, und wodurch zu den zwei in der Ebene selbst wirkenden Kräften T und V eine dritte auf ihr perpendikulare Kraft W hinzukommt, welche den Mond bald nach der einen, bald nach der anderen Seite hin von der Ebene zu entfernen strebt.

Der Werth dieser Kraft, so genau, als wir seiner hier bedürfen, und nachdem er mit $n^2 a$ dividirt worden, ist (§. 100)

$$W_1 = 3w \cos(l - l') \sin b' ,$$

worin b' die Breite der Sonne in Bezug auf die Mondsbahn bedeutet. Da $\cos(l - l')$ von $l - l' = 90^\circ$ bis 270°, also vom ersten bis zum letzten Viertel, negativ ist, so hat während dieser Zeit W_1 das entgegengesetzte Zeichen von b', d. h. der Mond wird in der von der Sonne entfernteren Hälfte seiner Bahn nach derjenigen Seite seiner Bahnebene getrieben, auf welcher die Sonne nicht steht. Vom letzten bis zum ersten Viertel dagegen, wo er sich in der der Sonne näheren Bahnhälfte bewegt, treibt ihn die Kraft W nach der Seite der Sonne hin.

Um den Grund hiervon unmittelbar einzusehen, denke man sich die Bahnebene horizontal und die Sonne über derselben stehend. Von den nach verticalen Richtungen geschätzten Kräften, womit irgend zwei in der Ebene befindliche Körper A und B von der Sonne S angezogen werden, wird alsdann die Kraft für den der Sonne näheren Körper, welcher A sei, die grössere sein, und dieses nicht allein deswegen, weil A mit einer grösseren Kraft, als B, nach S direct gezogen wird, sondern auch, weil von den Richtungen AS und BS die erstere einen kleineren Winkel, als die letztere, mit der Verticalen macht. Da nun vom ersten bis letzten Viertel die Erde, und vom letzten bis ersten der Mond der Sonne näher steht, so wird im ersteren Zeitraume die Erde, im letzteren der Mond stärker nach oben getrieben. Die störende Kraft W ist aber der Unterschied dieser zwei verticalen Kräfte (vgl. §. 103), und treibt folglich den Mond nur im letzteren Zeitraume nach oben, im ersteren dagegen nach unten*).

Dasselbe ergiebt sich auch leicht aus dem in §. 103 gefundenen Resultate, dass die ganze den Mond L störende Kraft LN (Fig. 37) in der Ebene TLS wirkt und den Mond von seinem Radius TL nach der Seite zu, auf welcher die Sonne S steht, oder nach der entgegengesetzten, zu entfernen sucht, je nachdem T oder L der von S entferntere Körper ist. Denn denken wir uns noch durch TL die Ebene der Mondsbahn gelegt, so wird L im ersteren Falle von dieser Ebene weg nach derjenigen Seite zu getrieben, auf welcher sich S befindet, folglich u. s. w.

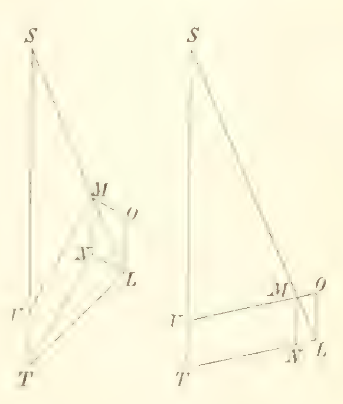


Fig. 37 und 37*.

---

*) Analytisch werden diese Schlüsse durch den in §. 95 für W erhaltenen Ausdruck

$$W = Km'\left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r'^3}\right)z$$

dargestellt, worin z, einerlei mit dem dortigen QP', der Abstand der Sonne von der Ebene der Mondsbahn, ϱ und r' die Entfernungen des Mondes und der Erde von der Sonne, und damit $\frac{Km'}{\varrho^2}\cdot\frac{z}{\varrho}$ und $\frac{Km'}{r'^2}\cdot\frac{z}{r'}$ die nach der Richtung von z geschätzten Kräfte sind, mit denen der Mond und die Erde von der Sonne angezogen werden. W, als der Unterschied dieser Kräfte, hat hiernach mit z einerlei Zeichen, oder das entgegengesetzte, je nachdem ϱ kleiner oder grösser als r' ist.

§. 136. Ehe wir zu den von der Kraft W erzeugten Wirkungen übergehen, müssen wir dem analytischen Ausdrucke von W eine zu diesem Zwecke dienlichere Gestalt zu geben suchen.

Heisst, wie im Früheren, ι die gegenseitige Neigung der Bahnebenen von Sonne und Mond, und ϑ' die Länge des aufsteigenden Knotens der Sonnenbahn auf der Mondsbahn, so ist

$$\sin b' = \sin \iota \sin (l' - \vartheta')$$

(§. 47) und damit

$$W_1 = 3w \sin \iota \cos (l - l') \sin (l' - \vartheta') \ .$$

Da aber ιw von der dritten Ordnung ist, und hier über Grössen der dritten Ordnung hinaus nicht gegangen werden soll, so können wir in dieser Formel ι statt $\sin \iota$, und statt l und l' ihre mittleren Werthe λ und λ' setzen. Hierdurch wird

$$\begin{aligned} W_1 &= 3\iota w \cos (\lambda - \lambda') \sin (\lambda' - \vartheta') \\ &= \frac{3}{2}\iota w (\sin A_1 - \sin A_2) \ , \end{aligned}$$

wo der Kürze willen A_1 und A_2 für $\lambda - \vartheta'$ und $\lambda - 2\lambda' + \vartheta'$ geschrieben worden.

Durch die Kraft W wird nun der Mond von der Ebene, in welcher er in jedem Augenblicke fortgehen will, und deren Lage durch die Richtung seiner jedesmaligen Geschwindigkeit und den Ort der Erde bestimmt wird, bald auf die eine, bald auf die andere Seite getrieben und damit die Lage der Ebene selbst fortwährend geändert. Unter allen den verschiedenen Ebenen, in welche die Mondsbahn auf solche Weise nach und nach gebracht wird, wird es aber eine gewisse mittlere geben, die, wie es wenigstens für den Anfang scheint, unverändert bleibt, und von welcher sich der Mond um periodisch ab- und zunehmende Grössen entfernt, die nur von der Ordnung ιw sind, so dass sowohl seine auf diese Ebene bezogene Breite, welche man b nenne, als der Winkel, den mit ihr seine jedesmalige Bahnebene macht, und welcher I heisse, ιw zum Factor haben. Um daher die Wirkung der Kraft W zu ermitteln, wollen wir die Bewegung des Mondes auf diese mittlere Ebene als Grundebene beziehen, und seine rücksichtlich derselben stattfindende Breite b zu bestimmen suchen.

Die Kraft, welche diese Breite erzeugt, ist perpendikular auf der Grundebene und werde mit U bezeichnet. Weil die ganze auf den Mond wirkende Kraft aus T, V, W zusammengesetzt ist, so ist U gleich der Summe der Projectionen von T, V, W auf ein auf die Grundebene gesetztes Perpendikel, d. i. gleich der Summe von T, V, W, nachdem jede dieser Kräfte mit dem Sinus des Winkels multiplicirt worden, den ihre Richtung mit der Grundebene macht.

Für die in der Richtung des Radius wirkende Kraft T ist dieser Winkel $= b$. Für die Kraft V sei er $= I'$; er ist kleiner als I, weil die Richtung von V in der Ebene der Mondsbahn liegt, und der grösste Winkel, den eine Linie dieser Ebene mit der Grundebene machen kann, gleich I ist. Die Kraft W endlich ist auf der Ebene der Mondsbahn perpendikular und macht daher mit der Grundebene einen Winkel $= 90^0 + I$. Hiernach wird

$$U = T \sin b + V \sin I' + W \cos I ,$$

folglich auch, wenn man

$$\frac{U}{n^2 a} = U_1$$

setzt:

$$U_1 = T_1 \sin b + V_1 \sin I' + W_1 \cos I .$$

Es ist aber (§. 118)

$$T_1 = -a^2 r^{-2} + \ldots = -1 - 2e \cos \alpha + \ldots .$$

Da ferner e von der ersten, V_1 von der zweiten, W_1 aber, so wie b, I und I', von der dritten Ordnung sind, und alle Grössen von der vierten Ordnung an vernachlässigt werden sollen, so zieht sich die Formel zusammen in

$$U_1 = -b + W_1 ,$$

wo also das zu W_1 noch hinzugefügte Glied $-b$ von der den Mond anziehenden und damit nach der Grundebene zurücktreibenden Kraft der Erde herrührt. Substituirt man darin für W_1 seinen obigen Werth, so kömmt:

$$U_1 = -b + \tfrac{3}{2} \iota w (\sin A_1 - \sin A_2) , \qquad (1)$$

worin man jetzt unter dem Winkel ι und dem Bogen ϑ', von welchem A_1 und A_2 Functionen sind, die Neigung und die Knotenlänge der Sonnenbahn in Bezug auf die Grundebene oder die mittlere Mondsbahn verstehe, indem davon dieselben auf die wirkliche Bahn bezogenen Elemente, oder ι und ϑ' in ihrer anfangs festgesetzten Bedeutung, ersichtlich nur um Grössen von der Ordnung ιw abweichen können.

§. 137. Zufolge des letzterhaltenen Ausdrucks für U_1 und nach Schlüssen, ganz denen ähnlich, durch welche aus den Ausdrücken für T_1 und V_1 die Störungen im Radius Vector und in der Länge gefunden wurden, wird der Ausdruck für die durch die Kraft U erzeugte Bewegung, mithin auch die Breite b, aus Gliedern bestehen, welche A_1 und A_2 zu Argumenten und ιw zum Factor haben.

Wir setzen daher:

$$(2) \qquad b = h_1 \iota w \sin A_1 + h_2 \iota w \sin A_2 \; .$$

Hiermit wird einerseits

$$(3) \quad U_1 = (\tfrac{3}{2} - h_1)\, \iota w \sin A_1 - (\tfrac{3}{2} + h_2)\, \iota w \sin A_2 \; .$$

Andererseits folgt daraus für den Abstand des Mondes von der Grundebene

$$r \sin b = ab = a h_1 \iota w \sin A_1 + a h_2 \iota w \sin A_2 \; ,$$

und hieraus nach §. 38 die auf der Ebene perpendikulare Kraft, welche die dadurch ausgedrückte Bewegung hervorbringt:

$$U = - n^2 q_1^2 a h_1 \iota w \sin A_1 - n^2 q_2^2 a h_2 \iota w \sin A_2 \; ,$$

wo nq_1 und nq_2 die Geschwindigkeiten bezeichnen, mit denen sich die Argumente A_1 und A_2 ändern; folglich

$$(4) \qquad U_1 = - q_1^2 h_1 \iota w \sin A_1 - q_2^2 h_2 \iota w \sin A_2 \; .$$

Durch Vergleichung dieses Ausdruckes für U_1 mit dem obigen (3) ergiebt sich aber

$$(5) \qquad \tfrac{3}{2} - h_1 = - q_1^2 h_1 \; ,$$

$$(6) \qquad \tfrac{3}{2} + h_2 = + q_2^2 h_2 \; ,$$

woraus nun h_1 und h_2 zu bestimmen sind.

§. 138. Unter der Hypothese, dass die zur Grundebene genommene mittlere Lage der Mondsbahn ungeändert bleibt, und weil die Ebene der Sonnenbahn, oder vielmehr der Erdbahn, ihre Lage nur äusserst langsam ändert, sind die Knoten der Sonnenbahn auf der Grundebene gleichfalls als fest, und daher der Bogen ϑ' als constant zu betrachten. Hiernach sind die Geschwindigkeiten von $\lambda - \vartheta'$ und $\lambda - 2\lambda' + \vartheta'$, oder von A_1 und A_2, gleich n und $n - 2n'$; mithin (§. 100)

$$q_1 = 1 \quad \text{und} \quad q_2 = 1 - \frac{2n'}{n} = 0{\cdot}85040 \; .$$

Es ist daher, der Gleichung (6) zufolge:

$$h_2 = - \frac{3}{2(1 - q_2^2)} = - 5{\cdot}4185 \; ,$$

und weil nach den Beobachtungen der mittlere Werth der Neigung $\iota = 5^\circ 8' 48'' = 18528''$, und $w = 0{\cdot}005595$ ist:

$$h_2 \iota w = - 562'' = - 9' 22'' \; .$$

folglich das zweite Glied im Ausdrucke (2) für b:

$$-9'22'' \sin(\lambda - 2\lambda + \vartheta') \ .$$

Dagegen wird mit $q_1 = 1$ die Gleichung (5):

$$\frac{3}{2} - h_1 = - h_1 \ ,$$

was einen Widerspruch enthält, der, wie wir schon ahnen können, eine Folge der naturwidrigen, aber hier zu Grunde gelegten Hypothese ist, dass die mittlere Lage der Mondsbahn ungeändert bleibt. Denn im Gegentheile haben schon die alten Chaldäer die Beobachtung gemacht, dass, während die Neigung der Mondsbahn gegen die Sonnenbahn durchschnittlich sich nicht ändert, die Knoten der ersteren Bahn auf der letzteren eine rückgängige Bewegung haben, mit welcher sie beiläufig aller 19 Jahre einen Umlauf vollenden.

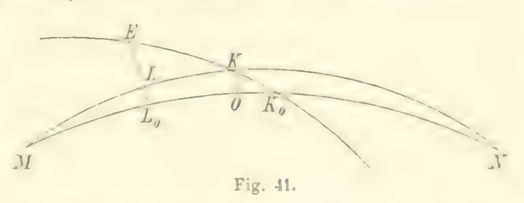


Fig. 41.

Sei daher, um diese Bewegung jetzt mit in Rechnung zu nehmen, KE (Fig. 41) die Ekliptik, $K_0 L_0$ die mittlere Lage der Mondsbahn in der Epoche, KL ihre mittlere Lage in einem späteren von der Epoche um die Zeit t entfernten Zeitpunkte. Hiernach ist

$$L_0 K_0 E = LKE = \iota$$

und $K_0 K$ die (in der Figur rechtläufig angenommene) Bewegung des Mondsknotens in der Ekliptik während der Zeit t. Die Geschwindigkeit dieser Bewegung setzen wir, da letztere von der Störung durch die Sonne herrührt und mithin vom Coefficienten w abhängen muss, gleich Qnw, folglich

$$K_0 K = Qnwt \ .$$

Werde nun die mittlere Lage der Mondsbahn in der Epoche zur Grundebene gewählt, und werde der Zeitraum t, der über alle Grenzen wachsen kann, vor der Hand nur so gross genommen, dass $Qntw$ oder $K_0 K$ von gleicher Ordnung mit w bleibt. Abgesehen von allen periodischen Störungen der Breite wird sich der Mond am Ende von t in einem Punkte L der dann statthabenden mittleren Lage KL seiner Bahn befinden. Man errichte daselbst auf KL ein sphärisches Perpendikel LE, das wegen der Kleinheit von $K_0 K$ sehr nahe auch $K_0 L_0$ in L_0 rechtwinklig schneiden wird. Alsdann ist bis auf Grössen der zweiten Ordnung genau

$$L_0 E = \iota \sin K_0 E \ ,$$

$$LE = \iota \sin KE = \iota \sin(K_0 E - K_0 K) \ .$$

folglich wird die von periodischen Störungen freie Breite $L_0 L$, welche in der Knotenbewegung ihren Ursprung hat,

$$L_0 L = \iota \sin K_0 E - \iota \sin(K_0 E - K_0 K) ,$$

oder, weil hierin statt $K_0 E$ auch der davon um eine Grösse der zweiten Ordnung verschiedene Bogen

$$K_0 L_0 = \lambda - \vartheta' = \varDelta_1$$

gesetzt werden kann:

$$L_0 L = \iota \sin \varDelta_1 - \iota \sin(\varDelta_1 - Qntw) ,$$

und damit

$$\begin{aligned}(2^*) \qquad b &= h_1 \iota w \sin \varDelta_1 + \iota \sin \varDelta_1 - \iota \sin(\varDelta_1 - Qntw) \\ &= h_1 \iota w \sin \varDelta_1 + Qnt\iota w \cos \varDelta_1 ,\end{aligned}$$

wenn das Glied mit dem Argumente $\varDelta_2$ jetzt ausser Betracht gelassen wird.

Mit diesem Werthe für b kann nun in der That der Gleichung (1) vollkommen Genüge geleistet werden. Denn erstens wird damit die Gleichung selbst:

$$(3^*) \qquad U_1 = (\tfrac{3}{2} - h_1)\iota w \sin \varDelta_1 - Qnt\iota w \cos \varDelta_1 .$$

Da ferner die Quadrate der Geschwindigkeiten, mit denen sich die Bögen $\varDelta_1$ und $\varDelta_1 - Qntw$ ändern,

$$n^2 \quad \text{und} \quad (n - Qnw)^2 = n^2(1 - 2Qw) ,$$

sind, so ist die aus (2*) unmittelbar folgende Kraft, nachdem sie mit $n^2 a$ dividirt worden:

$$U_1 = -(\iota + h_1 \iota w) \sin \varDelta_1 + \iota(1 - 2Qw) \sin(\varDelta_1 - Qntw)$$

d. i.

$$(4^*) \qquad U_1 = -(2Q + h_1)\iota w \sin \varDelta_1 - Qnt\iota w \cos \varDelta_1 .$$

Dieser Werth von U_1 wird aber mit dem vorhergehenden (3*) identisch, sobald wir noch

$$-2Q = \frac{3}{2}, \quad \text{also} \quad Q = -\frac{3}{4}$$

setzen und damit den Mondsknoten eine Geschwindigkeit gleich $-\frac{3}{4}nw$ beilegen. Es ist diese Geschwindigkeit ihrem absoluten Werthe nach eben so gross als diejenige, welche wir anfänglich (§. 125) für die Apsiden gefunden hatten. Die Umlaufszeit der Knoten beträgt hiernach 17·825 siderische Jahre (ebendas.), was von dem aus den Beobachtungen sich ergebenden Umlaufe von 6793·3911 Tagen oder

18·599 siderischen Jahren nicht beträchtlich abweicht*). Endlich ist wegen des negativen Zeichens der Geschwindigkeit die Bewegung der Knoten rückläufig, was ebenfalls mit der Natur übereinstimmt.

Was noch den Coefficienten h_1 anlangt, so bleibt dieser bei der Vergleichung von (4*) mit (3*) unbestimmt. Auch hätten wir dieses schon voraussehen können, da das Glied $h_1 \iota w \sin \Delta_1$ seiner Natur nach für keine Störung zu achten ist. Wäre nämlich dasselbe allein vorhanden, also

$$b = h_1 \iota w \sin \Delta_1 \ ,$$

so würde sich der Mond in einem grössten Kreise bewegen, welcher mit dem durch die Knoten gelegten Kreise, auf welchen seine Bewegung bezogen wird, einen Winkel gleich $h_1 \iota w$ macht, so dass, weil ι der Winkel der Sonnenbahn mit dem letzteren Kreise ist, nunmehr $\iota - h_1 \iota w$ den die Neigung zu nennenden und schlechthin mit ι zu bezeichnenden Winkel ausdrücken würde. Wir können daher h_1 geradezu gleich Null setzen.

Zusatz. Die mit der Epoche anfangende Zeit t darf nach dem Vorigen nur so lange wachsen, als die Grösse $Qnwt$ von einerlei Ordnung mit w bleibt, — also etwa einen Monat lang. Denn für $t = 1$ Monat ist nt oder der während t vom Monde durchlaufene mittlere scheinbare Weg einem ganzen Kreise gleich, also $nt = 3{\cdot}14$, und daher

$$Qnwt = -\frac{3}{4} \,.\, 3{\cdot}14 \,.\, w = -\, 2{\cdot}36 w \ .$$

Diese kurze Dauer von t kann aber dem vorhin gemachten Schlusse auf eine ununterbrochen und gleichförmig dauernde Knotenbewegung keinen Eintrag thun. Um nämlich den Lauf des Mondes länger als einen Monat zu verfolgen, dürfen wir nur den Anfang des folgenden Monats zu einer neuen Epoche, den Anfang des darauf folgenden dritten Monats abermals zu einer neuen Epoche u. s. w. nehmen. So wie nun von der ersten bis zur zweiten Epoche, oder während des ersten Monats, die Geschwindigkeit der Knoten gleich $-\frac{3}{4} nw$ gefunden wurde, so wird sie auch während des zweiten, dritten, etc. Monats von derselben Grösse sein.

§. 139. Dem Ausdrucke (1) für U_1 geschieht demnach vollkommen Genüge, wenn man den sphärischen Abstand des Mondes von der Grundebene zur Zeit t nach der Epoche, oder seine Breite,

---

*) Hansen setzt für die Epoche 1800 die jährliche Knotenbewegung $= -\, 69679{\cdot}6191$ Secunden, mit einer Umlaufszeit von 6793·436 Tagen. A. d. H.

$$b = Qnt\iota w \cos(\lambda - \vartheta') + h_2 \iota w \sin(\lambda - 2\lambda' + \vartheta')$$

setzt, worin

$$Q = -\frac{3}{4} \quad \text{und} \quad h_2 w = -\frac{3n^2 w}{8n'(n-n')} = -\frac{3n'}{8(n-n')} .$$

Das erste Glied hiervon, zu dessen Berechnung die Epoche etwa aller Monate erneuert werden muss, ist von dem Stande des Mondes gegen die Sonne unabhängig, und drückt ein bei unveränderter Neigung gleichförmiges Rückwärtsgehen der mittleren Mondsbahn an der Sonnenbahn aus.

Das zweite Glied, welches rein periodischer Natur ist, kann als die Breite des Mondes in Bezug auf die Lage, welche die mittlere Bahn zur Zeit t hat, angesehen werden. Das darin vorkommende ϑ' ist nach dem Obigen die Knotenlänge der Sonnenbahn auf der mittleren Mondsbahn in der Epoche. Da aber die Rechnung offenbar desto genauer wird, je öfter man die Epoche erneuert, so wird man unter ϑ' noch besser die Knotenlänge der Zeit t selbst zu verstehen haben.

Zusätze. a) Man verlängere Fig. 41, S. 219 die Bögen $K_0 L_0$ und KL zu beiden Seiten bis zu ihren gegenseitigen Durchschnitten M und N, so ist der Winkel

$$MK_0K = \iota = MKE = K_0KN .$$

folglich auch

$$MKK_0 = NK_0K .$$

Die sphärischen Dreiecke K_0KM und KK_0N sind daher einander gleich, folglich

$$K_0M = NK \quad \text{und} \quad KM = NK_0 .$$

ferner

$$K_0M + KM = NK + KM = 180^\circ .$$

Ist folglich K_0K sehr klein, und sind daher die Bögen K_0M und KM nahe einander gleich, so ist jeder von ihnen nahe gleich 90°. Die Punkte, in denen sich zwei nächstfolgende Lagen der mittleren Mondsbahn schneiden, sind daher von den Knoten um 90° entfernt.

b) Fällt man von K auf K_0L_0 das Perpendikel KO, so ist

$$OK = K_0K \sin\iota = \iota \,.\, Qntw ,$$

und es verhält sich

$$OK : L_0L = \sin OM : \sin L_0M = 1 : \cos K_0L_0 ,$$

mithin

$$L_0L = OK \cos K_0L_0 = Qnt\iota w \cos \Delta_1 ,$$

wie vorhin auf andere Weise gefolgert wurde.

§. 140. Der aufsteigende Knoten K der Sonnenbahn auf der Mondsbahn und der aufsteigende Knoten der Mondsbahn auf der Sonnenbahn sind offenbar zwei um 180° von einander entfernte Punkte. Setzt man daher die Länge des letzteren Knotens gleich ϑ, so ist

$$\vartheta' = \vartheta + 180^\circ \ ,$$

und die in §. 138 gefundene periodische Ungleichheit in der Breite wird

$$= + 9' 22'' \sin(\lambda - 2\lambda' + \vartheta) \ .$$

Auch kann man diese Ungleichheit, wegen der Kleinheit von ι, statt auf die Mondsbahn, auf die Sonnenbahn selbst beziehen, d. h. man kann um eben so viel den sphärischen Abstand von der Ekliptik, welchen der Mond bei der gleichförmigen Bewegung seiner Knoten haben würde, geändert ansehen.

Bedeuten demnach ϑ_0 und ϑ die in der Ekliptik gezählten mittleren Längen des aufsteigenden Mondsknotens in der Epoche und zur Zeit t, und sind für letztere Zeit und in Bezug auf die Ekliptik β die Breite des Mondes, wenn er sich in seiner mittleren Bahn bewegte, b die wahre oder gestörte Breite, l die wahre Länge des Mondes in seiner Bahn (§. 47), so hat man

$$\vartheta = \vartheta_0 + Qnw \,.\, t \ , \qquad (1)$$

wo der Zeitraum t von jeder beliebigen Länge sein kann, und wo, wenn er in Tagen ausgedrückt ist,

$$Qnw = -\frac{360^\circ}{6793{\cdot}3911} = -3' 10'' 744$$

ist; ferner

$$\sin\beta = \sin\iota \sin(l - \vartheta) \ , \qquad (2)$$

wofür auch mit einer hier hinreichenden Genauigkeit

$$\beta = \iota \sin(l - \vartheta) = 5^\circ 8' 48'' \sin(l - \vartheta)$$

geschrieben werden kann*), und damit nach Damoiseau

---

*) Es folgt nämlich aus (2) bis zum Würfel von ι genau, und wenn ι und β in Secunden ausgedrückt sind:

$$\beta = \iota \sin(l - \vartheta) - \tfrac{1}{24}\iota^3 (\sin 1'')^2 [\sin(l - \vartheta) + \sin 3(l - \vartheta)]$$
$$= 5^\circ 8' 41'' 7 \sin(l - \vartheta) - 6'' 2 \sin 3(l - \vartheta) \ .$$

Eben so ist, wenn L die Länge des Mondes in der Ekliptik bedeutet,

$$\tan\beta = \tan\iota \sin(L - \vartheta) \ ,$$

woraus

$$\beta = \iota \sin(L - \vartheta) + \tfrac{1}{12}\iota^3 (\sin 1'')^2 [\sin(L - \vartheta) + \sin 3(L - \vartheta)]$$
$$= 5^\circ 9' 0'' 3 \sin(L - \vartheta) + 12'' 4 \sin 3(L - \vartheta)$$

folgt.

$$(3) \qquad b = \beta + 8'47''8 \sin(l - 2\lambda' + \vartheta) \; ,$$

mit Weglassung der Gleichungen, welche zur vierten und höheren Ordnungen gehören, und deren grösste nur bis $26''$ steigt. Die hier entwickelte Gleichung, welche den doppelten Abstand des Mondes von der Sonne, weniger dem Abstande des Mondes von seinem aufsteigenden Knoten, zum Argumente hat, ist daher unter allen Gleichungen der Breite bei weitem die grösste; sie ist eben so, wie die Variation und die jährliche Gleichung, von Tycho de Brahe entdeckt worden.

§. 141. Da sich die mittlere Mondsbahn bei unveränderter Neigung gegen die Sonnenbahn an letzterer gleichförmig fortbewegt, so scheint es, dass sich die Theorie dieser Bewegung, wenn auch nicht die der periodischen Breitenstörungen, etwas einfacher entwickeln lassen werde, wenn man die unbewegliche Ebene der Sonnenbahn selbst zur Grundebene wählt.

Zu dem Ende wollen wir zu den ursprünglich auf den Mond wirkenden Kräften zurückgehen. Diese sind (§. 94) erstens eine ihn nach der Erde treibende Kraft $= K(M+m) : r^2$, zweitens eine ihn nach der Sonne treibende Kraft $= Km' : \varrho^2$, und drittens eine Kraft $= Km' : r'^2$, deren Richtung parallel mit der Richtung von der Sonne nach der Erde ist. Jede dieser Kräfte zerlegen wir in zwei, von denen die eine parallel mit der Ebene der Ekliptik, die andere zu dieser Ebene perpendikular ist und daher hier allein in Betracht kommt. Sei nun die Entfernung des Mondes von dieser Ebene gleich z, und zwar positiv, wenn er nördlich von der Ebene absteht, so sind jene drei Kräfte, nach einer auf derselben perpendikularen Richtung geschätzt und positiv genommen, wenn sie den Mond nach Norden treiben:

$$-\frac{K(M+m)}{r^2} \cdot \frac{z}{r} \,, \qquad -\frac{Km'}{\varrho^2} \cdot \frac{z}{\varrho} \,, \quad \text{und} \quad 0 \; .$$

Bezeichnen wir daher die Totalkraft, welche auf den Mond nach derselben Richtung wirkt, mit Z, so wird

$$Z = -K(M+m)\frac{z}{r^3} - Km'\frac{z}{\varrho^3} \; ,$$

oder, weil $m' = (M+m)\dfrac{a'^3}{a^3}w$, und weil der Unterschied zwischen dem Quotienten $a'^3 : \varrho^3$ und der Einheit nur von der zweiten Ordnung ist (§. 99):

$$(A) \qquad Z = -K(M+m)\left(\frac{z}{r^3} + \frac{z}{a^3}w\right) \; ,$$

woraus die Bewegung des Mondes in Breite sich eben so genau, wie vorhin, ermitteln lassen muss.

Es ist aber (§. 118)

$$r = a\left(1 - \frac{1}{6}w\right) + \text{einem Aggregat von periodischen Gliedern.}$$

Da aus diesen letzteren keine anderen Glieder, als ebenfalls periodische, in dem für die Breite gesuchten Ausdrucke hervorgehen können, so ist, weil wir die periodischen Breitenstörungen jetzt unberücksichtigt lassen wollen, schlechthin

$$r = a\left(1 - \frac{1}{6}w\right) = a,$$

zu setzen, woraus

$$Z = -K(M+m)(1+w)\frac{z}{a_,^3} \qquad (a)$$

folgt.

Gesetzt nun, dass der Mond, in der Entfernung $a_,$ von der Erde, gar nicht gestört würde, und dass daher $w = 0$ wäre, so würde seine gegen die Ekliptik geneigte Bahnebene ungeändert bleiben, und folglich die Periode P seiner auf der Ekliptik perpendikularen, durch Z erzeugten Bewegung, seiner Umlaufszeit U in der Bahnebene, oder auch entlang der Ekliptik, gleich sein, und man würde für U und P die Gleichung haben (§. 65):

$$K(M+m) = n^2 a_,^3 = \frac{4\pi^2 a_,^3}{U^2} = \frac{4\pi^2 a_,^3}{P^2}. \qquad (1)$$

Wirkt demnach auf den in der Entfernung $a_,$ von der Erde befindlichen Mond eine ihn perpendikular gegen die Ekliptik treibende Kraft

$$Z = -K(M+m)\frac{z}{a_,^3}, \qquad (b)$$

so hat seine in derselben Richtung geschätzte Bewegung eine durch die Gleichung (1) bestimmte Periode P. — Auch kann dieses unmittelbar aus der in §. 25 gegebenen Theorie der schwingenden Bewegung gefolgert werden.

Die Kraft Z in (a) ist aber in dem Verhältnisse von $1 + w : 1$ grösser als die Kraft Z in (b), und die Sonne wirkt daher in dieser Beziehung eben so, als wenn die Summe der sich anziehenden Massen M und m sich in demselben Verhältnisse vergrössert hätte. Mithin wird für die Periode P bei der durch die Sonne gestörten Bewegung

$$K(M+m)(1+w) = \frac{4\pi^2 a_,^3}{P^2}$$

sein.

Von der anderen Seite ist für die Umlaufszeit U bei der nach der Ekliptik selbst geschätzten und durch die Sonne gestörten Bewegung (§. 102)

$$K(M+m)\left(1-\frac{1}{2}w\right)=n^2 a_i^3=\frac{4^2\pi a_i^3}{U^2}\,.$$

Beim Hinzutritt der Sonnenstörung findet demnach zwischen U und P die Proportion statt:

$$U^2 : P^2 = 1+w : 1-\frac{1}{2}w = 1 : 1-\frac{3}{2}w\,,$$

also

$$U : P = 1 : 1-\frac{3}{4}w\,;$$

d. h. die Periode P oder die Umlaufszeit des Mondes in Bezug auf die Knoten ist in dem Verhältnisse von $1-\frac{3}{4}w : 1$ kleiner als seine Umlaufszeit in Bezug auf einen festen Punkt der Ekliptik. Die Knoten müssen folglich eine der Bewegung des Mondes entgegenkommende Bewegung haben, deren Geschwindigkeit sich zu der des Mondes wie $\frac{3}{4}w$ zu 1 verhält.

Ohne Rechnung dürfte sich das Rückwärtsgehen der Knoten auf folgende Weise, der die eben gemachten Schlüsse gleichfalls zum Grunde liegen, am einfachsten erklären lassen: Die nahe kreisförmige Bewegung des Mondes in einer gegen die Ekliptik geneigten Ebene ist, wenn sie nach einer auf der Ebene der Ekliptik perpendikularen Richtung geschätzt wird, Pendelschwingungen vergleichbar, deren Dauer, so lange die Lage der Bahnebene unverändert bleibt, einer halben siderischen Umlaufszeit des Mondes gleich ist. Diese Schwingungen werden durch die, nach derselben perpendikularen Richtung geschätzte, anziehende Kraft der Erde erzeugt. Durch die Anziehungskraft der Sonne, die, wenn sie gleichfalls nach dieser Richtung geschätzt wird, den Mond stets nach der Ebene der Ekliptik hintreibt, wird aber jene Kraft vergrössert und folglich die Schwingungsdauer vermindert, eben so wie die Schwingungen eines Pendels bei zunehmender Schwerkraft schneller werden. Der Mond muss folglich eher wieder zu demselben Knoten, als zu demselben Sterne zurückkehren; folglich u. s. w.

Anmerkung. Um vermittelst der Gleichung (A) die periodischen Störungen der Breite zu finden, hat man, wie schon erinnert worden, die periodischen in r enthaltenen Glieder zu berücksichtigen. Die hierzu erforderliche Rechnung ist aber ungleich grösser, als bei der zu demselben Zwecke in §. 137 angewendeten Methode. Ohne hier näher darauf eingehen zu wollen, bemerke ich nur, dass die periodische Störung, deren Argument

$$2\lambda-\lambda'-\lambda-\vartheta$$

ist, aus der Variation oder derjenigen Störung der Länge und des Radius Vector entspringt, welche $2(\lambda - \lambda')$ zum Argumente hat.

§. 142. Die Neigung ι und die Knotenlänge ϑ sind dasselbe in Bezug auf die Breite, was die Excentricität e und die Länge des Perigäums hinsichtlich der Länge waren. Denn so wie die mittlere Länge λ wegen der Excentricität durch die Mittelpunktsgleichung

$$= 2e \sin(\lambda - \omega)$$

verbessert werden musste, so erhält der Ort des Mondes, der ohne Neigung der Bahn stets in die Ekliptik fallen würde, eine Breite

$$= \iota \sin(l - \vartheta) \; .$$

Auf gleiche Art sind rücksichtlich der Länge und der Breite das Vorwärtsgehen der Apsiden und das Rückwärtsgehen der Knoten einander entsprechende Bewegungen; denn beide sind von dem Stande des Mondes gegen die Sonne unabhängig und geschehen gleichförmig. Gleicher Weise ist endlich die vorhin gefundene Gleichung der Breite dasselbe für die Breite, was die Evection für die Länge war. Denn das Argument der ersteren Gleichung ist

$$2(\lambda - \lambda') - (\lambda - \vartheta) \; ,$$

das der letzteren

$$2(\lambda - \lambda') - (\lambda - \omega) \; ,$$

und ιw Factor der ersteren, ew der letzteren Gleichung. So wie nun die letztere auch durch eine fortdauernde Aenderung der Excentricität und der Lage der Apsidenlinie, oder kurz durch eine Bewegung des Mittelpunktes der Ellipse, dargestellt werden konnte (§§. 123 u. 124), so wird durch ähnliche Mittel auch die erstere Gleichung durch eine Aenderung der Neigung und der Knotenlänge, und somit durch eine Bewegung der Ebene der Mondsbahn sich erklären lassen.

In der That ist die durch erstere Gleichung gestörte Breite (§. 140)

$$b = \iota \sin(l - \vartheta) + h_2 \iota w \sin(l - 2\lambda' + \vartheta) \; .$$

Sie wird, wenn man

$$\begin{aligned} \iota \cos \vartheta + h_2 \iota w \cos(2\lambda' - \vartheta) &= J \cos \Theta \; , \\ \iota \sin \vartheta + h_2 \iota w \sin(2\lambda' - \vartheta) &= J \sin \Theta \end{aligned} \qquad (\alpha)$$

setzt:

$$b = J \sin(l - \Theta) \; .$$

Man wird daher die gestörte Breite geradezu finden, wenn man sie wie die ungestörte, aber nicht mit den Elementen ι und ϑ, sondern mit J und Θ berechnet, und man kann sich mithin die

Störung in der Breite auch dadurch erzeugt vorstellen, dass die Neigung J und die Knotenlänge Θ nach dem durch (α) ausgedrückten Gesetze veränderlich sind.

Um uns dieses Gesetz zur Anschauung zu bringen, wollen wir die nach ihm bewirkte Aenderung der Lage der Mondsbahn, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Aenderung der Lage ihrer Pole, zu erforschen suchen. Sei bei der Projection auf die Kugelfläche der Kreis OKF (Fig. 42) die Ekliptik, O der Anfangspunkt derselben, E ihr Nordpol, p der Nordpol der mittleren Mondsbahn, KGK' die nördliche Hälfte dieser Bahn, also K der aufsteigende Knoten derselben. Durch die Mittelpunkte F und G der Halbkreise KFK' und KGK' lege man einen grössten Kreis FGH; dieser wird mit seinem Bogen FG den Winkel FKG oder die Neigung ι messen und durch E und p gehen, so dass $FE = Gp = 90^0$, mithin auch

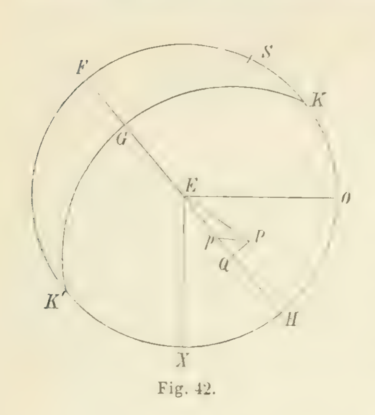


Fig. 42.

$$Ep = FG = \iota \ ,$$

und der nach links gerechnete Winkel

$$OEp = OK + KF + FK'H = \vartheta + 270^0$$

ist.

Eben so hat man, wenn P den Pol der gestörten oder wahren Mondsbahn bezeichnet:

$$EP = J \quad \text{und} \quad OEP = 270^0 + \Theta \ .$$

Nun ist das sphärische Dreieck EpP so klein, dass es hier als eben betrachtet werden kann. Macht man daher noch den Winkel $OEX = 270^0$, wodurch

$$XEp = \vartheta \quad \text{und} \quad XEP = \Theta$$

wird, und projicirt jenes Dreieck rechtwinklig das eine Mal auf EX, das andere Mal auf EO, so kommt:

$$\iota \cos \vartheta + pP \cos EX\,\hat{}\,pP = J \cos \Theta \ ,$$
$$\iota \sin \vartheta + pP \sin EX\,\hat{}\,pP = J \sin \Theta \ .$$

Die Vergleichung dieser Formeln mit (α) giebt aber:

$$pP = h_2 \iota w = 8'48'' = \frac{5^0\,8'\,48''}{35{\cdot}001}$$

und

$$EX^{\wedge}pP = 2\lambda' - \vartheta \ ,$$

also

$$EX^{\wedge}pP - EX^{\wedge}Ep = 2\lambda' - 2\vartheta \ ,$$

d. i.

$$Ep^{\wedge}pP = HpP = 2(\lambda' - \vartheta) = 2KS \ ,$$

wenn S der mittlere Ort der Sonne in der Ekliptik ist.

Es beschreibt demnach der wahre Pol P der Mondsbahn um den mittleren p einen Kreis mit einem Halbmesser, welcher der 35-ste Theil der Entfernung des mittleren Poles p vom Pole E der Ekliptik ist, und mit einer Winkelgeschwindigkeit in Bezug auf die Knotenlinie, welche doppelt so gross als die der Sonne in Bezug auf dieselbe Linie ist. Die auf diese Linie bezogene Umlaufszeit von P um p beträgt daher 173.31 Tage, als die halbe Umlaufszeit der Sonne rücksichtlich der Knoten. Dabei liegt P von p auf der entgegengesetzten Seite von derjenigen, auf welcher E liegt, also nach H hin, wenn die Sonne durch den einen oder den anderen Knoten geht.

Denn für $KS = 0$ oder $= 180^\circ$ wird $HpP = 0$. In diesen Zeitpunkten hat die wahre Neigung EP ersichtlich ihren grössten Werth

$$= 5^\circ\, 8'48'' + 8'48'' = 5^\circ\, 17'36'' \ .$$

Eben so erhellet, dass, wenn die Sonne zwischen den beiden Knoten in der Mitte, also in F oder in H ist, die wahre Neigung am kleinsten

$$= 5^\circ\, 8'48'' - 8'48'' = 5^\circ\, 0'\, 0''$$

ist.

In beiden Fällen ist der Winkel $pEP = 0$, und es coincidirt daher der wahre Knoten mit dem mittleren. Dagegen erreicht dieser Winkel seinen grössten Werth

$$= \frac{pP}{Ep \sin 1''} = \frac{8'48''}{5^\circ\, 8'48'' . \sin 1''} = 1^\circ\, 37'58'' \ ,$$

und es ist folglich der wahre Knoten dem mittleren am weitesten, um $1^\circ\, 38'$, voraus (hinter ihm zurück), wenn die Sonne dem einen oder dem anderen Knoten um 45° vorausgeeilt (hinter ihm um 45° zurück) ist. In diesen letzteren Fällen hat die Neigung ihren mittleren Werth.

Zusatz. Aus den Gleichungen (α) folgt, wenn man sie ähnlicher Weise, wie die Gleichungen (1) ... (4) in §. 32 behandelt:

$$\iota + h_2 \iota w \cos 2(\lambda' - \vartheta) = J \cos(\Theta - \vartheta) \ ,$$

$$h_2 \iota w \sin 2(\lambda' - \vartheta) = J \sin(\Theta - \vartheta) \ .$$

Weil nach der ersten dieser Gleichungen J mit ι, und nach der zweiten $J \sin(\Theta - \vartheta)$ mit ιw, folglich $\Theta - \vartheta$ mit w, von einerlei Ordnung ist, so kann man statt derselben auch schreiben:

$$J - \iota = h_2 \iota w \cos 2(\lambda' - \vartheta) \, ,$$
$$\Theta - \vartheta = h_2 w \sin 2(\lambda' - \vartheta) \, .$$

Hiernach ändern sich die Neigung und die Knotenlänge dergestalt, dass die Ungleichheit der ersteren dem Cosinus, die der letzteren dem Sinus des doppelten Abstandes der Sonne vom aufsteigenden Knoten proportional ist, und dass die erstere Ungleichheit bis 8′48″, die letztere bis 1° 37′58″ anwachsen kann.

Dasselbe fliesst auch leicht aus der obigen Construction. Denn fällt man von P auf Ep das Perpendikel PQ, so ist die Ungleichheit der Neigung gleich

$$EP - Ep = pQ = pP \cos HpP \, ,$$

und die Ungleichheit in der Bewegung der Knotenlinie oder der darauf perpendikularen EP gleich

$$\angle\, HEP = QP : EQ$$

d. i. sehr nahe $\quad = QP : Ep = pP \sin HpP : Ep \, .$

Es war aber $HpP = 2\, KS$, folglich u. s. w.

Neuntes Kapitel.

Von der Bestimmung der Elemente der Mondsbewegung.

§. 143. Im Bisherigen haben wir die Befriedigung gehabt zu sehen, wie mit zu Grunde Legung des Newton'schen Attractionsgesetzes, und wenn wir von dem Störungscoefficienten w auch nur die erste Potenz beibehielten, doch alle schon vor Newton aus Beobachtungen erkannten Mondsstörungen mit ziemlicher Genauigkeit sich entwickeln liessen. Wir nahmen hierbei die elliptischen Elemente des Monds- und des Sonnenlaufes als historisch gegeben an, und substituirten sie in den durch die Theorie erhaltenen Ausdrücken für die Coordinaten des Mondes.

Wie die Elemente einer rein elliptischen Bewegung aus Beobachtungen gefunden werden können, ist in §. 53 gezeigt worden. Offenbar aber kann jene Methode nicht ohne Weiteres auch auf den Mond, eben seiner beträchtlichen Störungen wegen, angewendet werden. Um daher Nichts übrig zu lassen, was nicht unmittelbar, sei es aus der Theorie, oder aus Beobachtungen, geschöpft werden könnte, und somit eine möglichst vollständige Einsicht in die Berechnung der Mondsbewegung zu erlangen, haben wir noch zu lernen, wie die elliptischen Elemente der infolge der Störungen nicht mehr genau elliptischen Bewegung des Mondes durch Beobachtungen sich ermitteln lassen. Ehe dieses aber geschieht, wird es gut sein, die Gründe übersichtlich zusammenzustellen, auf denen unsere Ueberzeugung von der Richtigkeit der analytischen Formeln beruht, die wir, von dem Newton'schen Gesetz ausgehend, für den gestörten Mondslauf gefunden haben.

§. 144. Wenn bei einem sich bewegenden Körper das Gesetz gegeben ist, nach welchem die ihn treibenden Kräfte von seinem jedesmaligen Orte, oder von der Zeit, oder von beiden zugleich abhängen, und wenn nächstdem sein Ort und die Grösse und Richtung seiner Geschwindigkeit für einen gewissen Zeitpunkt gegeben sind, so ist damit sein Ort für jeden Zeitpunkt vollkommen bestimmt (§. 25). Sind daher die Bewegung der Sonne um die Erde und für einen gewissen Zeitpunkt der Ort und die Geschwindigkeit des Mondes, und überdies die Verhältnisse zwischen den Massen von Sonne, Mond und Erde gegeben, so ist damit, und unter der Voraussetzung der Richtigkeit des Newton'schen Gesetzes, die Bewegung des Mondes um die Erde vollkommen bestimmt, und es müssen sich die drei Coordinaten des Mondes als Functionen der Zeit, und dieses nur auf Eine Weise, darstellen lassen. Sind folglich umgekehrt drei Functionen der Zeit, als die Coordinaten des Mondes, gegeben, und besitzen diese erstens die Eigenschaft, dass die aus ihnen nach bekannter Weise herzuleitenden Kräfte einerlei sind mit denen, welche dem Newton'schen Gesetze zufolge stattfinden müssen; lassen sich aber auch zweitens den in den Functionen vorkommenden Constanten solche numerische Werthe beilegen, dass die damit für einen gewissen Zeitpunkt gemachte Bestimmung des Orts und der Geschwindigkeit des Mondes mit derjenigen, welche für denselben Zeitpunkt die Beobachtung unmittelbar giebt, zusammenfällt: so kann man versichert sein, dass diese Functionen, und keine anderen, die richtigen Coordinaten des Mondes sind.

Beiden Forderungen wird nun durch die im Vorigen entwickelten Werthe der Coordinaten r, l und b, und unter der postulirten Beschränkung auf die ersten Potenzen von v, e, e' und ι, Genüge geleistet. Dass die erste Forderung erfüllt ist, geht aus der Vergleichung hervor, welche bei jenen Rechnungen, um die Coefficienten in den angenommenen Formen der Coordinaten zu bestimmen, zwischen den Werthen der Kräfte, welche aus diesen Formen geradezu folgen, und denen, welche das Newton'sche Gesetz giebt, jederzeit angestellt wurde. Die Erfüllbarkeit der zweiten Forderung erhellet daraus, dass, wenn man in den Coordinaten die Störungsglieder weglässt, die Constanten in den übrig bleibenden, eine rein elliptische Bewegung darstellenden Gliedern numerisch immer so bestimmt werden können, dass der Ort und die Geschwindigkeit des Mondes, welche für einen gewissen Zeitpunkt aus den Coordinaten durch Rechnung fliessen, einerlei sind mit denen, welche den Beobachtungen zufolge in demselben Zeitpunkte stattfinden. Es wird daher auch mit Berücksichtigung der Störungsglieder, als welche die nämlichen Constanten enthalten, eine solche Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung durch Annahme etwas veränderter Werthe der Constanten, oder der Mondselemente, immer zu Stande gebracht werden können.

§. 145. Was nun die Methode selbst anlangt, durch welche die Elemente der gestörten Mondsbewegung zu bestimmen sind, so geht aus dem eben Gesagten hervor, dass hierzu eben so, wie bei der rein elliptischen Bewegung, die für einen gewissen Zeitpunkt T_0 durch Beobachtung gefundenen Werthe der drei Coordinaten r, l, b und die Werthe der Geschwindigkeiten r', l', b', mit denen sie sich zu dieser Zeit ändern, hinreichen. Man hat alsdann sechs Gleichungen von der Form:

$$r = R + \delta R, \quad l = L + \delta L, \quad b = B + \delta B,$$
$$r' = R' + \delta R', \quad l' = L' + \delta L', \quad b' = B' + \delta B',$$

wo R, L, B, R', L', B' die für die Zeit T_0 mit den Elementen des Mondes zu berechnenden elliptischen Theile von r, l, ... b'; δR, δL, ... $\delta B'$ aber die Aggregate der hinzukommenden Störungen, und daher durch die Theorie bekannte Functionen von der seit der Epoche bis T_0 verflossenen Zeit, von den Mondselementen und von den als bekannt vorauszusetzenden Elementen der Sonnenbewegung sind.

Man berechne nun zuerst mit r, l, ... b', wie bei einer rein elliptischen Bewegung, nach der Methode in §. 53 die sechs Elemente des Mondes. Da man hierzu die Grössen R, L, ... B' hätte

nehmen sollen, und diese von r, l, ... b' um δR, δL, ... $\delta B'$ unterschieden sind, so werden die gefundenen Elemente kleine Fehler von der Ordnung w enthalten. Mit diesen Elementen berechne man die Störungen δR, δL, ... Die somit sich ergebenden Werthe, welche δR_1, δL_1, ... heissen mögen, werden bis auf die erste Potenz von w incl. richtig sein, und wenn man daher mit $r - \delta R_1$, $l - \delta L_1$, ..., statt mit $r - \delta R$, $l - \delta L$, ... oder R, L, ..., die Elemente nach der gedachten Methode von Neuem berechnet, so werden die Fehler derselben nur noch von der Ordnung w^2 sein. Durch Wiederholung desselben Verfahrens und unter der Voraussetzung, dass δR, δL, ... selbst bis zur Ordnung w^2 genau entwickelt sind, wird man hierauf die Elemente nur noch mit Fehlern von der Ordnung w^3 behaftet finden. Eine abermalige Wiederholung der Rechnung giebt die Elemente bis auf Abweichungen von der Ordnung w^4 genau, u. s. w.

§. 146. Zu diesem Verfahren, die Elemente des Mondslaufes zu bestimmen, ist es aber nöthig noch folgende Bemerkungen hinzuzufügen.

1) Bei der in §. 53 erklärten und hier zu Grunde gelegten Methode, die Elemente eines Planeten zu bestimmen, wurde die Formel $k^2 = n^2 a^3$ mit angewendet, worin k^2 eine von einem Planeten zum anderen so gut als constante Zahl bezeichnet. Es ist nämlich (§§. 62 und 65)

$$k^2 = K(M + m) ,$$

wo K eine für jedes Paar sich anziehender Körper gleich grosse Zahl, und M und m die Massen dieser zwei Körper im Vergleich zur Sonnenmasse bedeuten, wenn letztere als Einheit der Masse bei Bestimmung der Zahl K zum Grunde gelegt worden ist. In §. 53 ist daher $M + m$ eine die Einheit äusserst wenig übertreffende Zahl. Im Gegenwärtigen aber sind M und m die Massen von Erde und Mond, und es muss daher ausser den drei Coordinaten und ihren Geschwindigkeiten noch ein siebentes Stück, nämlich die Summe der Massen von Erde und Mond im Vergleich zur Sonnenmasse, gegeben sein. Statt auf die Ermittelung dieser Massensumme auszugehen, wird es aber einfacher sein, beim Gebrauch der Methode des §. 53 die Formel

$$k^2 = n^2 a^3$$

ganz zu beseitigen und dafür den Werth von n geradezu durch Beobachtungen zu bestimmen zu suchen, was mit einem vorläufig hinreichenden Grade von Genauigkeit schon dadurch geschehen kann,

dass man zwei der Zeit nach sehr weit, um ein Jahrzehnt oder Jahrhundert, von einander entfernte Beobachtungen der wahren Länge des Mondes mit einander vergleicht, und den ganzen während dessen durchlaufenen Weg durch die Zwischenzeit dividirt. Mit der so bestimmten mittleren Bewegung n findet sich hierauf a durch Auflösung der cubischen Gleichung:

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{u^2}{n^2 a^3} .$$

2) Die bei diesen Rechnungen sich ergebenden Werthe der mit der Zeit proportional sich ändernden Elemente ω und ϑ gehören dem Zeitpunkte T_0 an. Die Geschwindigkeiten, mit denen diese Aenderungen vor sich gehen, sind gegebene Functionen des Verhältnisses $n' : n$, und man wird somit die zwei wahren Längen, die man zur Bestimmung von n angewendet hat, in mittlere, die man statt der wahren hätte brauchen sollen, näherungsweise verwandeln und damit einen genaueren Werth von n finden können. Ueberhaupt sieht man hieraus, wie mit der allmählichen Verbesserung der sechs Elemente a, ε, ... ϑ gleichzeitig auch die als siebentes Element zu betrachtende Grösse n sich berichtigen lässt.

Wenn übrigens das jetzt zur Elementenbestimmung angewendete Verfahren für die Praxis auch nicht das geeignetste ist, und man insbesondere wegen der kleinen Fehler, womit alle Beobachtungen behaftet sind, ausser der hier vorausgesetzten Beobachtung zur Zeit T_0 und den zwei Beobachtungen, welche zur Bestimmung von n dienen sollen, noch eine möglichst grosse Anzahl zu anderen Zeitpunkten gehöriger Beobachtungen benutzen wird, so wird das Gesagte doch hinreichen, um von der Möglichkeit solcher Rechnungen und ihrer Beschaffenheit im Allgemeinen einen Begriff zu verschaffen.

§. 147. Ganz besonders ist noch hervorzuheben, dass nach den für die drei Coordinaten des Mondes hier entwickelten Ausdrücken, und selbst nach den viel weiter gehenden Entwickelungen von Laplace und Anderen, bloss die Länge des Perihels und die Länge des aufsteigenden Knotens der Zeit proportionalen Aenderungen unterworfen sind, während die übrigen Elemente constant bleiben, — abgesehen von den kleinen Variationen, welche durch die Aenderung der Excentricität der Erdbahn in der mittleren Bewegung des Mondes und seiner davon abhängenden mittleren Entfernung, sowie in der gleichförmigen Bewegung seiner Apsiden und Knoten, hervorgebracht werden (§. 134). — Namentlich ist daher die Neigung der Mondsbahn gegen die Erdbahn vollkommen con-

stant, obgleich man vermuthen möchte, dass diese Neigung wegen der nicht ganz constanten Lage der Erdbahn gleichfalls kleine Aenderungen erlitte; allein, wie Laplace durch die Theorie, übereinstimmend mit den Beobachtungen aller Zeiten, gezeigt hat, wird bei sich ändernder Lage der Erdbahn die Mondsbahn durch die Wirkung der Sonne unaufhörlich zu derselben Neigung gegen die Erdbahn zurückgebracht.

§. 148. Es ist schon in §. 129 auf die Schwierigkeiten aufmerksam gemacht worden, welche mit einer den Beobachtungen genügenden theoretischen Entwickelung der Coefficienten für die einzelnen Störungsgleichungen verbunden sind. Als man daher nach den ersten von Clairaut, Euler und d'Alembert angestellten Versuchen, die Ungleichheiten des Mondslaufes bloss durch die Theorie zu bestimmen, die Erfahrung gemacht hatte, dass die hiernach berechneten Tafeln von den Beobachtungen zu Zeiten noch bedeutend abwichen, so begnügte man sich, die Theorie mehr zur Entwickelung der Argumente der Gleichungen zu benutzen, die Coefficienten aber durch Vergleichung der somit bloss ihrer Form nach bekannten Gleichungen mit so viel als möglich Beobachtungen zu bestimmen. Auf solche Weise entstanden die vortrefflichen Mondstafeln von Tobias Mayer,*) Mason, Bürg und Burckhardt, von denen die des letzteren noch gegenwärtig**) zur Vorausberechnung des Mondslaufes in den *Berliner astronomischen Jahrbüchern* und in der *Connaissance des Temps* des Pariser Längenbureau gebraucht werden.

Ungeachtet der grossen Vollkommenheit dieser Tafeln musste aber die Theorie des Mondes so lange noch unvollkommen erscheinen, als man der Beobachtungen zu etwas Weiterem als den sechs oder sieben Elementen der Bewegung benöthigt war. Die Akademie der Wissenschaften zu Paris setzte daher im Jahre 1820 einen Preis auf eine Mondstheorie, bei welcher nur jene Elemente aus den Beobachtungen, alles Uebrige aber aus dem Gesetze der allgemeinen Schwere hergeleitet wäre. Zwei Theorieen erhielten den Preis: die eine von Plana und Carlini, die andere von Damoiseau. Letztere hat ihr Verfasser mit den hier zu Grunde gelegten Tafeln***) be-

*) nach dem Tode des Verfassers vom englischen Parlamente mit einem Preise von 3000 £ gekrönt. A. d. H.

**) d. h. bis zum Erscheinen der Hansen'schen Mondstafeln im Jahre 1857. A. d. H.

***) [Plana, *Théorie du mouvement de la Lune*, 3 Tomes, Turin 1832. Damoiseau, *Mémoire sur la théorie de la Lune*, in den *Mémoires des Savans étrangers*, Bd. I. 1827.] *Tables de la Lune, formées par la seule théorie de l'attraction*,... par Damoiseau, ... Paris 1828.

gleitet, die zu ihrer gänzlichen Vollendung nur wenig zu wünschen übrig lassen.

Noch eine Mondstheorie ist im Jahre 1838 von Hansen erschienen: *Fundamenta nova investigationis orbitae verae, quam luna perlustrat*, etc. Ihr Verfasser hat sich darin höchst scharfsinniger und von den früheren ganz verschiedener Methoden bedient, um die so mühevolle Rechnung zu vereinfachen. Auch hat er nach diesen Methoden berechnete Tafeln versprochen, die aber bis jetzt noch erwartet werden.*)

Eine nähere Angabe der Eigenthümlichkeiten dieser verschiedenen Methoden würde hier nicht am Orte sein, da sie auf Kunstgriffen der höheren Analysis beruhen, die ich bei meinen Lesern nicht habe voraussetzen wollen. Statt dessen will ich zum Schlusse dieses Abschnittes die Elemente, nach denen Damoiseau seine Mondstafeln berechnet hat, und die vorzüglicheren Gleichungen der Länge, der Horizontalparallaxe unter dem Aequator und der Breite nach denselben Tafeln hier noch zusammenstellen.

§. 149. Bezeichnet, wie im Obigen, λ die mittlere Länge des Mondes, α seine mittlere Anomalie und ϑ die Länge seines aufsteigenden Knotens, und wird jede Länge vom mittleren Frühlingsäquinoctialpunkte an gerechnet, so ist nach Damoiseau's Tafeln für die mittlere Pariser Mitternacht, welche den 31. December vom 1. Januar 1801 trennt, als Epoche:

$$\lambda = 111^\circ 36' 42''8 \,,$$
$$\alpha = 205\ \ 29\ \ 58{\cdot}4 \,,$$
$$\vartheta = 13\ \ 54\ \ 54{\cdot}2 \,.$$

In 100 julianischen Jahren, d. i. in 36525 Tagen, beträgt das Wachsthum

von λ ... 1336 Umkreise $+ 307^\circ 52' 41''6$,

von α ... 1325 Umkreise $+ 198\ \ 49\ \ 55{\cdot}0$;

ϑ aber nimmt ab, oder die Knoten gehen rückwärts, um

5 Umkreise $+ 134^\circ\ \ 9' 57''5$.

---

*) *Tables de la Lune, construites d'après le principe Newtonien de la gravitation universelle, par P. A. Hansen (imprimées aux frais du gouvernement Britannique)*. Londres 1857. *Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen*, von P. A. Hansen. Zwei Abhandlungen in den *Schriften der K. Sächs. Gesellschaft der Wiss.* Leipzig 1862 u. 1864. Eine weitere umfangreiche Mondtheorie rührt von Delaunay her, welcher in den *Memoiren der Pariser Akademie* T. 28 u. 29, 1860 u. 1867, seine *Théorie du Mouvement de la Lune* hat erscheinen lassen. Leider ist die Vollendung des Werkes durch den Tod des Verfassers vereitelt worden. A. d. H.

Hierzu kommen noch die Säculargleichungen

$$\text{von } \lambda \ldots \; 10''8786 \,.\, t^2 + 0''015981 \,.\, t^3 \;,$$
$$\text{von } \alpha \ldots \; 50{\cdot}0592 \,.\, t^2 + 0{\cdot}073539 \,.\, t^3 \;,$$
$$\text{von } \vartheta \ldots \; 6{\cdot}6690 \,.\, t^2 + 0{\cdot}009797 \,.\, t^3 \;,$$

wo t die Anzahl der seit der Epoche verflossenen Jahrhunderte ist.

Endlich sind, wenn λ' und α' die mittlere Länge und die mittlere Anomalie der Sonne bedeuten, zur Zeit der Epoche:

$$\lambda' = 280^0 \; 9' 32''0 \;,$$
$$\alpha' = \;\; 0 \; 39 \;\; 7{\cdot}0 \;,$$

und es beträgt das hundertjährige Wachsthum

$$\text{von } \lambda' \ldots \; 100 \text{ Umkreise} + \;\; 0^0 45' 53''0 \;,$$
$$\text{von } \alpha' \ldots \; 99 \text{ Umkreise} + 359 \;\; 2 \; 43{\cdot}0 \;.$$

Hiermit kann man die Werthe von λ, α, ϑ, λ' und α' für jeden gegebenen Zeitpunkt berechnen. Die wahre in der Ekliptik gezählte Länge des Mondes ist alsdann, wenn man der Kürze willen

$$\lambda - \lambda' = \delta \quad \text{und} \quad \lambda - \vartheta = \zeta$$

setzt:

$$\begin{aligned}
\lambda & + 6^0 17' 19''7 \sin \alpha \\
& + \quad 12 \; 48{\cdot}8 \sin 2\alpha \\
& + \qquad 36{\cdot}1 \sin 3\alpha \\
& + 1 \; 16 \; 28{\cdot}2 \sin (2\delta - \alpha) \\
& + \qquad 31{\cdot}0 \sin (4\delta - 2\alpha) \\
& - \quad 2 \;\; 2{\cdot}1 \sin \delta \\
& + \quad 39 \; 29{\cdot}7 \sin 2\delta \\
& - \quad 11 \; 13{\cdot}0 \sin \alpha' \\
& - \quad 6 \; 51{\cdot}8 \sin 2\zeta \\
& - \quad 3 \; 31{\cdot}9 \sin (2\alpha - 2\delta) \\
& + \quad 3 \; 12{\cdot}2 \sin (2\delta + \alpha) \\
& + \quad 3 \; 26{\cdot}7 \sin (2\delta - \alpha' - \alpha) \\
& + \quad 2 \; 45{\cdot}5 \sin (2\delta - \alpha') \\
& + \quad 2 \; 28{\cdot}0 \sin (\alpha - \alpha') \\
& - \quad 1 \; 49{\cdot}4 \sin (\alpha + \alpha') \\
& - \qquad 45{\cdot}2 \sin (2\zeta + \alpha) \\
& - \qquad 39{\cdot}4 \sin (2\zeta - \alpha) \\
& - \qquad 56{\cdot}5 \sin (2\zeta - 2\delta) \\
& + \qquad 38{\cdot}5 \sin (4\delta - \alpha) \\
& - \qquad 29{\cdot}0 \sin (2\delta + \alpha' - \alpha) \\
& - \qquad 24{\cdot}6 \sin (2\delta + \alpha') \;,
\end{aligned}$$

wozu noch 65 andere Gleichungen kommen, nämlich 6, deren Coefficienten zwischen 20″ und 10″ fallen, und 59, deren Coefficienten kleiner als 10″ sind. Die hier mitgetheilten 21 Gleichungen reichen daher nur hin, um die wahre Länge bis auf etwa eine halbe Minute genau zu finden. Die drei ersten derselben machen die Mittelpunktsgleichung aus, die vierte und fünfte die Evection; die sechste ist die parallaktische Gleichung (§. 111), die siebente die Variation, die achte die jährliche Gleichung. Die neunte Gleichung ist die vorzüglichste unter denen, durch welche die Länge des Mondes in seiner Bahn auf die Ekliptik reducirt wird (§. 48, Anm.).

Die Horizontalparallaxe ist nach denselben Tafeln:

$$
\begin{aligned}
57'0''9 + 3'\ 6''5 &\cos\alpha \\
+\ 10{\cdot}2 &\cos 2\alpha \quad \text{(Mittelpunktsgleichung)} \\
+\ 34{\cdot}4 &\cos(2\delta - \alpha) \\
+\ 3{\cdot}1 &\cos(2\delta + \alpha) \quad \text{(§. 121)} \\
-\ 1{\cdot}0 &\cos\delta \\
+\ 28{\cdot}5 &\cos 2\delta \quad \text{(§. 111)} \\
+\ 1{\cdot}9 &\cos(2\delta - \alpha') \quad \text{(§. 111)} \\
+\ 1{\cdot}4 &\cos(2\delta - \alpha' - \alpha) \\
+\ 1{\cdot}2 &\cos(\alpha - \alpha')
\end{aligned}
$$

+ noch 13 anderen Gleichungen, deren Coefficienten $< 1''$.

Bezeichnet man endlich mit A, Δ, Z die Werthe von α, δ, ζ, nachdem man zu jedem der letzteren die Summe der Gleichungen der Länge hinzugefügt hat, so ist die Breite des Mondes

$$
\begin{aligned}
5^\circ 8' 59''8 &\sin Z \\
+\ 8'\ 47{\cdot}8 &\sin(2\Delta - Z) \quad \text{(§. 140)} \\
+\ 25{\cdot}8 &\sin(2A - Z) \\
+\ 22{\cdot}0 &\sin(2\Delta - Z - \alpha') \\
+\ 23{\cdot}8 &\sin(Z + \alpha') \\
-\ 25{\cdot}1 &\sin(Z - \alpha')
\end{aligned}
$$

+ 13 Gleichungen, deren Coefficienten $< 20''$.

Anmerkung. Unter den wegen ihrer Kleinheit hier weggelassenen Gleichungen sind besonders zwei merkwürdig, welche von der abgeplatteten Gestalt der Erde herrühren (§. 71, zu Ende). Die eine, welche die Länge betrifft, ist gleich 7″3, multiplicirt in den Sinus der Länge des aufsteigenden Knotens; die andere, eine Gleichung der Breite, ist gleich — 8″6, multiplicirt in den Sinus der wahren Länge des Mondes. Die Coefficienten dieser Gleichungen, und zwar jeder von ihnen für sich, können, wenn sie geradezu aus Beobachtungen bestimmt werden, zur Ermittelung der Abplattung dienen.

Bürg fand aus einer grossen Anzahl von Beobachtungen die Coefficienten $= 6''8$ und $= -8''0$, woraus Laplace die Abplattung resp. $= \frac{1}{305{\cdot}05}$ und $= \frac{1}{304{\cdot}6}$ folgerte, zwei Resultate, die nicht nur sehr nahe unter sich, sondern auch mit der aus Gradmessungen geschlossenen Abplattung übereinstimmen. Damoiseau, welcher seine Coefficienten theoretisch bestimmt hat, muss hiernach eine grössere Abplattung, $= \frac{1}{294}$, wie ich sie aus seinen Coefficienten nach den Formeln in der *Méc. cél.* Tome III, pag. 251 etc. finde, zu Grunde gelegt haben.

Anmerkung des Herausgebers. Den Hansen'schen Mondtafeln entnehmen wir die folgenden numerischen Werthe, welche für 1800 Jan. 0.0 mittl. Zeit Greenwich, d. h. für den Mittag des 31. Decbr. 1799 gelten:

$$\lambda = 335^0\,43'\,26''70 + (13 \times 360^0 + 477644''1961)\,100t + 13''301\,t^2 + 0''013473\,t^3\;,$$
$$\alpha = 110^0\,19'\,33''64 + (13 \times 360^0 + 331158''3715)\,100t + 49''435\,t^2 + 0''050073\,t^3,$$
$$\vartheta = 33^0\,16'\,31''15 - 69629''3961 \times 100t + 8''189\,t^2 + 0''007159\,t^3\;,$$
$$\lambda' = 279^0\,54'\,49''65 + (360^0 + 27''6630)\,100t + 1''1098\,t^2\;,$$
$$\alpha' = 0^0\,24'\,28''22 + (360^0 - 33''9218)\,100t - 0''5612\,t^2\;.$$

Zur Reduction auf die Epoche der Damoiseau'schen Tafeln ist folglich $t = \frac{365{\cdot}4935}{36525}$ zu substituiren. Für Excentricität und Neigung des Mondes setzt Hansen

$$e = 0{\cdot}05490807\;, \qquad J = 5^0\,8'\,39''96\;,$$

für die in den obigen Längen enthaltene allgemeine Präcession:

$$+\,50''2230 \times 100t + 1''121\,t^2\;.$$

Um die gestörten Werthe der Mondcoordinaten bei Hansen und Damoiseau bequem vergleichen zu können*), bedienen wir uns des in den *Berichten der Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften* vom 12. Decbr. 1863 (Hansen, *Analyse der ecliptischen Tafeln*, S. 144 flg.) enthaltenen Ausdruckes für die gestörte Länge l in der Bahn, in welchem alle Glieder $< 2''$, nebst den Ungleichheiten sehr langer Periode, weggelassen worden sind:

$$\begin{aligned} l = \lambda &+ 8''\sin\vartheta \\ &+ 22639\,\sin\alpha \\ &+ 770\,\sin 2\alpha \\ &+ 36\,\sin 3\alpha \\ &+ 2\,\sin 4\alpha \\ &- 8\,\sin(2\alpha + \alpha') \\ &- 110\,\sin(\alpha + \alpha') \\ &- 668\,\sin\alpha' \\ &+ 148\,\sin(\alpha - \alpha') \\ &+ 10\,\sin(2\alpha - \alpha') \\ &- 8\,\sin 2\alpha' \\ &+ 3\,\sin(\alpha - 2\alpha') \end{aligned}$$

*) Hansen hat selbst eine derartige Vergleichung in §. 10 seiner »*Darlegung*« vorgenommen.

$$\begin{aligned}
&- \quad 2'' \sin(2\delta - \alpha + 2\alpha') \\
&+ \quad 3 \sin(2\delta - 2\alpha + \alpha') \\
&- \quad 29 \sin(2\delta - \alpha + \alpha') \\
&- \quad 25 \sin(2\delta + \alpha') \\
&- \quad 3 \sin(2\delta + \alpha + \alpha') \\
&+ \quad 13 \sin(2\delta - 3\alpha) \\
&+ \quad 212 \sin(2\delta - 2\alpha) \\
&+ \quad 4583 \sin(2\delta - \alpha) \\
&+ \quad 2393 \sin 2\delta \\
&+ \quad 195 \sin(2\delta + \alpha) \\
&+ \quad 15 \sin(2\delta + 2\alpha) \\
&+ \quad 9 \sin(2\delta - 2\alpha - \alpha') \\
&+ \quad 206 \sin(2\delta - \alpha - \alpha') \\
&+ \quad 167 \sin(2\delta - \alpha') \\
&+ \quad 15 \sin(2\delta + \alpha - \alpha') \\
&+ \quad 7 \sin(2\delta - \alpha - 2\alpha') \\
&+ \quad 8 \sin(2\delta - 2\alpha') \\
&+ \quad 31 \sin(4\delta - 2\alpha) \\
&+ \quad 39 \sin(4\delta - \alpha) \\
&+ \quad 14 \sin 4\delta \\
&+ \quad 2 \sin(4\delta + \alpha) \\
&+ \quad 3 \sin(4\delta - 2\alpha - \alpha') \\
&+ \quad 4 \sin(4\delta - \alpha - \alpha') \\
&+ \quad 18 \sin(\delta + \alpha') \\
&- \quad 19 \sin(\delta - \alpha) \\
&- \quad 126 \sin \delta \\
&- \quad 9 \sin(\delta + \alpha) \\
&- \quad 3 \sin(3\delta - \alpha) \\
&- \quad 84 \sin(2\zeta - \alpha) \\
&- \quad 3 \sin(2\zeta - 2\delta + \alpha') \\
&+ \quad 7 \sin(2\zeta - 2\delta - \alpha) \\
&- \quad 81 \sin(2\zeta - 2\delta) \\
&- \quad 9 \sin(2\zeta - 2\delta + \alpha) \\
&+ \quad 2 \sin(2\zeta - 2\delta - \alpha') \,.
\end{aligned}$$

Die in der Ekliptik gezählte wahre Länge L des Mondes ergiebt sich hieraus durch die Gleichung

$$L = l + R \,,$$

wo

$$\begin{aligned}
R = &- \quad 2'' \sin \alpha' \\
&+ \quad 3 \sin(2\delta - \alpha) \\
&- \quad 23 \sin 2\delta \\
&- \quad 3 \sin(2\delta + \alpha)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ 45'' \sin(2\zeta - \alpha) \\
&- 410 \sin 2\zeta \\
&- 45 \sin(2\zeta + \alpha) \\
&- 4 \sin(2\zeta + 2\alpha) \\
&+ 26 \sin(2\zeta - 2\delta) \\
&+ 9 \sin(2\zeta - 2\delta + \alpha) \\
&- 9 \sin(2\zeta + 2\delta - \alpha) \\
&- 6 \sin(2\zeta + 2\delta)
\end{aligned}
$$

die sogenannte Reduction auf die Ekliptik bezeichnet.

Die Breite B des Mondes erhält Hansen mittelst der Formel

$$\sin B = \sin J \sin(l - \vartheta) + s$$

und bestimmt die Störungen s durch (*Mondtafeln* S. 12, *Darlegung* Art. 141):

$$
\begin{aligned}
s = &- 8''8 \sin(l - 10^0 9') \\
&- 0{\cdot}6 \sin(\zeta - \alpha + \alpha') \\
&+ 23{\cdot}6 \sin(\zeta + \alpha') \\
&+ 1{\cdot}3 \sin(\zeta + \alpha + \alpha') \\
&- 1{\cdot}3 \sin(\zeta - 3\alpha) \\
&- 24{\cdot}8 \sin(\zeta - 2\alpha) \\
&+ 21{\cdot}8 \sin(\zeta - \alpha) \\
&+ 6{\cdot}4 \sin \zeta \\
&- 1{\cdot}1 \sin(\zeta + \alpha) \\
&+ 1{\cdot}8 \sin(\zeta - \alpha + \alpha') \\
&- 24{\cdot}8 \sin(\zeta - \alpha') \\
&- 1{\cdot}4 \sin(\zeta + \alpha - \alpha') \\
&+ 0{\cdot}8 \sin(\zeta - 2\delta - \alpha - \alpha') \\
&+ 11{\cdot}2 \sin(\zeta - 2\delta - \alpha') \\
&- 2{\cdot}0 \sin(\zeta - 2\delta - 2\alpha) \\
&- 30{\cdot}6 \sin(\zeta - 2\delta - \alpha) \\
&- 522{\cdot}6 \sin(\zeta - 2\delta) \\
&+ 44{\cdot}0 \sin(\zeta - 2\delta + \alpha) \\
&+ 5{\cdot}5 \sin(\zeta - 2\delta + 2\alpha) \\
&- 1{\cdot}6 \sin(\zeta - 2\delta - \alpha + \alpha') \\
&- 22{\cdot}8 \sin(\zeta - 2\delta + \alpha') \\
&+ 1{\cdot}8 \sin(\zeta - 2\delta + \alpha + \alpha') \\
&- 0{\cdot}8 \sin(\zeta - 2\delta + 2\alpha') \\
&+ 0{\cdot}8 \sin(3\zeta - 2\delta) \\
&- 3{\cdot}5 \sin(\zeta - 4\delta) \\
&- 6{\cdot}0 \sin(\zeta - 4\delta + \alpha) \\
&+ 0{\cdot}5 \sin(\zeta - \delta - \alpha) \\
&- 0{\cdot}8 \sin(\zeta - \delta) \\
&- 0{\cdot}8 \sin(\zeta - \delta + \alpha) \\
&+ 0{\cdot}6 \sin(\zeta + \delta - \alpha),
\end{aligned}
$$

wenn die Glieder $< 0''5$ vernachlässigt werden.

Die Aequatoreal-Horizontalparallaxe des Mondes endlich wird (*Berichte* S. 165):

$$\begin{array}{rl}
\pi = & +\,3422''3 \\
+ & 186{\cdot}5 \cos \alpha \\
+ & 10{\cdot}2 \cos 2\alpha \\
+ & 0{\cdot}6 \cos 3\alpha \\
- & 1{\cdot}0 \cos (\alpha + \alpha') \\
- & 0{\cdot}4 \cos \alpha' \\
+ & 1{\cdot}2 \cos (\alpha - \alpha') \\
- & 0{\cdot}2 \cos (2\delta - \alpha + \alpha') \\
- & 0{\cdot}3 \cos (2\delta + \alpha') \\
- & 0{\cdot}1 \cos (2\delta - 3\alpha) \\
- & 0{\cdot}3 \cos (2\delta - 2\alpha) \\
+ & 34{\cdot}3 \cos (2\delta - \alpha) \\
+ & 28{\cdot}4 \cos 2\delta \\
+ & 3{\cdot}1 \cos (2\delta + \alpha) \\
+ & 0{\cdot}3 \cos (2\delta + 2\alpha) \\
+ & 1{\cdot}5 \cos (2\delta - \alpha - \alpha') \\
+ & 1{\cdot}9 \cos (2\delta - \alpha') \\
+ & 0{\cdot}2 \cos (2\delta + \alpha - \alpha') \\
+ & 0{\cdot}4 \cos (4\delta - 2\alpha) \\
+ & 0{\cdot}6 \cos (4\delta - \alpha) \\
+ & 0{\cdot}3 \cos 4\delta \\
+ & 0{\cdot}1 \cos (\delta + \alpha') \\
- & 1{\cdot}0 \cos \delta \\
- & 0{\cdot}1 \cos (\delta + \alpha) \\
- & 0{\cdot}7 \cos (2\zeta - \alpha) \\
- & 0{\cdot}1 \cos (2\zeta - 2\delta)\ ;
\end{array}$$

während die Sonnenparallaxe durch

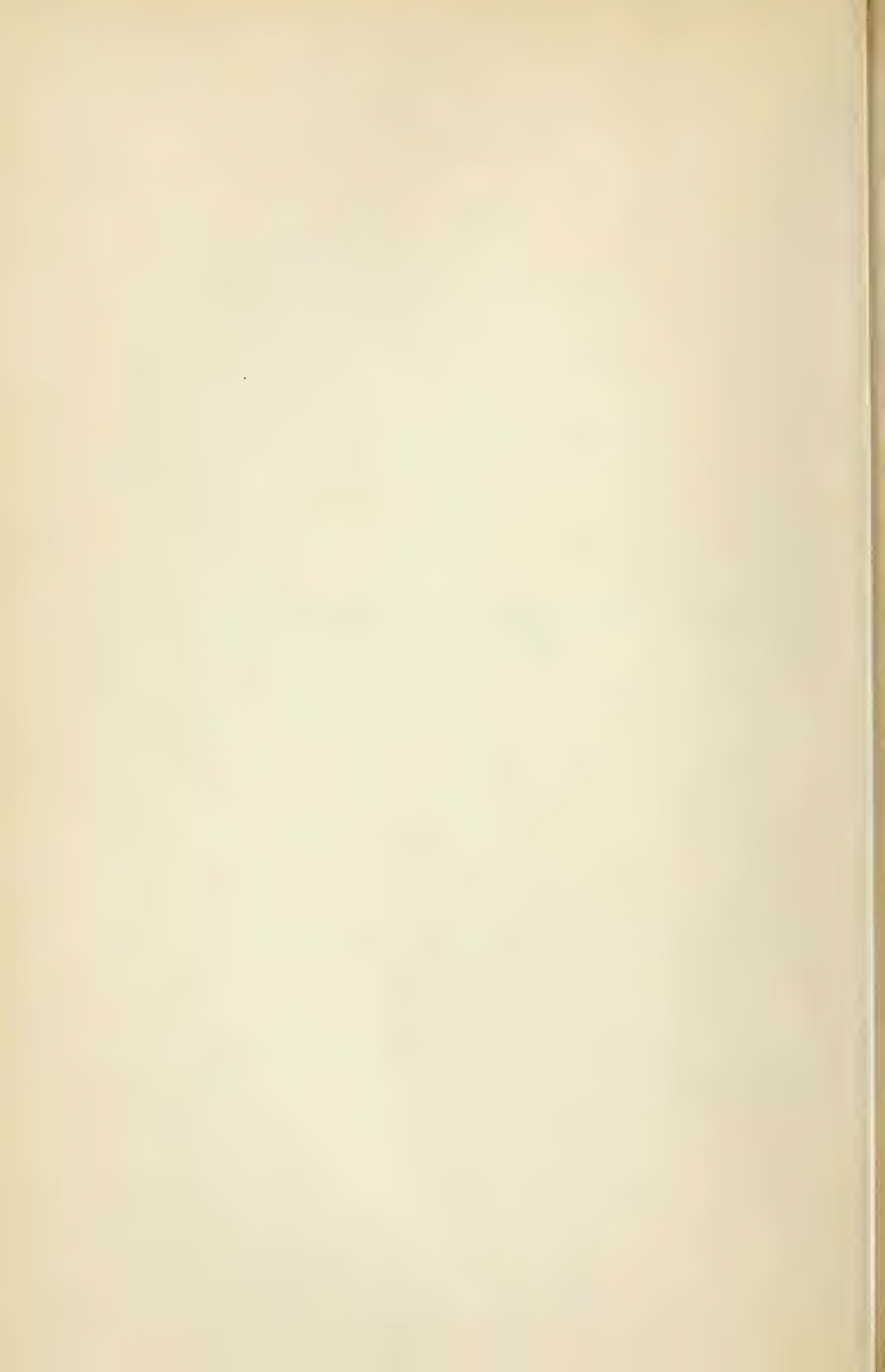
$$\pi' = 8''9 + 0''2 \cos \alpha'$$

gegeben ist.

Die beiden Glieder $+\,8'' \sin \vartheta$ in der Länge und $-\,8''8 \sin (l - 10^\circ 9')$ in der Breite, welche von der Abplattung der Erde abhängen, finden sich in den §§. 11 und 21 der »*Darlegung*« ausführlich behandelt (wozu Art. 14 und 15 zu vergleichen sind): sie entsprechen nach Hansen einer Abplattung von $\frac{1}{296}$. Vergl. Helmert, *Geodäsie* Bd. II, Cap. 6, §§. 6 und 7. Eine neuere Arbeit von G. W. Hill über die in Rede stehenden Ungleichheiten führt den Titel: *Determination of the inequalities of the Moon's motion which are produced by the figure of the earth: a supplement to Delaunay's lunar theory,* Washington 1884 (*Astronom. Papers* III, 2). A. d. H.

Vierter Abschnitt.

Von den gegenseitigen Störungen der Planeten.



Erstes Kapitel.

Von den Störungen, welche von den Excentricitäten und der Neigung unabhängig sind.

§. 150. Fast keine Aufgabe hat den Astronomen grössere Schwierigkeiten entgegengestellt, als die Entwickelung der Störungen, welche der Mond durch die Sonne erleidet. Der Grund hiervon ist hauptsächlich die Grösse der störenden Kraft, die bis zum 89-sten Theile der Hauptkraft, welche den Mond nach der Erde zieht, anwachsen kann (§. 103). Ungleich geringer sind die störenden Kräfte, welche die Planeten auf einander ausüben, im Vergleich zu den Kräften, welche sie um die Sonne zu kreisen nöthigen. Obgleich daher das im Vorigen angewendete Verfahren, um die Mondsstörungen zu berechnen, für die wirkliche Ausführung, wo eine die Beobachtungen befriedigende Genauigkeit erzielt werden soll, keineswegs das geeignetste ist und nur deshalb befolgt wurde, weil es am leichtesten verständlich war, so wird doch dasselbe Verfahren bei den Störungen der Planeten, wenigstens der älteren, deren Excentricitäten und Neigungen durchschnittlich nur gering sind, fast vollkommen Genüge leisten und uns alle wahrnehmbaren kleinen Abweichungen von der elliptischen Bewegung leicht finden lassen, — mit Ausnahme einiger weniger, zu deren Erforschung eine tiefer gehende Rechnung nöthig ist.

§. 151. Auch bei der Theorie der Planeten werden uns die drei für das Problem der drei Körper in §. 95 gefundenen Grundformeln

$$T = -\frac{K(M+m)}{r^2} + Km' \,.\, P \;,$$

$$V = Km' \,.\, Q \;, \qquad W = Km' \,.\, R$$

als Ausgangspunkt dienen. In ihnen bedeuten jetzt M, m und m' die Massen der Sonne, des gestörten Planeten und des störenden;

P, Q und R sind Grössen, die auf eine aus §. 95 zu ersehende Weise von den Radien Vectoren r, r' der Planeten m, m', ihren heliocentrischen Längen l, l', beide in der Bahn von m gerechnet, und der heliocentrischen Breite b' von m' in Bezug auf dieselbe Bahn abhängen; T, V und W endlich sind die drei auf m nach den ebendaselbst angegebenen Richtungen wirkenden Kräfte. Die in ihren Ausdrücken mit m' multiplicirten Glieder sind die störenden Kräfte, und das Glied von T, welches $M+m$ zum Factor hat, ist die den Planeten m nach der Sonne treibende Kraft. Der Grund, aus welchem die ersteren gegen diese letztere jetzt sehr gering sind, ist die ausserordentliche Kleinheit von m' gegen M, während bei der Störung des Mondes durch die Sonne die, im Verhältnisse zur Entfernung des Mondes von der Erde, sehr grosse gegenseitige Entfernung beider Körper die Ursache war, weshalb die störende Kraft gegen die Hauptkraft, welche die Bewegung des Mondes regulirte, so gering ausfiel.

§. 152. Bezeichne n die mittlere Bewegung von m, und zwar zur Zeit der Epoche, dafern sich diese Bewegung nicht völlig constant finden sollte. Die zu n nach der elliptischen Theorie gehörige mittlere Entfernung des Planeten m von der Sonne sei a, also

$$K(M+m) = n^2 a^3 .$$

Die Substitution des hieraus folgenden Werthes von K in die Gleichungen für T, V, W giebt:

$$T = -\frac{n^2 a^3}{r^2} + \frac{m'}{M+m} \cdot n^2 a^3 P ,$$

$$V = \frac{m'}{M+m} \cdot n^2 a^3 Q ,$$

$$W = \frac{m'}{M+m} \cdot n^2 a^3 R .$$

Nun sind $\frac{m}{M}$ und $\frac{m'}{M}$ sehr kleine Brüche, von denen, besondere Fälle ausgenommen, ihr Product, so wie die zweite und die höheren Potenzen immer vernachlässigt werden können. Setzt man daher noch die Masse der Sonne $M = 1$, so kann man für $\frac{m'}{M+m}$ schlechthin m' schreiben, und die Formeln werden, wenn man sie noch, wie in §. 99, mit $n^2 a$ dividirt und

$$\frac{T}{n^2 a} = T_1 , \qquad \frac{V}{n^2 a} = V_1 , \qquad \frac{W}{n^2 a} = W_1$$

setzt, d. h. diejenige Kraft ($= n^2 a$) zur Einheit nimmt, welche einen in der Entfernung a von der Sonne befindlichen Körper um letztere einen Kreis mit der Winkelgeschwindigkeit n zu beschreiben nöthigt:

$$T_1 = -\frac{a^2}{r^2} + m' a^2 P, \qquad V_1 = m' a^2 Q, \qquad W_1 = m' a^2 R.$$

§. 153. Zunächst sind nun in diesen Formeln für P, Q, R ihre durch die Coordinaten r, l, r', l', b' ausgedrückten Werthe zu setzen. Es besteht aber jede dieser Coordinaten aus zwei Theilen, von denen der eine rein elliptisch ist, der andere die Störungen enthält und daher m' zum Factor hat. Da nun von m' bloss die erste Potenz beibehalten werden soll, so reicht es hin, in P, Q, R bloss die elliptischen Theile der Coordinaten zu substituiren.

Wir wollen aber für's Erste auch noch die Excentricitäten der beiden Bahnen unberücksichtigt lassen, also annehmen, dass m' sich in einem Kreise um die Sonne bewege, und dass die Bahn von m, wenn keine Störung stattfände, gleichfalls kreisförmig wäre. Wir wollen ferner wegen der Kleinheit der gegenseitigen Neigung beider Bahnen die zweite und die höheren Potenzen der Neigung unbeachtet lassen. Alsdann ist, wenn die mittlere Entfernung des Planeten m' von der Sonne gleich a', und die mittleren Längen von m und m' gleich λ und λ' gesetzt werden:

$$r = a, \qquad l = \lambda, \qquad r' = a', \qquad l' = \lambda',$$

und es kommt, wenn man noch der Kürze halber u statt $\lambda - \lambda'$ schreibt:

$$P = \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{a'^3}\right) a' \cos u - \frac{a}{\varrho^3} = \frac{a' \cos u - a}{\varrho^3} - \frac{\cos u}{a'^2},$$

$$Q = -\left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{a'^3}\right) a' \sin u,$$

$$R = \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{a'^3}\right) a' \sin b',$$

wo

$$\frac{1}{\varrho^3} = (a^2 - 2aa' \cos u + a'^2)^{-\frac{3}{2}}$$

ist (§. 96).

Letzterer Ausdruck ist nun, um ihn für die folgenden Rechnungen brauchbar zu machen, in eine Reihe zu entwickeln, deren Glieder die Vielfachen von u zu Argumenten haben.

Bei der Mondstheorie, wo $\frac{a}{a'}$ ein sehr kleiner Bruch $= \frac{1}{399}$ war, convergirte diese Reihe so schnell, dass für unseren Zweck die zwei ersten Glieder derselben vollkommen hinreichten. Anders verhält es

sich gegenwärtig, wo je nach den beiden Planeten, die zugleich in Betracht kommen, und nach den damit bald grösseren, bald geringeren Abweichungen des Verhältnisses $a : a'$ von der Einheit, die Reihe bald ebenfalls ziemlich schnell, bald aber so langsam convergirt, dass man, um ein sattsam genaues Resultat zu erhalten, eine ziemlich grosse Anzahl von Gliedern entwickeln muss. Diese Entwickelung ist nun allerdings einer der mühsamsten, zugleich aber auch, wegen der merkwürdigen dabei vorkommenden Relationen, einer der interessantesten Theile der Störungsrechnungen. — Folgendes wird uns die nöthigen Begriffe davon verschaffen.

§. 154. Werde

$$a^2 - 2aa' \cos u + a'^2 = U$$

gesetzt und zuerst ganz allgemein die Entwickelung der Function U^{-s} verlangt.

Man setze $a = a'b$ und damit

$$U = a'^2 (1 - 2b \cos u + b^2),$$

und denke sich nun das Trinomium $1 - 2b \cos u + b^2$ nach b in die zwei Factoren $1 - bx$ und $1 - by$ aufgelöst, so dass

$$1 - 2b \cos u + b^2 = 1 - b(x + y) + b^2 xy .$$

Dies giebt

$$(a) \qquad x + y = 2 \cos u \quad \text{und} \quad xy = 1, \quad \text{also} \quad y = \frac{1}{x},$$

und es wird

$$U^{-s} = a'^{-2s} (1 - bx)^{-s} (1 - by)^{-s} .$$

Es ist aber

$$(1 - bx)^{-s} = 1 + \alpha bx + \beta b^2 x^2 + \gamma b^3 x^3 + \dots ,$$

wo

$$\alpha = s, \qquad \beta = \frac{s \,.\, s+1}{1 \,.\, 2}, \qquad \gamma = \frac{s \,.\, s+1 \,.\, s+2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}, \qquad \text{etc.}$$

und eben so

$$(1 - by)^{-s} = 1 + \frac{\alpha b}{x} + \frac{\beta b^2}{x^2} + \frac{\gamma b^3}{x^3} + \dots ;$$

folglich

$$(b) \qquad a'^{2s} U^{-s} = 1 + \alpha^2 b^2 + \beta^2 b^4 + \gamma^2 b^6 + \dots$$
$$+ (\alpha b + \alpha\beta b^3 + \beta\gamma b^5 + \dots)\left(x + \frac{1}{x}\right)$$
$$+ (\beta b^2 + \alpha\gamma b^4 + \dots)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$$
$$+ (\gamma b^3 + \dots)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \dots .$$

Nun ist nach (a)

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos u$$

und mithin

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 4\cos u^2 - 2 = 2\cos 2u\ ,$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - x - \frac{1}{x}$$

$$= 4\cos 2u \cos u - 2\cos u = 2\cos 3u\ ,$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - x^2 - \frac{1}{x^2}$$

$$= 4\cos 3u \cos u - \cos 2u = 2\cos 4u\ ,$$

u. s. w. Denkt man sich daher in (b) für α, β, γ, ... ihre durch s ausgedrückten Werthe substituirt und setzt dann

$$2a'^{-2s}\left[1 + s^2b^2 + \left(\frac{s\,.\,s+1}{1\,.\,2}\right)^2 b^4 + \left(\frac{s\,.\,s+1\,.\,s+2}{1\,.\,2\,.\,3}\right)^2 b^6 + \ldots\right] = \mathfrak{A}_0\ ,$$

$$2a'^{-2s}\left[sb + \frac{s}{1}\cdot\frac{s\,.\,s+1}{1\,.\,2}\,b^3 + \frac{s\,.\,s+1}{1\,.\,2}\cdot\frac{s\,.\,s+1\,.\,s+2}{1\,.\,2\,.\,3}\,b^5 + \ldots\right] = \mathfrak{A}_1\ ,$$

$$2a'^{-2s}\left[\frac{s\,.\,s+1}{1\,.\,2}\,b^2 + \frac{s}{1}\cdot\frac{s\,.\,s+1\,.\,s+2}{1\,.\,2\,.\,3}\,b^4 + \ldots\right] = \mathfrak{A}_2\ ,$$

$$2a'^{-2s}\left[\frac{s\,.\,s\pm 1\,.\,s\pm 2}{1\,.\,2\,.\,3}\,b^3 + \ldots\right] = \mathfrak{A}_3\ ,$$

u. s. w., so wird:

$$\frac{1}{U^s} = \frac{1}{2}\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1\cos u + \mathfrak{A}_2\cos 2u + \mathfrak{A}_3\cos 3u + \ldots\ ,$$

oder, wenn man noch annimmt, dass

$$\mathfrak{A}_{-1} = \mathfrak{A}_1\ ; \qquad \mathfrak{A}_{-2} = \mathfrak{A}_2\ , \qquad \text{etc.:}$$

$$\frac{1}{U^s} = \ldots + \frac{1}{2}\mathfrak{A}_{-2}\cos(-2u) + \frac{1}{2}\mathfrak{A}_{-1}\cos(-u)$$

$$+ \frac{1}{2}\mathfrak{A}_0 + \frac{1}{2}\mathfrak{A}_1\cos u + \frac{1}{2}\mathfrak{A}_2\cos 2u + \ldots\ ,$$

also mit Anwendung des Summenzeichens $\sum$:

$$U^{-s} = \frac{1}{2}\sum \mathfrak{A}_i \cos iu\ ,$$

worin für i nach und nach alle positiven und negativen ganzen Zahlen, Null nicht ausgeschlossen, zu setzen sind.

§. 155. Um in dem Folgenden mit Leichtigkeit operiren zu können, wird es gut sein, einige goniometrische Formeln und dahin

gehörige Sätze, welche Summen von der eben erhaltenen Form betreffen, hier einzuschalten.

I. Sind A_i, B_i, ... beliebige Functionen von i, und bezeichnen l, m, ... beliebige constante Zahlen, k eine constante ganze Zahl, so ist, wenn für i nach und nach alle Zahlen der Reihe ... — 2, — 1, 0, 1, 2, 3, ... gesetzt werden:

$$\sum A_{i+l} B_{i+m} \dots = \sum A_{i+k+l} B_{i+k+m} \dots .$$

Denn jeder der beiden Ausdrücke stellt eine nach beiden Seiten unendlich fortgesetzte Reihe vor, von welcher $A_l B_m \dots$ ein Glied ist, und wo jedes folgende Glied aus dem vorhergehenden dadurch erhalten wird, dass man die Indices von A, B, ... um 1 vergrössert.

II. Ist F_i eine ungerade Function von i, wie z. B. $ai + bi^3$, so ist

$$F_{-i} = -F_i , \quad \text{und daher} \quad \sum F_i = 0 ,$$

mithin auch z. B.

$$\sum F_i \cos iu = 0 ,$$

weil $\cos iu$ eine gerade Function von i ist.

Von jetzt an sollen unter A_i, B_i, C_i, ... ohne weiteren Zusatz nur gerade Functionen von i verstanden werden, so dass

$$A_{-i} = A_i , \qquad B_{-i} = B_i , \qquad \text{etc.}$$

Alsdann sind z. B. iA_i und $A_i \sin iu$ ungerade Functionen von i, und daher

$$\sum iA_i = 0 \quad \text{und} \quad \sum A_i \sin iu = 0 .$$

III. Man hat

$$\cos(iu + v) = \cos iu \cos v - \sin iu \sin v ,$$

mithin auch

$$\sum A_i \cos(iu + v) = \cos v \sum A_i \cos iu - \sin v \sum A_i \sin iu$$

und

$$\sum iA_i \cos(iu + v) = \cos v \sum iA_i \cos iu - \sin v \sum iA_i \sin iu .$$

Es ist aber nach II.

$$\sum A_i \sin iu = 0 \ \text{und} \ \sum iA_i \cos iu = 0 ,$$

folglich

$$(a) \qquad \cos v \sum A_i \cos iu = \sum A_i \cos(iu + v) ,$$

$$(b) \qquad \sin v \sum iA_i \sin iu = -\sum iA_i \cos(iu + v) .$$

Auf gleiche Weise findet sich durch Entwickelung von $\sin(iu + v)$:

$$\sin v \sum A_i \cos iu = \sum A_i \sin(iu + v) \quad . \qquad (c)$$

$$\cos v \sum i A_i \sin iu = \sum i A_i \sin(iu + v) \quad . \qquad (d)$$

IV. Ist u eine veränderliche, und A_i für einen bestimmten Werth von i eine constante Grösse, und findet sich

$$\sum A_i \cos iu = 0 \; ,$$

so hat man daraus zu schliessen:

$$A_0 = 0 \, , \qquad A_1 = 0 \, , \qquad A_2 = 0 \, , \qquad A_3 = 0 \, , \qquad \text{etc.}$$

Aus

$$\sum i A_i \sin iu = 0$$

aber folgt

$$A_1 = 0 \, , \qquad A_2 = 0 \, , \quad \text{etc.,} \qquad \text{nicht auch } A_0 = 0 \; .$$

Unter denselben Voraussetzungen, und wenn k eine constante Zahl bedeutet, hat man aus

$$\sum A_{k+i} \cos iu = 0$$

zu folgern:

$$A_k = 0 \, , \qquad A_{k+1} + A_{k-1} = 0 \, , \qquad A_{k+2} + A_{k-2} = 0 \; . \; \ldots$$

und überhaupt $A_{k+i} + A_{k-i} = 0$, oder was dasselbe ist:

$$A_{i+k} + A_{i-k} = 0 \; .$$

Denn die durch $\sum A_{k+i} \cos iu$ ausgedrückte Reihe ist:

$$A_k + (A_{k+1} + A_{k-1}) \cos u + (A_{k+2} + A_{k-2}) \cos 2u + \ldots \; .$$

Dasselbe folgt auch aus

$$\sum i A_{k+i} \sin iu = 0 \; ,$$

ausgenommen, dass nicht nothwendig auch $A_k = 0$ ist.

Aus $\sum A_{k+i} \sin iu = 0$ sowohl, als aus $\sum i A_{k+i} \cos iu = 0$, folgt

$$A_{k+i} - A_{k-i} = 0 \; ,$$

für jeden Werth von i.

Aus $\qquad \sum A_i \cos iu = \sum B_{i+l} \cos iu \qquad$ folgt:

$$2 A_i = B_{i+l} + B_{i-l} \; ;$$

aus $\qquad \sum i A_i \sin iu = \sum B_{i+l} \sin iu \qquad$ folgt:

$$2 i A_i = B_{i+l} - B_{i-l} \; ;$$

u. s. w.

§. 156. Wir wollen jetzt zu der in §. 154 entwickelten Formel

(1) $$U^{-s} = \frac{1}{2}\sum \mathfrak{A}_i \cos iu\ ,$$

wo

(2) $$U = a^2 - 2aa' \cos u + a'^2$$

ist, zurückkehren und das Gesetz zu bestimmen suchen, nach welchem die Coefficienten $\mathfrak{A}$ derselben von einander abhängen. Zu dem Ende werde, wenn s in $s+1$ übergeht, $\mathfrak{B}_i$ statt $\mathfrak{A}_i$ gesetzt, so dass

(3) $$U^{-s-1} = \frac{1}{2}\sum \mathfrak{B}_i \cos iu\ .$$

Es folgt hieraus

$$\frac{1}{2}\sum \mathfrak{A}_i \cos iu = \frac{1}{2} U \sum \mathfrak{B}_i \cos iu$$
$$= \frac{1}{2}(a^2 + a'^2 - 2aa' \cos u) \sum \mathfrak{B}_i \cos iu\ .$$

Nun ist nach §. 155, III. (a)

$$\cos u \sum \mathfrak{B}_i \cos iu = \sum \mathfrak{B}_i \cos (i+1) u$$
$$= \sum \mathfrak{B}_{i-1} \cos iu$$

nach I., und daher

$$\frac{1}{2}\sum \mathfrak{A}_i \cos iu = \frac{1}{2}\sum [(a^2 + a'^2)\mathfrak{B}_i - 2aa'\mathfrak{B}_{i-1}] \cos iu\ ;$$

folglich nach IV.

(4) $$\mathfrak{A}_i = (a^2 + a'^2)\mathfrak{B}_i - aa' (\mathfrak{B}_{i-1} + \mathfrak{B}_{i+1})\ .$$

Man hat ferner durch Differentiation

(5) $$d\,.\,U^{-s} = - s dU\,.\,U^{-s-1}\ ,$$

und wenn man (1) und (2) nach u differentiirt:

$$\frac{d\,.\,U^{-s}}{du} = - \frac{1}{2}\sum i\mathfrak{A}_i \sin iu\ , \quad \frac{dU}{du} = 2aa' \sin u\ ;$$

folglich

$$\frac{1}{2}\sum i\mathfrak{A}_i \sin iu = saa' \sin u \sum \mathfrak{B}_i \cos iu\ ,$$

oder wegen III. (c) und I.

$$\frac{1}{2}\sum i\mathfrak{A}_i \sin iu = saa' \sum \mathfrak{B}_i \sin (i+1)u = saa' \sum \mathfrak{B}_{i-1} \sin iu\ ;$$

folglich nach IV.:

(6) $$i\mathfrak{A}_i = saa'(\mathfrak{B}_{i-1} - \mathfrak{B}_{i+1})\ .$$

Durch Elimination von $\mathfrak{A}_i$ aus (4) und (6) erhält man nun eine Gleichung zwischen den Coefficienten $\mathfrak{B}$ allein:

(7) $$(i+s)\,aa'\mathfrak{B}_{i-1} + (i-s)\,aa'\mathfrak{B}_{i+1} = i(a^2 + a'^2)\mathfrak{B}_i\ .$$

und weil $\mathfrak{A}_i$ auf dieselbe Weise von a, a', i und s abhängt, wie $\mathfrak{B}_i$ von a, a', i und $s+1$:

$$(i+s-1)aa'\mathfrak{A}_{i-1}+(i-s+1)aa'\mathfrak{A}_{i+1}=i(a^2+a'^2)\mathfrak{A}_i\,, \tag{8}$$

welches die gesuchte Relation zwischen den Coefficienten $\mathfrak{A}$ ist.

Zusätze. *a*) Eben so, wie in (4) und (6) die Coefficienten $\mathfrak{A}$ durch die Coefficienten $\mathfrak{B}$, so können auch umgekehrt letztere durch erstere ausgedrückt werden. Denn aus (6) und (4) in Verbindung folgt:

$$(i+s)\,\mathfrak{A}_i=s\,(a^2+a'^2)\,\mathfrak{B}_i-2saa'\mathfrak{B}_{i+1}\,, \tag{9}$$

$$(i-s)\,\mathfrak{A}_i=-s\,(a^2+a'^2)\,\mathfrak{B}_i+2saa'\mathfrak{B}_{i-1}\,, \tag{10}$$

oder, wenn man in (10) $i+1$ statt i setzt:

$$(i-s+1)\,\mathfrak{A}_{i+1}=-s\,(a^2+a'^2)\,\mathfrak{B}_{i+1}+2saa'\mathfrak{B}_i\,, \tag{11}$$

und nach Elimination von $\mathfrak{B}_{i+1}$ aus (9) und (11):

$$(i+s)\,(a^2+a'^2)\,\mathfrak{A}_i-(i-s+1)\,2aa'\mathfrak{A}_{i+1}=s\,(a'^2-a^2)^2\mathfrak{B}_i\,, \tag{12}$$

oder, wenn man i in $-i$ verwandelt, nach §. 155, II.:

$$-(i-s)\,(a^2+a'^2)\,\mathfrak{A}_i+(i+s-1)\,2aa'\mathfrak{A}_{i-1}=s\,(a'^2-a^2)^2\mathfrak{B}_i\,. \tag{13}$$

b) Differentiirt man (1) und (2) noch partiell nach a, so kommt:

$$\frac{\partial\,.\,U^{-s}}{\partial a}=\frac{1}{2}\sum\frac{\partial\mathfrak{A}_i}{\partial a}\cos iu\,,$$

$$\frac{\partial U}{\partial a}=2\,(a-a'\cos u)\,,$$

und die Gleichung (5) wird:

$$\frac{1}{2}\sum\frac{\partial\mathfrak{A}_i}{\partial a}\cos iu=-s\,(a-a'\cos u)\sum\mathfrak{B}_i\cos iu$$

$$=-sa\sum\mathfrak{B}_i\cos iu+sa'\sum\mathfrak{B}_{i-1}\cos iu\;;$$

folglich nach IV.:

$$\frac{\partial\mathfrak{A}_i}{\partial a}=-2sa\mathfrak{B}_i+sa'\,(\mathfrak{B}_{i-1}+\mathfrak{B}_{i+1})\,. \tag{14}$$

Es folgt hieraus, das eine Mal in Verbindung mit (6):

$$\frac{i\mathfrak{A}_i}{a}+\frac{\partial\mathfrak{A}_i}{\partial a}=2sa'\mathfrak{B}_{i-1}-2sa\mathfrak{B}_i\,, \tag{15}$$

und das andere Mal in Verbindung mit (4):

$$s\mathfrak{A}_i+\frac{a\,\partial\mathfrak{A}_i}{\partial a}=s\,(a'^2-a^2)\,\mathfrak{B}_i\,,$$

also wenn man in letzterer Formel für $\mathfrak{B}_i$ seinen Werth aus (13) setzt:

$$a\,(a'^2-a^2)\,\frac{\partial\mathfrak{A}_i}{\partial a}=2\,(i+s-1)\,aa'\mathfrak{A}_{i-1}-[(i-2s)\,a^2+ia'^2]\,\mathfrak{A}_i\,. \tag{16}$$

c) Auf gleiche Art, wie (14), findet sich, wenn man (1) und (2) nach a' differentiirt:

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial a'} = -2sa'\mathfrak{B}_i + sa(\mathfrak{B}_{i-1} + \mathfrak{B}_{i+1}) . \tag{17}$$

Aus (14) und (17) aber folgt mit Berücksichtigung von (4):

$$a\frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial a} + a'\frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial a'} = -2s\mathfrak{A}_i , \tag{18}$$

eine Gleichung, die auch schon aus einer bekannten Eigenschaft der homogenen Functionen fliesst, indem, zufolge der Gleichungen (1) und (2), $\mathfrak{A}_i$ eine homogene Function der Grössen a und a' von der Dimension $-2s$ ist.

§. 157. Man setze jetzt $s = \frac{1}{2}$ und schreibe für diesen speciellen Werth von s, A und B statt der vorigen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Die Gleichungen (7), (8), (12) und (13) des vorigen Paragraphen gehen damit über in:

$$[1] \qquad (2i+1)aa'B_{i-1} + (2i-1)aa'B_{i+1} = 2i(a^2+a'^2)B_i .$$

$$[2] \qquad (2i-1)aa'A_{i-1} + (2i+1)aa'A_{i+1} = 2i(a^2+a'^2)A_i .$$

$$[3] \qquad (2i+1)[(a^2+a'^2)A_i - 2aa'A_{i+1}] = (a'^2-a^2)^2 B_i .$$

$$[4] \qquad (2i-1)[2aa'A_{i-1} - (a^2+a'^2)A_i] = (a'^2-a^2)^2 B_i .$$

Ferner folgt aus §. 154 für $s = \frac{1}{2}$:

$$A_0 = \frac{2}{a'}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 b^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 b^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 b^6 + \ldots\right] .$$

$$A_1 = \frac{2b}{a'}\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{3}{4} b^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{5}{6} b^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{7}{9} b^6 + \ldots\right] .$$

Beide Reihen sind convergent, also summirbar, wenn $b = \frac{a}{a'}$ ein ächter Bruch ist. Man lasse daher bei Summirung dieser Reihen a die mittlere Entfernung des der Sonne näheren, a' die des entfernteren der beiden Planeten m und m' bedeuten.

Hat man somit die Werthe von A_0 und A_1 berechnet, so finden sich die von A_2, A_3 .... ohne Schwierigkeit durch [2]. Denn setzt man darin $i = 1, 2, \ldots$, so kommt

$$A_2 = \frac{2(a^2+a'^2)A_1 - aa'A_0}{3aa'} ,$$

$$A_3 = \frac{4(a^2+a'^2)A_2 - 3aa'A_1}{5aa'} .$$

u. s. w.

Hiermit kann man weiter durch Anwendung der Formel [3] oder [4] die Coefficienten B berechnen, und man hat nach diesem Allen:

$$\frac{1}{\varrho} = U^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sum A_i \cos iu = \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + \ldots,$$

$$\frac{1}{\varrho^3} = U^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\sum B_i \cos iu = \frac{1}{2} B_0 + B_1 \cos u + B_2 \cos 2u + \ldots .$$

Dass auch die Reihe $A_0, A_1, A_2, \ldots$ convergirt, erhellet leicht aus der in §. 154 für U^{-s} gegebenen Entwickelung. Langsamer, als diese, convergirt die Reihe $B_0, B_1, B_2, \ldots$, und jede der beiden Reihen desto langsamer, je weniger der Bruch b von der Einheit übertroffen wird.

Man findet diese Reihen bereits berechnet in Laplace *Mécan. cél.*, Tome III, pag. 66—85*. Hiernach sind z. B. für Venus und Erde, als für welche zwei Planeten der Bruch

$$b = 0{\cdot}723$$

der Einheit am nächsten kommt, die mit der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne multiplicirten Werthe von $A_0, A_1, A_2, \ldots$

$$= 2{\cdot}386;\ 0{\cdot}942;\ 0{\cdot}528;\ 0{\cdot}323;\ 0{\cdot}207;$$
$$0{\cdot}136;\ 0{\cdot}090;\ 0{\cdot}061;\ 0{\cdot}042;\ \text{etc.}$$

Dagegen sind für Merkur und Saturn, wo

$$b = 0{\cdot}041$$

ist, die in die Entfernung des Saturn multiplicirten Werthe von A_0, A_1, A_2

$$= 2{\cdot}001;\ 0{\cdot}041;\ 0{\cdot}001 .$$

Zusatz. In dem Folgenden haben wir noch die Werthe der Differentialquotienten $\frac{\partial A_i}{\partial a}$, $\frac{\partial A_i}{\partial a'}$ und $\frac{\partial^2 A_i}{\partial a^2}$ zu wissen nöthig. Unter der Voraussetzung, dass die Werthe von A_i und B_i gefunden worden, ergeben sich die beiden ersteren, wenn man in (14), (15) oder (16), und in (18) des §. 156 $s = \frac{1}{2}$ setzt, nämlich

$$\frac{\partial A_i}{\partial a} = -aB_i + \frac{1}{2}a'(B_{i-1} + B_{i+1}) , \qquad [5]$$

$$\frac{iA_i}{a} + \frac{\partial A_i}{\partial a} = a'B_{i-1} - aB_i ; \qquad [6]$$

$$a\frac{\partial A_i}{\partial a} + a'\frac{\partial A_i}{\partial a'} = -A_i . \qquad [7]$$

---

*) Vergl. Leverrier, *Recherches astronomiques*, Chap. VIII, im 2. Bande der *Annales de l'Observatoire de Paris*, p. 67—86 (1856), sowie die *New Tables ...* by John D. Runkle in den *Smithsonian Contributions to knowledge*, 1855 (nebst Supplement für die kleinen Planeten). A. d. H.

Ferner kommt, wenn man in (16) $s = \frac{3}{2}$ und damit $\mathfrak{A} = B$ setzt:

[8] $$a(a'^2 - a^2)\frac{\partial B_i}{\partial a} = (2i+1)\,aa'B_{i-1} - [(i-3)\,a^2 + ia'^2]\,B_i \ .$$

Hiernach kann man $\frac{\partial^2 A_i}{\partial a^2}$ dadurch finden, dass man [5] noch einmal nach a differentiirt, und für die dadurch entstehenden Differentialquotienten von B nach a ihre Werthe aus [8] substituirt.

So wird für $i = 0$

$$\frac{\partial A_0}{\partial a} = -aB_0 + a'B_1 \ ,$$

folglich

$$\frac{\partial^2 A_0}{\partial a^2} = -B_0 - a\frac{\partial B_0}{\partial a} + a'\frac{\partial B_1}{\partial a} \ .$$

Nach [8] ist aber

$$a(a'^2 - a^2)\frac{\partial B_0}{\partial a} = aa'B_1 + 3a^2B_0 \ ,$$

$$a(a'^2 - a^2)\frac{\partial B_1}{\partial a} = 3aa'B_0 + (2a^2 - a'^2)\,B_1 \ .$$

Hiermit findet sich

[9] $$a'\frac{\partial B_1}{\partial a} - a\frac{\partial B_0}{\partial a} = 3B_0 - \frac{a'}{a}B_1$$

und folglich

[10] $$\frac{\partial^2 A_0}{\partial a^2} = 2B_0 - \frac{a'}{a}B_1 \ .$$

Für $i = 1$ wird ferner

$$\frac{\partial A_1}{\partial a} = -aB_1 + \frac{1}{2}a'(B_0 + B_2) \ ,$$

oder weil nach [1]

[1*] $$aa'B_2 = 2(a^2 + a'^2)\,B_1 - 3aa'B_0$$

ist:

$$\frac{\partial A_1}{\partial a} = \frac{a'^2}{a}B_1 - a'B_0 \ .$$

und daher

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial a^2} = \frac{a'}{a}\left(a'\frac{\partial B_1}{\partial a} - a\frac{\partial B_0}{\partial a}\right) - \frac{a'^2}{a^2}B_1 \ .$$

$$= 3\frac{a'}{a}B_0 - 2\frac{a'^2}{a^2}B_1$$

nach [9], welches sich mit [1*] auf

[11] $$\frac{\partial^2 A_1}{\partial a^2} = 2B_1 - \frac{a'}{a}B_2$$

reducirt.

Die numerischen Werthe dieser und noch höherer Differentialquotienten sind a. a. O. der *Mécan. cél.* gleichfalls angegeben.

§. 158. Wir nehmen jetzt den in §. 153 verlassenen Faden unserer Untersuchung, die von den Excentricitäten unabhängigen Störungen betreffend, wieder auf und substituiren, um zunächst die Störungen des Radius Vector und der Länge zu erhalten, in den dortigen Ausdrücken für P und Q die in §. 157 für ϱ^{-3} gefundene Reihe. Dies giebt:

$$P = \frac{1}{2}(a' \cos u - a) \sum \mathrm{B}_i \cos iu - \frac{1}{a'^2} \cos u$$

$$= \frac{1}{2} \sum (a' \mathrm{B}_{i-1} - a\mathrm{B}_i) \cos iu - \frac{1}{a'^2} \cos u \ ,$$

$$Q = -\frac{1}{2} a' \sin u \sum \mathrm{B}_i \cos iu + \frac{1}{a'^2} \sin u$$

$$= -\frac{1}{2} \sum a' \mathrm{B}_{i-1} \sin iu + \frac{1}{a'^2} \sin u \ ,$$

(vergl. §. 156), und mit Anwendung der Formel [6]:

$$P = \frac{1}{2} \sum \left(\frac{i\mathrm{A}_i}{a} + \frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial a}\right) \cos iu - \frac{1}{a'^2} \cos u \ ,$$

$$Q = -\frac{1}{2} \sum \left(a\mathrm{B}_i + \frac{i\mathrm{A}_i}{a} + \frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial u}\right) \sin iu + \frac{1}{a'^2} \sin u \ ;$$

oder, weil

$$\sum i\mathrm{A}_i \cos iu, \quad \sum \mathrm{B}_i \sin iu \quad \text{und} \quad \sum \frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial a} \sin iu$$

Null sind (§. 155, II):

$$P = \frac{1}{2} \sum \frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial a} \cos iu - \frac{1}{a'^2} \cos u \ ,$$

$$Q = -\frac{1}{2} \sum \frac{i\mathrm{A}_i}{a} \sin iu + \frac{1}{a'^2} \sin u \ ,$$

d. i.

$$P = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathrm{A}_0}{\partial a} + \left(\frac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial a} - \frac{1}{a'^2}\right) \cos u + \frac{\partial \mathrm{A}_2}{\partial a} \cos 2u + \ldots,$$

$$Q = -\left(\frac{\mathrm{A}_1}{a} - \frac{1}{a'^2}\right) \sin u - \frac{2\mathrm{A}_2}{a} \sin 2u - \frac{3\mathrm{A}_3}{a} \sin 3u + \ldots$$

Man setze daher, um diese Ausdrücke noch etwas mehr zu vereinfachen:

$$\mathrm{A}_0 = A_0, \quad \mathrm{A}_1 - \frac{a}{a'^2} = A_1, \quad \mathrm{A}_2 = A_2, \quad \mathrm{A}_3 = A_3 \ , \ \text{etc.},$$

also auch

$$\frac{\partial \mathrm{A}_0}{\partial a} = \frac{\partial A_0}{\partial a}, \quad \frac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial a} - \frac{1}{a'^2} = \frac{\partial A_1}{\partial a}, \quad \frac{\partial \mathrm{A}_2}{\partial a} = \frac{\partial A_2}{\partial a}, \quad \text{etc.}$$

Denn hiermit wird

$$P = \frac{1}{2}\sum \frac{\partial A_i}{\partial a}\cos iu\,, \qquad Q = -\frac{1}{2}\sum \frac{iA_i}{a}\sin iu\,,$$

und man hat zuletzt (§. 152):

$$T_1 = -\frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{2}m'a^2 \sum \frac{\partial A_i}{\partial a}\cos iu\,,$$

$$V_1 = -\frac{1}{2}m'a\sum iA_i \sin iu\,,$$

oder, wenn von jetzt an für i bloss alle positiven ganzen Zahlen 1, 2, 3,... genommen werden:

$$T_1 = -\frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{2}m'a^2\frac{\partial A_0}{\partial a} + m'a^2\sum \frac{\partial A_i}{\partial a}\cos iu\,,$$

$$V_1 = -m'a\sum iA_i \sin iu\,.$$

Aus diesen Ausdrücken für die Kräfte, welche auf den Planeten m in der Ebene seiner Bahn wirken, lassen sich aber seine Coordinaten r und l unmittelbar durch die bereits in §. 112 entwickelten allgemeinen Formeln ableiten, nach denen bei einer sehr nahe kreis- und gleichförmigen, durch die Kräfte

$$T_1 = -\frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{2}w + w\sum F_i \cos\lambda_i$$

und

$$V_1 = w\sum G_i \sin\lambda_i$$

erzeugten Bewegung die Coordinaten

$$\frac{r}{a} = 1 - \frac{1}{6}w + w\sum f_i \cos\lambda_i$$

und

$$l = \lambda + w\sum g_i \sin\lambda_i$$

sind, wo

$$f_i = -\frac{k_i F_i - 2G_i}{k_i(k_i^2 - 1)} \quad \text{und} \quad g_i = \frac{2k_i F_i - (3 + k_i^2)G_i}{k_i^2(k_i^2 - 1)}$$

ist.

Denn vergleichen wir die letzteren Ausdrücke von T_1 und V_1 mit den vorhergehenden, so sind die in denselben vorkommenden Factoren

$$w = m'a^2\frac{\partial A_0}{\partial a}\,, \qquad wF_i = m'a^2\frac{\partial A_i}{\partial a}\,,$$

$$wG_i = -m'aiA_i\,, \qquad \lambda_i = iu\,.$$

Heisst ferner n' die mittlere Bewegung von m' und wird

$$n - n' = kn$$

gesetzt, so ist von $\lambda - \lambda'$ oder u die Geschwindigkeit $= n - n' = kn$, also die von $iu = ikn$, und folglich, weil in §. 112 von λ_i die Geschwindigkeit $= k_i n$ gesetzt wurde, das dortige

$$k_i = ik\ .$$

Endlich werde statt der dortigen wf_i und wg_i hier

$$m' C_i \quad \text{und} \quad m' F_i$$

geschrieben.

Nach Substitution dieser Werthe von w, wF_i, wG_i, λ_i, k_i, wf_i und wg_i in den dortigen Ausdrücken für r und l, erhält man als endliches Resultat für die von der Excentricität unabhängigen Störungen des Radius Vector und der Länge:

$$\frac{r}{a} = 1 - \frac{1}{6} m' a^2 \frac{\partial A_0}{\partial a} + m' \sum C_i \cos iu\ ,$$

$$l = \lambda + m' \sum F_i \sin iu\ ,$$

wo

$$C_i = - \frac{2 a A_i + k a^2 \frac{\partial A_i}{\partial a}}{k(i^2 k^2 - 1)}$$

und

$$F_i = \frac{(i^2 k^2 + 3)\, a A_i + 2 k a^2 \frac{\partial A_i}{\partial a}}{i k^2 (i^2 k^2 - 1)}$$

ist; oder, wenn für i wieder sowohl alle negativen, als alle positiven ganzen Zahlen genommen werden:

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2} m' \sum C_i \cos iu$$

und

$$l = \lambda + \frac{1}{2} m' \sum F_i \sin iu\ ,$$

mit der Erinnerung, dass C_0 nicht aus dem allgemeinen Ausdrucke für C_i zu bestimmen, sondern dass

$$C_0 = - \frac{1}{3} a^2 \frac{\partial A_0}{\partial a}$$

zu setzen ist.

Des Folgenden halber werde noch bemerkt, dass die Formel in §. 112

$$- 2 k_i f_i - k_i^2 g_i = G_i\ ,$$

in die jetzigen Zeichen übersetzt, die Relation

$$2 k C_i + i k^2 F_i = a A_i$$

giebt.

Zweites Kapitel.

Entwickelung der von den Excentricitäten und der Neigung abhängigen Störungen.

---

§. 159. Die Entwickelung der Störungen, welche m' auf m ausübt, fängt nach der in §. 153 gemachten Bemerkung damit an, dass in den Formeln, welche in §. 152 für die Kräfte T_1, V_1, W_1 aufgestellt wurden, die Grössen P, Q, R, welche Functionen der Coordinaten von m und m' sind, durch die elliptischen Werthe dieser Coordinaten ausgedrückt werden. Statt dieser elliptischen Werthe wurden im vorigen Kapitel die mittleren Werthe a, λ, a', λ' der Coordinaten r, l, r', l' angewendet und damit

$$(1)\qquad \begin{aligned} P &= \frac{1}{2}\sum \frac{\partial A_i}{\partial a}\cos iu \\ Q &= -\frac{1}{2}\sum \frac{iA_i}{a}\sin iu \end{aligned}$$

gefunden, worin A_i eine Function von a, a' und der Stellenzahl i, und $u = \lambda - \lambda'$ gesetzt worden ist.

Bezeichnet man nun die Grössen P und Q, wenn sie Functionen der elliptischen Coordinaten sind, durch (P) und (Q) und gebraucht P und Q selbst in der ihnen durch die Gleichungen (1) angewiesenen Bedeutung, so ist zuerst klar, dass (P) und (Q) in P und Q übergehen, wenn man in ersteren statt der elliptischen Coordinaten ihre mittleren Werthe setzt. Da aber die Coordinaten r, l, r', l' von einander unabhängig sind, so wird man auch umgekehrt die jetzt zu wissen nöthigen (P) und (Q) aus P und Q erhalten, wenn man in letzteren die mittleren Werthe der Coordinaten in ihre elliptischen verwandelt. Die deshalb nöthige Rechnung lässt sich folgendergestalt am einfachsten ausführen.

Heissen e und e' die Excentricitäten und ω und ω' die Längen der Perihelien von m und m', und setzt man

$$\lambda - \omega = \alpha \quad \text{und} \quad \lambda' - \omega' = \alpha' ,$$

so sind bis auf die ersten Potenzen von e und e' genau die elliptischen Werthe der Coordinaten

$$r = a\,(1 - e\cos\alpha)\,, \qquad l = \lambda + 2e\sin\alpha\,,$$

$$r' = a'\,(1 - e'\cos\alpha')\,, \qquad l' = \lambda' + 2e'\sin\alpha'\,,$$

oder wenn man

$$-ae\cos\alpha = x\ , \quad 2e\sin\alpha = y\ ,$$
$$-a'e'\cos\alpha' = x'\ , \quad 2e'\sin\alpha' = y'$$

setzt:

$$r = a + x,\quad l = \lambda + y,\quad r' = a' + x',\quad l' = \lambda' + y'\ .$$

Hiernach wird man (P) und (Q) finden, wenn man in den durch (1) bestimmten P und Q die mittleren Werthe a, λ, a', λ' resp. um x, y, x', y' wachsen lässt. Dies giebt:

$$(P) = P + x\frac{\partial P}{\partial a} + y\frac{\partial P}{\partial \lambda} + x'\frac{\partial P}{\partial a'} + y'\frac{\partial P}{\partial \lambda'}\ ,$$

$$(Q) = Q + x\frac{\partial Q}{\partial a} + y\frac{\partial Q}{\partial \lambda} + x'\frac{\partial Q}{\partial a'} + y'\frac{\partial Q}{\partial \lambda'}\ .$$

Aus (1) folgt aber

$$\frac{\partial P}{\partial a} = \frac{1}{2}\sum\frac{\partial^2 A_i}{\partial a^2}\cos iu\ , \qquad \frac{\partial P}{\partial \lambda} = -\frac{1}{2}\sum i\frac{\partial A_i}{\partial a}\sin iu\ ,$$

$$\frac{\partial P}{\partial a'} = \frac{1}{2}\sum\frac{\partial^2 A_i}{\partial a\,\partial a'}\cos iu\ , \qquad \frac{\partial P}{\partial \lambda'} = \frac{1}{2}\sum i\frac{\partial A_i}{\partial a}\sin iu\ .$$

Mithin ist (§. 155, III)

$$x\frac{\partial P}{\partial a} = -\frac{1}{2}\,ae\sum\frac{\partial^2 A_i}{\partial a^2}\cos(iu+\alpha)\ ,$$

$$y\frac{\partial P}{\partial \lambda} = e\sum i\frac{\partial A_i}{\partial a}\cos(iu+\alpha)\ ,$$

$$x'\frac{\partial P}{\partial a'} = -\frac{1}{2}\,a'e'\sum\frac{\partial^2 A_i}{\partial a\,\partial a'}\cos(iu+\alpha')\ ,$$

$$y'\frac{\partial P}{\partial \lambda'} = -e'\sum i\frac{\partial A_i}{\partial a}\cos(iu+\alpha')\ .$$

Setzt man daher zur Abkürzung

$$(2i+1)\,A_i - a\,\frac{\partial A_i}{\partial a} = M_i$$

und (2)

$$-2iA_i - a'\,\frac{\partial A_i}{\partial a'} = N_{i-1}\ ,$$

woraus

$$2i\,\frac{\partial A_i}{\partial a} - a\frac{\partial^2 A_i}{\partial a^2} = \frac{\partial M_i}{\partial a}$$

und (2*)

$$-2i\,\frac{\partial A_i}{\partial a} - a'\,\frac{\partial^2 A_i}{\partial a\,\partial a'} = \frac{\partial N_{i-1}}{\partial a}$$

folgt, so wird

$$(P) = \frac{1}{2}\sum\left\{\frac{\partial A_i}{\partial a}\cos iu + e\,\frac{\partial M_i}{\partial a}\cos(iu+\alpha) + e'\,\frac{\partial N_{i-1}}{\partial a}\cos(iu+\alpha')\right\}.$$

Auf ähnliche Weise wird man mit Hülfe der partiellen Differentialquotienten von Q

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = \frac{1}{2}\sum i\left(\frac{A_i}{a^2} - \frac{\partial A_i}{a\,\partial a}\right)\sin iu\ , \quad \text{u. s. w.}$$

erhalten:

$$(Q) = -\frac{1}{2a}\sum i\left\{A_i \sin iu + eM_i \sin(iu+\alpha) + e' N_{i-1}\sin(iu+\alpha')\right\}.$$

Um des Folgenden willen setze man noch

$$u + \alpha' = (\lambda - \lambda') + (\lambda' - \omega') = \lambda - \omega' = \beta\ .$$

Das Glied $\frac{1}{2}\sum e' \frac{\partial N_{i-1}}{\partial a}\cos(iu+\alpha')$ in (P) wird dadurch

$$= \frac{1}{2}\sum e' \frac{\partial N_{i-1}}{\partial a}\cos[(i-1)\,u + \beta]$$

$$= \frac{1}{2}\sum e' \frac{\partial N_i}{\partial a}\cos(iu+\beta)\ ,$$

und eben so das entsprechende Glied in (Q)

$$= -\frac{1}{2a}\sum (i+1)\,e' N_i \sin(iu+\beta)\ .$$

Man erhält somit zuletzt:

$$(3)\quad T_1 = -\frac{a^2}{r^2} + m' a^2 (P)$$

$$= -\frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{2} m' a^2 \sum\left\{\frac{\partial A_i}{\partial a}\cos iu + e\frac{\partial M_i}{\partial a}\cos(iu+\alpha) + \right.$$

$$\left. + e' \frac{\partial N_i}{\partial a}\cos(iu+\beta)\right\}\ ,$$

$$(4)\quad V_1 = m' a^2 (Q) = -\frac{1}{2} m' a \sum\left\{iA_i \sin iu + eiM_i \sin(iu+\alpha) + \right.$$

$$\left. + e'(i+1)\,N_i \sin(iu+\beta)\right\}\ .$$

§. 160. Den jetzt gefundenen Werthen von T_1 und V_1 gemäss können wir die gestörten elliptischen Werthe des Radius Vector und der Länge von m setzen (vergl. §. 158 und §. 118):

$$r = a\,(1+z)\ ,$$

nebst

$$z = -e\cos\alpha + m' \sum\left\{\frac{1}{2} C_i \cos iu + eD_i \cos(iu+\alpha) + \right.$$

$$\left. + e' E_i \cos(iu+\beta)\right\}\ ,$$

$$l = \lambda + 2e\sin\alpha + m' \sum\left\{\frac{1}{2} F_i \sin iu + eG_i \sin(iu+\alpha) + \right.$$

$$\left. + e' H_i \sin(iu+\beta)\right\}\ ,$$

wo C_i, D_i, E_i, F_i, G_i, H_i zu bestimmende Functionen von a, a' und der Stellenzahl i sind.

Zunächst folgt hieraus

$$z^2 = -m' e \cos\alpha \sum C_i \cos iu = -m' e \sum C_i \cos(iu+\alpha) \ ,$$

also

$$\frac{a^2}{r^2} = 1 - 2z + 3z^2 = 1 + 2e\cos\alpha$$

$$-m' \sum \{C_i \cos iu + e(3C_i + 2D_i)\cos(iu+\alpha) + 2e' E_i \cos(iu+\beta)\} \ ,$$

und damit

$$\begin{aligned} T_1 = -1 - 2e\cos\alpha + m' \sum \Big\{ & \left(\frac{1}{2} a^2 \frac{\partial A_i}{\partial a} + C_i\right)\cos iu + \\ & + e\left(\frac{1}{2} a^2 \frac{\partial M_i}{\partial a} + 3C_i + 2D_i\right)\cos(iu+\alpha) + \\ & + e'\left(\frac{1}{2} a^2 \frac{\partial N_i}{\partial a} + 2E_i\right)\cos(iu+\beta)\Big\} \ . \end{aligned} \qquad (3^*)$$

Sodann kommt durch Differentiation von r und l, wenn wir die Geschwindigkeiten $\frac{dr}{dt}$, $\frac{dl}{dt}$, $\frac{d^2r}{dt^2}$, $\frac{d^2l}{dt^2}$, wie früher, mit r', l', r'', l'' bezeichnen und, wie in §. 158,

$$n - n' = kn \qquad \text{und überdies} \qquad ik + 1 = g$$

setzen, wodurch

$$\frac{d\,iu}{dt} = ikn$$

und, wegen $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\beta}{dt} = n$,

$$\frac{d(iu+\alpha)}{dt} = \frac{d(iu+\beta)}{dt} = gn$$

wird:

$$\begin{aligned} \frac{r'}{na} = e\sin\alpha - m' \sum \Big\{ & \frac{1}{2} ik C_i \sin iu + eg D_i \sin(iu+\alpha) + \\ & + e' g E_i \sin(iu+\beta)\Big\} \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{l'}{n} = 1 + 2e\cos\alpha + m' \sum \Big\{ & \frac{1}{2} ik F_i \cos iu + eg G_i \cos(iu+\alpha) + \\ & + e' g H_i \cos(iu+\beta)\Big\} \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{l'^2}{n^2} = 1 + 4e\cos\alpha + m' \sum \Big\{ & ik F_i \cos iu + 2e(ik F_i + g G_i)\cos(iu+\alpha) + \\ & + 2e' g H_i \cos(iu+\beta)\Big\} \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{l''}{n^2} = -2e\sin\alpha - m' \sum \Big\{ & \frac{1}{2} i^2k^2 F_i \sin iu + eg^2 G_i \sin(iu+\alpha) + \\ & + e' g^2 H_i \sin(iu+\beta)\Big\} \ ; \end{aligned}$$

$$\frac{r''}{n^2 a} = e \cos\alpha - m' \sum \{ \tfrac{1}{2} i^2 k^2 C_i \cos iu +$$
$$+ e g^2 D_i \cos(iu + \alpha) + e' g^2 E_i \cos(iu + \beta) \} ,$$
$$\frac{r l'^2}{n^2 a} = 1 + 3e \cos\alpha + m' \sum \{ (\tfrac{1}{2} C_i + ikF_i) \cos iu +$$
$$+ e(2C_i + D_i + ikF_i + 2g G_i) \cos(iu + \alpha) + e'(E_i + 2g H_i) \cos(iu + \beta) \} ,$$
$$\frac{r l''}{n^2 a} = -2e \sin\alpha - m' \sum \{ \tfrac{1}{2} i^2 k^2 F_i \sin iu +$$
$$+ e(C_i - \tfrac{1}{2} i^2 k^2 F_i + g^2 G_i) \sin(iu + \alpha) + e' g^2 H_i \sin(iu + \beta) \} ,$$
$$\frac{r' l'}{n^2 a} = e \sin\alpha - m' \sum \{ \tfrac{1}{2} ik C_i \sin iu +$$
$$+ e(ikC_i + gD_i - \tfrac{1}{2} ikF_i) \sin(iu + \alpha) + e' g E_i \sin(iu + \beta) \} .$$

Die Kräfte, wie sie aus den für r und l angenommenen Formen folgen, sind hiernach (vergl. §. 119):

$$T_1 = \frac{r'' - r l'^2}{n^2 a} = -1 - 2e \cos\alpha - m' \sum [\tfrac{1}{2}(i^2k^2 + 1) C_i + ikF_i] \cos iu$$
$$- m'e \sum [2C_i + (g^2 + 1) D_i + ikF_i + 2g G_i] \cos(iu + \alpha)$$
$$- m'e' \sum [(g^2 + 1) E_i + 2g H_i] \cos(iu + \beta) ,$$

(5)

$$V_1 = \frac{r l'' + 2 r' l'}{n^2 a} = - m' \sum [ikC_i + \tfrac{1}{2} i^2 k^2 F_i] \sin iu$$
$$- m'e \sum [(2ik + 1) C_i + 2gD_i - ik(\tfrac{1}{2} ik + 1) F_i + g^2 G_i] \sin(iu + \alpha)$$
$$- m'e' \sum (2g E_i + g^2 H_i) \sin(iu + \beta) .$$

§. 161. Vergleichen wir nun diese Werthe von T_1 und V_1 mit denen in (3*) und (4), so werden sich erstens aus den von e und e' unabhängigen Gliedern die zur Bestimmung von C_i und F_i nöthigen Gleichungen finden, wobei wir uns aber nicht aufhalten, da diese Coefficienten bereits in §. 158 entwickelt worden sind. Zur Bestimmung der Coefficienten D_i, E_i, G_i, H_i, welche die in e und e' multiplicirten Glieder von r und l enthalten, ergeben sich folgende vier Gleichungen:

[1] $$\tfrac{1}{2} a^2 \frac{\partial M_i}{\partial a} = -5 C_i - (g^2 + 3) D_i - ikF_i - 2g G_i ,$$

[2] $$\tfrac{1}{2} i a M_i = (2ik + 1) C_i + 2g D_i - ik(\tfrac{1}{2} ik + 1) F_i + g^2 G_i .$$

[3] $$\tfrac{1}{2} a^2 \frac{\partial N_i}{\partial a} = -(g^2 + 3) E_i - 2g H_i .$$

[4] $$\tfrac{1}{2}(i + 1) a N_i = 2g E_i + g^2 H_i .$$

Um hieraus zuerst die mit e multiplicirten Coefficienten D_i und G_i zu finden, setze man in [1] und [2] die als bekannt anzusehenden Grössen

$$\frac{1}{2}a^2\frac{\partial M_i}{\partial a}+5C_i+ikF_i=K\,.$$

$$\frac{1}{2}iaM_i-(2ik+1)C_i+ik(\tfrac{1}{2}ik+1)F_i=L\,, \qquad (\alpha)$$

und es werden jene Gleichungen

$$K=-(g^2+3)D_i-2gG_i\,. \qquad [1^*]$$

$$L=2gD_i+g^2G_i\,, \qquad [2^*]$$

wo

$$g=ik+1\,.$$

Es ist aber, wenn man in den Gleichungen (2) und (2*) in §. 159 statt $a\frac{\partial A_i}{\partial a}$ seinen aus der Gleichung für C_i in §. 158 fliessenden Werth

$$a\frac{\partial A_i}{\partial a}=-\frac{2}{k}A_i-\frac{(i^2k^2-1)C_i}{a}$$

setzt:

$$M_i=\frac{2(ik+1)+k}{k}A_i+\frac{i^2k^2-1}{a}C_i\,,$$

$$\frac{\partial M_i}{\partial a}=-\frac{4i}{ka}A_i-\frac{2i(i^2k^2-1)}{a^2}C_i-a\frac{\partial^2 A_i}{\partial a^2}\,.$$

Ferner ist nach §. 158 zu Ende:

$$ik^2F_i=aA_i-2kC_i\,.$$

Hiermit werden die Gleichungen (α):

$$K=-\frac{2i-1}{k}aA_i-(i^3k^2-i-3)C_i-\frac{1}{2}a^3\frac{\partial^2 A_i}{\partial a^2}\,,$$

$$\frac{L}{ik+1}=\frac{i+1}{k}aA_i+\frac{1}{2}(i^2k-i-6)C_i\,,$$

und man hat alsdann zufolge der Gleichungen [1*] und [2*]:

$$[(ik+1)^2-1]D_i=-K-\frac{2L}{ik+1} \qquad \text{I.}$$

$$=-\frac{3a}{k}A_i+[i^2k(ik-1)+3]C_i+\frac{1}{2}a^3\frac{\partial^2 A_i}{\partial a^2}\,,$$

$$(ik+1)G_i=\frac{i+1}{k}aA_i+\frac{1}{2}[i(ik-1)-6]C_i-2D_i\,; \qquad \text{II.}$$

wodurch D_i und G_i bestimmt sind.

Was noch die Bestimmung der Coefficienten E_i und H_i anlangt, so folgt aus den Gleichungen [3] und [4]:

$$[(ik+1)^2-1]E_i=-\frac{i+1}{ik+1}aN_i-\frac{1}{2}a^2\frac{\partial N_i}{\partial a}\,.$$

Es war aber (§. 159, (2))

$$N_i = -2(i+1)A_{i+1} - a'\frac{\partial A_{i+1}}{\partial a'},$$

und nach §. 157, [7]

$$a'\frac{\partial \mathrm{A}_{i+1}}{\partial a'} + a\frac{\partial \mathrm{A}_{i+1}}{\partial a} = -\mathrm{A}_{i+1}.$$

Auch ist, wenn man vorübergehend $\frac{a}{a'^2} = \mathfrak{A}$ setzt, wodurch

$$A_1 = \mathrm{A}_1 - \mathfrak{A}$$

wird (§. 158):

$$a'\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial a'} + a\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial a} = -\mathfrak{A}.$$

Mithin ist auch für jeden Werth von i (ebendas.)

$$a'\frac{\partial A_{i+1}}{\partial a'} + a\frac{\partial A_{i+1}}{\partial a} = -A_{i+1}.$$

Dies giebt

$$N_i = -(2i+1)A_{i+1} + a\frac{\partial A_{i+1}}{\partial a}$$

und

$$\frac{\partial N_i}{\partial a} = -2i\frac{\partial A_{i+1}}{\partial a} + a\frac{\partial^2 A_{i+1}}{\partial a^2}.$$

Hiermit aber findet sich

III. $$[(ik+1)^2 - 1]E_i = \frac{(i+1)(2i+1)}{ik+1}aA_{i+1}$$
$$+\frac{i^2k-1}{ik+1}a^2\frac{\partial A_{i+1}}{\partial a} - \frac{1}{2}a^3\frac{\partial^2 A_{i+1}}{\partial a^2},$$

und nach der Gleichung [4] wird

IV. $$(ik+1)H_i = -\frac{(i+1)a}{2(ik+1)}\left[(2i+1)A_{i+1} - a\frac{\partial A_{i+1}}{\partial a}\right] - 2E_i.$$

Mit diesen Formeln I, ... IV lassen sich die Werthe von $D_i \dots H_i$ für $i = 1, 2, 3, \dots$ und $i = -1, -2, -3, \dots$ berechnen, und man hat alsdann die von den Excentricitäten abhängigen Störungen des Radius Vector

$$= m'e[D_1\cos(u+\alpha) + D_2\cos(2u+\alpha) + \dots$$
$$+ D_{-1}\cos(u-\alpha) + D_{-2}\cos(2u-\alpha) + \dots]$$
$$+ m'e'[E_1\cos(u+\beta) + \dots + E_{-1}\cos(u-\beta) + \dots]$$

und die Störungen der Länge

$$= m'e[G_1\sin(u+\alpha) + G_2\sin(2u+\alpha) + \dots$$
$$- G_{-1}\sin(u-\alpha) - G_{-2}\sin(2u-\alpha) - \dots]$$
$$+ m'e'[H_1\sin(u+\beta) + \dots - H_{-1}\sin(u-\beta) - \dots].$$

Die Bestimmung der Glieder, für welche $i = 0$ ist, macht eine besondere, dem folgenden Kapitel vorbehaltene Untersuchung nöthig, da nach den Formeln I, ... IV die Coefficienten $D_i, \ldots H_i$ durch Brüche ausgedrückt werden, deren Nenner, gleich $(ik + 1)^2 - 1$, für $i = 0$ ebenfalls Null werden.

§. 162. Es bleibt uns noch übrig die Wirkung der Kraft W zu bestimmen, welche eine auf der Bahnebene von m perpendikulare Richtung hat und daher rührt, dass m und m' sich nicht in derselben Ebene um die Sonne bewegen. Die Wirkung dieser Kraft besteht im Allgemeinen darin, dass die Bahnebene von m in eine schwankende Bewegung gesetzt wird, oder, was dasselbe ist, dass der Planet von einer gewissen mittleren durch die Sonne gehenden Ebene sich bald auf die eine, bald auf die andere Seite entfernt. Indem wir nun ähnlicher Weise, wie beim Monde in §. 136, die letztere Ebene zur Grundebene wählen, setzen wir in Bezug auf sie die Neigung und die Länge des aufsteigenden Knotens von m' gleich ι und ϑ. Seien ferner die auf dieselbe Ebene bezogenen Breiten von m und m' gleich b und b', von denen erstere, weil sie sowohl für $m' = 0$, als für $\iota = 0$ verschwindet, von der Ordnung $m'\iota$ sein muss. Für die Breite b' hat man

$$\sin b' = \sin \iota \sin (l' - \vartheta) ,$$

und wenn man mit m' multiplicirt und Grössen nicht mehr beachtet, die über die Ordnung von $m'\iota$ hinausliegen:

$$m' \sin b' = m'\iota \sin (\lambda' - \vartheta) ,$$

worin unter b' auch die auf die wirkliche Bahnebene von m bezogene Breite verstanden werden kann, weil der Unterschied zwischen letzterer und der auf die Grundebene bezogenen Breite von m' offenbar von der Ordnung $m'\iota$ ist.

Man setze jetzt noch, wie bei der Mondstheorie in §. 136, die perpendikular zur Grundebene auf m wirkende Kraft, nachdem sie mit $n^2 a$ dividirt worden, gleich U_1, so ist nach den ebendaselbst gemachten Schlüssen und nach §. 152

$$U_1 = -b + W_1 = -b + m' a^2 R ,$$

also (§. 153)

$$U_1 = -b + m' a^2 \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{a'^3}\right) a' \sin b'$$

$$= -b + m' \iota a^2 a' \left(\frac{1}{2} \sum B_i \cos iu - \frac{1}{a'^3}\right) \sin (\lambda' - \vartheta),$$

(§. 157), oder wenn man

$$\frac{1}{2}B_0 - \frac{1}{a'^3} = \frac{1}{2}B_0\,, \qquad B_1 = B_1\,, \qquad B_2 = B_2\,, \text{ etc.}$$

setzt (vergl. §. 158):

$$U_1 = -b + \frac{1}{2}m'\iota a^2 a' \sin(\lambda' - \vartheta)\sum B_i \cos iu\,.$$

Es ist aber

$$\sin(\lambda' - \vartheta)\sum B_i \cos iu = \sum B_i \sin(iu + \lambda' - \vartheta)$$
$$= \sum B_i \sin[(i-1)u + \lambda - \vartheta] = \sum B_{i+1} \sin(iu + \gamma)\,,$$

wenn man

$$\lambda - \vartheta = \gamma$$

setzt; folglich

$$U_1 = -b + \frac{1}{2}m'\iota a^2 a' \sum B_{i+1} \sin(iu + \gamma)\,.$$

Man ersieht hieraus, dass b von der Form

$$b = m'\iota \sum K_i \sin(iu + \gamma)$$

anzunehmen ist. Dadurch wird das vorige

$$U_1 = m'\iota \sum \left(\frac{1}{2}a^2 a' B_{i+1} - K_i\right) \sin(iu + \gamma)\,.$$

Geradezu aber folgt aus dieser Form für b die Kraft, welche den Planeten, in perpendikularer Richtung auf der Grundebene, treibt, gleich $a\dfrac{d^2b}{dt^2}$, und damit

$$U_1 = \frac{d^2 b}{n^2 dt^2} = -m'\iota \sum (ik+1)^2 K_i \sin(iu + \gamma)\,.$$

Die Vergleichung beider Ausdrücke ergiebt

$$\frac{1}{2}a^2 a' B_{i+1} - K_i = -(ik+1)^2 K_i\,,$$

folglich

$$\text{V.} \qquad [(ik+1)^2 - 1]\, K_i = -\frac{1}{2}a^2 a' B_{i+1}\,,$$

und es ist, nachdem man damit die Werthe von K_i für $i = 1, 2, 3, \ldots$ und $-1, -2, -3, \ldots$ berechnet hat:

$$b = m'\iota\,[K_1 \sin(u + \gamma) + K_2 \sin(2u + \gamma) + \ldots$$
$$- K_{-1} \sin(u - \gamma) - K_{-2} \sin(2u - \gamma) - \ldots]\,.$$

Für $i = 0$ wird K_i nach V. unendlich gross, welches nicht sein kann. Die Untersuchung der Modification, welche deshalb die für b angenommene Form erleiden muss, bleibt für das folgende Kapitel aufgespart.

§. 163. Wir haben in dem Vorhergehenden die Störungen zu berechnen gelernt, welche ein einzelner Planet im Laufe eines anderen hervorbringt, während doch in der Natur jeder Planet von je-

dem der übrigen zugleich gestört wird. Indessen haben wir deshalb keine neuen Formeln zu entwickeln nöthig, so lange wir uns, wie im Bisherigen, nur auf die erste Potenz der störenden Massen beschränken. Denn so wie man, um den durch m' gestörten Lauf von m zu berechnen, die elliptische Bewegung von m zu Grunde legt und die mit m' multiplicirten Glieder zu bestimmen sucht, die wegen der Störung durch m' zu den elliptischen Coordinaten von m hinzuzufügen sind, so wird man, um die durch m' und m'' gleichzeitig gestörte Bewegung von m zu finden, statt der elliptischen, die durch m' gestörte Bewegung von m als Basis nehmen und die wegen der Störung durch m'' hinzuzufügenden und daher mit m'' multiplicirten Glieder zu berechnen suchen. Vernachlässigt man nun dabei die höheren Potenzen von m' und m'', und damit auch das Product $m'm''$, so können diese letzteren Glieder keine anderen sein, als welche sich aus der Störung der elliptischen Bewegung von m durch m'' allein ergeben. Dasselbe gilt auch bei jeder grösseren Anzahl störender Massen.

Ueberhaupt also wird man, um den gestörten Lauf eines Planeten zu berechnen, die Störungen, welche jeder der übrigen Planeten für sich hervorbringt, nach den vorhin entwickelten Formeln zu bestimmen und die Summe aller dieser Störungen zu dem elliptischen Orte des ersteren hinzuzufügen haben.

Drittes Kapitel.

Theorie der Säcularstörungen.

§. 164. Die Schwierigkeiten, auf welche wir im vorigen Kapitel stiessen, als bei Bestimmung der Ungleichheiten des Radius Vector, der Länge und der Breite die Coefficienten derjenigen Glieder, für welche $i = 0$ ist, und deren Argumente daher α, β (§. 161) und γ (§. 162) sind, sich unendlich gross fanden, welches doch nicht sein kann, — diese Schwierigkeiten sind denen ganz ähnlich, welchen wir in der Mondstheorie in §. 125 und §. 138 begegneten, indem wir dort gleichfalls die Coefficienten der Störungsglieder, welche die vom Perigäum und die vom Knoten an gerechnete Länge des Mondes zu Argumenten haben, nicht ohne Weiteres zu bestimmen vermochten.

Wir wollen daher versuchen, ob wir die jetzigen Schwierigkeiten auf ähnliche Weise, wie beim Monde, also dadurch werden beseitigen können, dass wir die Apsiden und die Knoten nicht mehr, wie bisher, ruhend, sondern mit constanten Geschwindigkeiten sich bewegend annehmen. Wir wollen mit der Bewegung der Apsiden den Anfang machen, und zuerst die zu dieser Bewegung nöthigen Kräfte zu bestimmen suchen.

Werde zu dem Ende

$$(1) \qquad e\cos\omega = f \quad \text{und} \quad e\sin\omega = g$$

gesetzt. Hierdurch werden bei der rein elliptischen Bewegung, — denn wir abstrahiren jetzt von allen übrigen Störungen, — die Coordinaten:

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos(\lambda - \omega) = 1 - f\cos\lambda - g\sin\lambda\ ,$$

$$l = \lambda + 2e\sin(\lambda - \omega) = \lambda + 2f\sin\lambda - 2g\cos\lambda\ ,$$

worin jetzt nicht mehr λ allein, sondern, wegen der Apsidenbewegung, auch noch f und g veränderlich zu nehmen sind. Die Geschwindigkeiten letzterer Aenderungen werden, weil sie sowohl für $m' = 0$, als für $e = 0$ verschwinden, die kleinen Grössen m' und e zu Factoren haben, also von der Ordnung $m'e$ sein.

Indem wir nun diese Geschwindigkeiten, nachdem sie mit n dividirt worden, oder $\frac{df}{ndt}$ und $\frac{dg}{ndt}$, resp. gleich f_1 und g_1 setzen, erhalten wir durch Differentiation von r und l:

$$\frac{dr}{nadt} = (f - g_1)\sin\lambda - (g + f_1)\cos\lambda\ ,$$

$$\frac{dl}{ndt} = 1 + 2(f - g_1)\cos\lambda + 2(g + f_1)\sin\lambda\ .$$

Weil f_1 und g_1 von der Ordnung $m'e$ sind, so werden die Geschwindigkeiten ihrer Aenderungen, oder $\frac{df_1}{dt}$ und $\frac{dg_1}{dt}$, da diese Aenderungen ebenfalls nur durch m' bewirkt werden können, von der Ordnung m'^2e und folglich hier zu vernachlässigen sein. Es kommt daher, wenn man letztere Gleichungen abermals differentiirt:

$$\frac{d^2r}{n^2adt^2} = (f - 2g_1)\cos\lambda + (g + 2f_1)\sin\lambda\ ,$$

$$\frac{d^2l}{n^2dt^2} = -2(f - 2g_1)\sin\lambda + 2(g + 2f_1)\cos\lambda\ .$$

Hieraus folgt, wenn bloss die von der Störung herrührenden, also mit f_1 und g_1 multiplicirten, Glieder berücksichtigt und Producte, wie fg_1 etc., als von der Ordnung e^2m', weggelassen werden

$$T_1 = \frac{-r\,dl^2 + d^2 r}{n^2 a\,dt^2} = 2g_1 \cos\lambda - 2f_1 \sin\lambda \ ,$$

$$V_1 = \frac{2\,dr\,dl + r\,d^2 l}{n^2 a\,dt^2} = 2g_1 \sin\lambda + 2f_1 \cos\lambda \ .$$

Dies sind also die Grössen, die man, wegen der Veränderlichkeit von f und g, auf der rechten Seite der Gleichungen (5) in §. 160 noch hinzuzufügen hat. Hierdurch werden jene Gleichungen, wenn man von ihnen bloss die Glieder, in denen $i = 0$ (mithin das dortige $g = 1$) ist, als die hier allein in Betracht kommenden, beibehält:

$$T_1 = -2m'e(C_0 + D_0 + G_0)\cos\alpha - 2m'e'(E_0 + H_0)\cos\beta$$
$$+ 2g_1 \cos\lambda - 2f_1 \sin\lambda \ ,$$

$$V_1 = -m'e(C_0 + 2D_0 + G_0)\sin\alpha - m'e'(2E_0 + H_0)\sin\beta$$
$$+ 2g_1 \sin\lambda + 2f_1 \cos\lambda \ .$$

Die damit zu vergleichenden Werthe von T_1 und V_1, (3*) in §. 160 und (4) in §. 159, reduciren sich ähnlicher Weise auf

$$T_1 = m'e\left(\frac{1}{2}a^2\frac{\partial M_0}{\partial a} + 3C_0 + 2D_0\right)\cos\alpha + m'e'\left(\frac{1}{2}a^2\frac{\partial N_0}{\partial a} + 2E_0\right)\cos\beta \ ,$$

$$V_1 = -\frac{1}{2}m'e'aN_0 \sin\beta \ .$$

Die Gleichsetzung dieser doppelten Ausdrücke für T_1 und V_1, — denn alle übrigen hier weggelassenen Glieder sind bereits ausgeglichen worden, — giebt, wenn man zur Abkürzung

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2}a^2\frac{\partial M_0}{\partial a} + 5C_0 + 4D_0 + 2G_0 \ , \\ E &= \frac{1}{2}a^2\frac{\partial N_0}{\partial a} + 4E_0 + 2H_0 \ , \\ G &= C_0 + 2D_0 + G_0 \ , \\ H &= -\frac{1}{2}aN_0 + 2E_0 + H_0 \end{aligned} \qquad (2$$

setzt und für α und β ihre Werthe $\lambda - \omega$ und $\lambda - \omega'$ schreibt:

$$m'eD\cos(\lambda - \omega) + m'e'E\cos(\lambda - \omega') = 2g_1 \cos\lambda - 2f_1 \sin\lambda \ ,$$

$$m'eG\sin(\lambda - \omega) + m'e'H\sin(\lambda - \omega') = 2g_1 \sin\lambda + 2f_1 \cos\lambda \ .$$

Jede dieser beiden Gleichungen kann auf die Form

$$A\cos\lambda = B\sin\lambda$$

gebracht werden, worin A und B Functionen der Elemente der Bahnen von m und m' sind. Da hiernach A und B, wenigstens während Eines Umlaufs von m, also während λ von 0 bis 360°

wächst, als constant angesehen werden können, so muss die Gleichung $A\cos\lambda = B\sin\lambda$ unabhängig von λ bestehen, und es müssen daher A und B einzeln Null sein. Jede der beiden Gleichungen zerfällt daher in zwei, die man erhält, wenn man das eine Mal $\lambda = 0$, das andere Mal $\lambda = 90^0$ sein lässt. Somit ergeben sich, wenn man noch f und g statt $e\cos\omega$ und $e\sin\omega$, und eben so

$$(1^*) \qquad e'\cos\omega' = f' \quad \text{und} \quad e'\sin\omega' = g'$$

setzt, die vier Gleichungen:

$$(3) \qquad m'Df + m'Ef' = 2g_1\,, \qquad m'Dg + m'Eg' = -2f_1\,.$$

$$(4) \qquad m'Gf + m'Hf' = 2g_1\,, \qquad m'Gg + m'Hg' = -2f_1\,.$$

Es folgt hieraus zunächst:

$$(D-G)f + (E-H)f' = 0\,,$$

$$(D-G)g + (E-H)g' = 0\,,$$

mithin

$$(D-G)(fg' - f'g) = 0\,.$$

Weil aber

$$fg' - f'g = ee'\sin(\omega' - \omega)\,,$$

wenigstens im Allgemeinen, nicht Null ist, so ist

$$D = G\,, \quad \text{folglich auch} \quad E = H\,,$$

und wenn wir hierin für $D, \ldots H$ aus (2) ihre Werthe substituiren:

$$(5) \qquad \begin{aligned} 2D_0 + G_0 &= -\frac{1}{2}a^2\frac{\partial M_0}{\partial a} - 4C_0\,, \\ 2E_0 + H_0 &= -\frac{1}{2}a^2\frac{\partial N_0}{\partial a} - \frac{1}{2}aN_0\,. \end{aligned}$$

Somit hat uns die Annahme der Veränderlichkeit von f und g zu den vier Gleichungen (3) und (5) geführt, in deren zwei ersteren D und E die aus (2) in Verbindung mit (5) fliessenden Werthe

$$D = -\frac{1}{2}a^2\frac{\partial M_0}{\partial a} - 3C_0\,,$$

$$E = -\frac{1}{2}a^2\frac{\partial N_0}{\partial a} - aN_0$$

haben.

§. 165. Die zuletzt gefundenen Werthe von D und E lassen sich auf sehr einfache Formen reduciren. Aus (2*) in §. 159 folgt

$$\frac{\partial M_0}{\partial a} = -a\frac{\partial^2 A_0}{\partial a^2}\,,$$

und nach §. 158 zu Ende ist

$$C_0 = -\frac{1}{3} a^2 \frac{\partial A_0}{\partial a} .$$

Da nun $A_0 = \mathrm{A}_0$ (§. 158), so wird

$$D = \frac{1}{2} a^3 \frac{\partial^2 \mathrm{A}_0}{\partial a^2} + a^2 \frac{\partial \mathrm{A}_0}{\partial a} ,$$

und wenn man darin für die Differentialquotienten von A_0 aus §. 157 ihre Werthe setzt:

$$D = \frac{1}{2} a^2 a' \mathrm{B}_1 .$$

Ferner ist nach §. 161

$$N_0 = -A_1 + a \frac{\partial A_1}{\partial a} ,$$

und wegen $A_1 = \mathrm{A}_1 - \frac{a}{a'^2}$

$$N_0 = -\mathrm{A}_1 + a \frac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial a}$$

$$= a a' \mathrm{B}_2 - a^2 \mathrm{B}_1 ,$$

wenn man in (6) des §. 157 $i = -1$ setzt: folglich

$$\frac{\partial N_0}{\partial a} = a \frac{\partial^2 \mathrm{A}_1}{\partial a^2} = 2 a \mathrm{B}_1 - a' \mathrm{B}_2$$

nach [11] ebendas. Hiermit aber wird

$$E = -\frac{1}{2} a^2 a' \mathrm{B}_2 .$$

Nun haben wir im vorigen Paragraphen die Veränderlichkeit von f und g als lediglich von der Veränderlichkeit der Länge des Perihels herrührend angenommen. Bei dieser Voraussetzung folgt aus (1) durch Differentiation:

$$f_1 n dt = -e \sin\omega d\omega = -g d\omega ,$$

$$g_1 n dt = e \cos\omega d\omega = f d\omega ,$$

folglich

$$f f_1 + g g_1 = 0 .$$

Nach (3) ist aber diese Summe

$$= \frac{1}{2} m' E (g f' - f g') ,$$

also nicht Null, weil B_2, und daher auch E, nicht verschwindet. Mithin sind wir genöthigt, ausser ω auch noch die Excentricität e veränderlich zu setzen. Unter dieser Hypothese erhalten wir

$$f_1 n dt = \cos\omega \,.\, de - \sin\omega \,.\, e d\omega ,$$

$$g_1 n dt = \sin\omega \,.\, de + \cos\omega \,.\, e d\omega .$$

Hiermit werden die Gleichungen (3), nachdem in ihnen für $f, \ldots g'$ ihre Werthe aus (1) und (1*) substituirt worden:

$$\sin\omega \,.\, de + \cos\omega \,.\, ed\omega = \frac{1}{2} m' n dt (De\cos\omega + Ee'\cos\omega'),$$

$$-\cos\omega \,.\, de + \sin\omega \,.\, ed\omega = \frac{1}{2} m' n dt (De\sin\omega + Ee'\sin\omega');$$

folglich

$$de = \frac{1}{2} m' n dt \,.\, Ee' \sin(\omega - \omega'),$$

$$ed\omega = \frac{1}{2} m' n dt (De + Ee'\cos(\omega - \omega')),$$

wodurch, wenn man noch für D und E ihre so eben erhaltenen Werthe setzt, die Geschwindigkeiten $\frac{de}{dt}$ und $\frac{d\omega}{dt}$, mit denen sich e und ω ändern, gefunden sind.

§. 166. Zur Bestimmung der vier Coefficienten D_0, E_0, G_0, H_0 in den Störungsgliedern von r und l, deren Argumente α und β oder $\lambda - \omega$ und $\lambda - \omega'$ sind, sind uns nur die Gleichungen (5) übrig, die nach Substitution der im vorigen Paragraphen für

$$C_0, \quad \frac{dM_0}{da}, \quad N_0 \quad \text{und} \quad \frac{dN_0}{da}$$

bemerkten Werthe sich verwandeln in

$$(5^*) \qquad \begin{aligned} 2D_0 + G_0 &= \frac{4}{3} a^2 \frac{\partial A_0}{\partial a} + \frac{1}{2} a^3 \frac{\partial^2 A_0}{\partial a^2}, \\ 2E_0 + H_0 &= \frac{1}{2} a A_1 - \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial A_1}{\partial a} - \frac{1}{2} a^3 \frac{\partial^2 A_1}{\partial a^2}. \end{aligned}$$

Dass somit die vier Coefficienten sich nicht einzeln, sondern nur die zwei Aggregate

$$2D_0 + G_0 \quad \text{und} \quad 2E_0 + H_0$$

sich bestimmen lassen, und dass daher einer der beiden Coefficienten D_0 und G_0, so wie einer der beiden E_0 und H_0, nach Willkür genommen werden kann, liegt ähnlicher Weise, wie dies beim Monde in §. 125 gezeigt worden, in der Natur der Sache. Es ist nämlich, wenn man in den für r und l in §. 160 angenommenen Formen bloss die Glieder berücksichtigt, welche $\lambda - \omega$ und $\lambda - \omega'$ zu Argumenten haben:

$$(a) \qquad \begin{aligned} \frac{r}{a} &= 1 - (e - m'eD_0)\cos(\lambda - \omega) + m'e'E_0\cos(\lambda - \omega'), \\ l &= \lambda + (2e + m'eG_0)\sin(\lambda - \omega) + m'e'H_0\sin(\lambda - \omega'). \end{aligned}$$

Setzt man nun

$$\left.\begin{aligned}(2e + m'eG_0)\cos\omega + m'e'H_0\cos\omega' &= 2e_,\cos\omega_, ,\\ (2e + m'eG_0)\sin\omega + m'e'H_0\sin\omega' &= 2e_,\sin\omega_, ,\end{aligned}\right\}\quad (b)$$

$$\left.\begin{aligned}(e - m'eD_0)\cos\omega - m'e'E_0\cos\omega' &= e_{,,}\cos\omega_{,,} .\\ (e - m'eD_0)\sin\omega - m'e'E_0\sin\omega' &= e_{,,}\sin\omega_{,,} ,\end{aligned}\right\}\quad (c)$$

wo $e_,$ und $\omega_,$, eben so wie $e_{,,}$ und $\omega_{,,}$, von e und ω nur um Grössen von der Ordnung $m'e$ oder $m'e'$ verschieden sein werden, so wird

$$\left.\begin{aligned}l &= \lambda + 2e_,\sin(\lambda - \omega_,) ,\\ \frac{r}{a} &= 1 - e_{,,}\cos(\lambda - \omega_{,,}) .\end{aligned}\right\}\quad d)$$

Zu den rein elliptischen Werthen von r und l Glieder mit den Argumenten $\lambda - \omega$ und $\lambda - \omega'$ hinzuzufügen, kommt daher darauf hinaus, die beiden Elemente $e_,$ und $\omega_,$, oder $e_,\cos\omega_,$ und $e_,\sin\omega_,$, mit denen man die Länge berechnet hat, um etwas geändert bei der Berechnung des Radius Vector anzunehmen. Die Theorie der Gravitation kann mithin nur diese beiden Aenderungen zu bestimmen lehren, und wir haben folglich, indem wir vier durch die Theorie zu ermittelnde Constanten $D_0, \ldots H_0$ einführten, zwei zu viel angenommen.

Die Aenderungen selbst ergeben sich aus (b) und (c):

$$\left.\begin{aligned}e_{,,}\cos\omega_{,,} - e_,\cos\omega_, &= - m'e(D_0 + \tfrac{1}{2}G_0)\cos\omega - m'e'(E_0 + \tfrac{1}{2}H_0)\cos\omega' ,\\ e_{,,}\sin\omega_{,,} - e_,\sin\omega_, &= - m'e(D_0 + \tfrac{1}{2}G_0)\sin\omega - m'e'(E_0 + \tfrac{1}{2}H_0)\sin\omega' ,\end{aligned}\right\}\quad (e)$$

worin, wegen der Vernachlässigung des Quadrates von m', statt e und ω auch $e_,$ und $\omega_,$ oder $e_{,,}$ und $\omega_{,,}$ gesetzt werden können. In Uebereinstimmung mit 5*) geht hieraus hervor, dass $2D_0 + G_0$ und $2E_0 + H_0$ die allein durch die Theorie bestimmbaren Constanten sind.

Für den astronomischen Zweck ist es am bequemsten, $e_,$ und $\omega_,$ als Elemente der Bahn anzunehmen und daher bei der Länge die Störungsglieder, deren Argumente $\lambda - \omega$ und $\lambda - \omega'$ sind, wegzulassen. Für den Radius Vector ist alsdann, wenn man $e_{,,}\cos\omega_{,,}$ und $e_{,,}\sin\omega_{,,}$ mittelst (e) aus (d) eliminirt:

$$\begin{aligned}\frac{r}{a} = 1 - [e_, - m'e_,(D_0 + \tfrac{1}{2}G_0)]\cos(\lambda - \omega_,)\\ + m'e'(E_0 + \tfrac{1}{2}H_0)\cos(\lambda - \omega') ,\end{aligned}$$

ein Resultat, zu dem man auch unmittelbar gelangt, wenn man bei der Unbestimmtheit zwischen den vier Grössen $D_0, \ldots H_0$ die Coefficienten G_0 und H_0 in (5*) und (a) geradezu Null setzt.

§. 167. Eben so, wie beim Radius Vector und der Länge, wurde im vorigen Kapitel auch bei der Entwickelung der Störungen der Breite der Coefficient des Gliedes, für welches $i = 0$, und dessen Argument daher $\lambda - \vartheta$ war, unendlich gross gefunden. Zur Beseitigung dieses der Natur der Sache widersprechenden Ergebnisses wollen wir, wie in dem ganz ähnlichen Falle beim Monde, annehmen, dass die mittlere Bahnebene des Planeten m nicht fest sei, sondern dass bei unveränderter Neigung derselben gegen die Bahn von m', ihre Knoten mit dieser Bahn sich gleichförmig an letzterer fortbewegen. Indem wir alsdann die Breite auf die Lage, welche die mittlere Bahn von m in der Epoche hat, beziehen, haben wir nach §. 138 zu dem für die Breite in §. 162 angenommenen Ausdrucke noch ein Glied von der Form

$$m'\iota Hnt \cos(\lambda - \vartheta)$$

hinzuzufügen, worin $m'Hn$ die constante Geschwindigkeit der Knoten ausdrückt. Mit Weglassung der Störungsglieder, in denen i nicht Null ist, setzen wir demnach:

$$b = m'\iota Hnt \cos(\lambda - \vartheta) + m'\iota K_0 \sin(\lambda - \vartheta).$$

Hieraus folgen für die Kraft U_1 die zwei Ausdrücke (§. 162):

$$U_1 = -b + \frac{1}{2} m'\iota a^2 a' B_1 \sin(\lambda - \vartheta)$$
$$= -m'\iota Hnt \cos(\lambda - \vartheta) + m'\iota\left(\frac{1}{2} a^2 a' B_1 - K_0\right) \sin(\lambda - \vartheta),$$
$$U_1 = \frac{a d^2 b}{a n^2 dt^2} = -m'\iota Hnt \cos(\lambda - \vartheta) - m'\iota(2H + K_0) \sin(\lambda - \vartheta).$$

Damit nun dieselben identisch werden, haben wir nur

$$H = -\frac{1}{4} a^2 a' B_1$$

zu setzen, woraus die Geschwindigkeit der Knotenbewegung

$$m'Hn = -\frac{1}{4} m' n a^2 a' B_1$$

folgt. Da, wie aus den in §. 154 entwickelten Reihen hervorgeht, B_1 für jedes Planetenpaar eine positive Grösse ist, so ist die Bewegung selbst rückgängig. — Die Constante K_0 bleibt — aus demselben Grunde wie h_1 in §. 138 — unbestimmt und kann gleich Null gesetzt werden.

§. 168. Obschon die Bahn von m ihre Neigung gegen die Bahn von m' nicht ändert, so wird doch, wegen des Rückwärtsgehens der Knoten der ersteren Bahn auf der letzteren, die Neigung der ersteren

gegen irgend eine andere feste Ebene veränderlich sein. Um dieses näher zu untersuchen, seien auf der Oberfläche der Himmelskugel P und P' (Fig. 43) die Nordpole der Bahnen von m und m', also der Bogen $PP' = \iota$ (vergl. §. 142). Der Nordpol der festen Ebene oder des grössten Kreises, in welchem die Kugelfläche von dieser Ebene geschnitten wird, sei E; er werde den Polen P und P' so nahe liegend angenommen, dass seine Abstände von ihnen mit PP' von gleicher Ordnung sind, und dass daher das sphärische Dreieck EPP' als ein ebenes betrachtet werden kann. Sei O der Punkt, von welchem an in dem festen Kreise die Längen gerechnet werden, O_1 der Anfangspunkt der in der Bahn von m gezählten Längen und K der eine der beiden Knoten dieser Bahn auf dem festen Kreise. Nach der in §. 47 gemachten Bestimmung ist

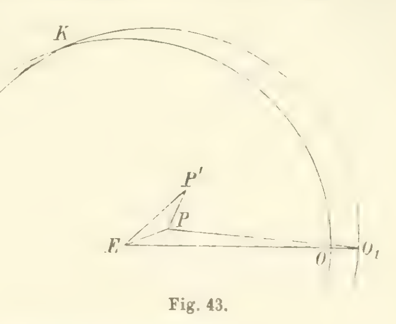


Fig. 43.

$$O_1 K = O K$$

zu nehmen; wegen der Kleinheit des Winkels $OKO_1 = EP$, und weil $EOK = 90^0$, wird O_1 einerlei mit dem Durchschnitte von EO mit der Bahn von m sein.

Werden nun in Bezug auf die feste Ebene die Neigungen der Bahnen von m und m' gleich J und J', und die Längen ihrer aufsteigenden Knoten gleich Θ und Θ' gesetzt, so ist

$$EP = J, \quad EP' = J'$$

und (§. 142)

$$OEP = 270^0 + \Theta = \Theta - 90^0 ,$$

$$OEP' = \Theta' - 90^0, \quad \text{so wie} \quad O_1 PP' = \vartheta - 90^0 .$$

Bezieht man daher P und P' auf ein in der Ebene EPP' gelegenes rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt E ist, und dessen Abscissenaxe die Richtung EO hat, und nennt p, q und p', q' ihre Coordinaten, so ist

$$p = J\cos(\Theta - 90^0), \quad q = J\sin(\Theta - 90^0) ,$$

d. i.

$$p = J\sin\Theta, \qquad q = -J\cos\Theta ,$$

und eben so

$$p' = J'\sin\Theta' \qquad q' = -J'\cos\Theta' . \tag{a}$$

Da ferner PO_1 als parallel mit EO betrachtet werden kann, so

sind die Projectionen von PP' auf die beiden Axen

$$p' - p = \iota \cos(\vartheta - 90^0), \; q' - q = \iota \sin(\vartheta - 90^0) ,$$

d. i.

$$(b) \qquad p' - p = \iota \sin \vartheta , \qquad q' - q = - \iota \cos \vartheta .$$

Die Frage ist nun nach den Aenderungen von J und Θ oder p und q, als den Elementen, wodurch die Lage der Bahn von m gegen die feste Ebene bestimmt wird, wenn, bei constant bleibender Neigung ι der Bahn von m gegen die von m', erstere an letzterer um $d\vartheta$ fortrückt. Es kommt aber, wenn man die Gleichungen (b) nach p, q und ϑ differentiirt:

$$(c) \qquad \begin{aligned} dp &= - \iota \cos \vartheta d\vartheta = (q' - q) d\vartheta , \\ dq &= - \iota \sin \vartheta d\vartheta = - (p' - p) d\vartheta , \end{aligned}$$

und wenn man hierin für p, q und p', q' und die Differentiale von p, q ihre aus (a) fliessenden Werthe substituirt:

$$dJ . \sin \Theta + J d\Theta . \cos \Theta = (J \cos \Theta - J' \cos \Theta') d\vartheta ,$$

$$- dJ . \cos \Theta + J d\Theta . \sin \Theta = (J \sin \Theta - J' \sin \Theta') d\vartheta .$$

Hieraus erhält man

$$dJ = - J' d\vartheta . \sin (\Theta - \Theta') ,$$

$$J d\Theta = J d\vartheta - J' d\vartheta . \cos (\Theta - \Theta') .$$

und damit die Geschwindigkeiten $\frac{dJ}{dt}$ und $\frac{d\Theta}{dt}$, mit denen sich J und Θ ändern, wenn man diese Gleichungen noch mit dt dividirt und für $\frac{d\vartheta}{dt}$ seinen in §. 167 gefundenen Werth

$$\frac{d\vartheta}{dt} = - \frac{1}{4} m' n a^2 a' B_1$$

setzt.

§. 169. Die in den §§. 165 und 168 erhaltenen Aenderungen, welche die Elemente e, ω, J und Θ durch m' erleiden, nennt man wegen der Langsamkeit, mit der sie vor sich gehen, Säcularstörungen. Ihr charakteristisches Merkmal besteht darin, dass sie bloss von den Elementen der Bahnen von m und m' abhängen, nicht aber von den Oertern dieser Planeten in ihren Bahnen, wie dies bei den in den beiden vorigen Kapiteln entwickelten Störungen der Fall war, als welche so oft zu denselben Werthen zurückkehren, als die beiden Planeten wieder dieselbe Stellung gegen einander, oder auch gegen ihre Perihelien und Knoten, einnehmen, und die deshalb

periodische Störungen genannt werden (§. 109). Während diese letzteren nur von kurzer Dauer und vorübergehender Wirkung sind, werden durch die säcularen Störungen die Elemente selbst und damit die Gestalt der Bahnen und ihre Lage im Raume allmählich geändert. Allerdings sind, streng genommen, auch die Säcularstörungen von periodischer Natur; allein ihre Perioden umfassen nicht selten Zehntausende, ja Hunderttausende von Jahren, und ihre Wirkungen können daher auf lange hinaus der Zeit proportional angesehen und nach den in §§. 165 und 168 erhaltenen Formeln berechnet werden.

Was die beiden noch übrigen Elemente a und ε betrifft, so sind nach denselben Schlüssen, wie bei der Mondstheorie (§§. 144 und 147), so lange wenigstens die Quadrate und höheren Potenzen der Excentricitäten und der Massen unberücksichtigt bleiben, die Säcularstörungen von a und ε Null. Indessen kann die nach §. 158 zu a zu setzende Constante

$$\frac{1}{2}\,m'aC'_0 = -\frac{1}{6}\,m'a^2\frac{\partial A_0}{\partial a}$$

ganz oder zum Theil in eine säculare Störung des Elementes ε verwandelt werden. Da nämlich

$$\lambda = nt + \varepsilon = n_1 t + \varepsilon + (n - n_1)\,t\ ,$$

so ist es einerlei, ob n zur mittleren Bewegung und ε constant, oder ob n_1 zur mittleren Bewegung genommen, und dem Elemente ε der der Zeit proportionale Zusatz $(n - n_1)\,t$ gegeben wird. Verwandelt man aber n in n_1, und bedeutet a_1 die zu n_1 gehörende mittlere Entfernung, ist also

$$a_1^3 n_1^2 = a^3 n^2 = k^2(M + m)\ ,$$

so ist, wenn man $n - n_1$ und $a - a_1$ als kleine Grössen von der Ordnung m' betrachtet:

$$3n_1(a - a_1) + 2a_1(n - n_1) = 0\ ,$$

folglich, wenn man

$$n - n_1 = -3m'n_1 g$$

setzt:

$$a - a_1 = 2m'a_1 g\ .$$

Die durch

$$r = a + \frac{1}{2}\,m'aC_0 \quad \text{und} \quad l = nt + \varepsilon$$

ausgedrückte Bewegung ist daher identisch mit der durch

$$r = a_1 + 2m'ga_1 + \frac{1}{2}\,m'a_1C_0 \quad \text{und} \quad l = n_1 t + \varepsilon - 3m'gn_1 t$$

ausgedrückten, wo g eine willkürliche Zahl ist, nach deren Bestim-

mung sich der Werth von a_1 richtet. Setzt man sie $= -\frac{1}{4} C_0$, so wird

$$r = a_1 \quad \text{und} \quad l = n_1 t + \varepsilon + \frac{3}{4} m' C_0 n_1 t ,$$

wobei das letzte Glied von l als die säculare Aenderung von ε betrachtet werden kann.

§. 170*. Wie schon bemerkt worden, lassen sich die Geschwindigkeiten, mit denen sich die Elemente e, ω, J und Θ ändern, als constant, wenigstens auf lange Zeit hinaus, ansehen. Da aber in den Ausdrücken für diese Geschwindigkeiten die sich ändernden Elemente selbst und ausserdem noch die Elemente des störenden Planeten m' vorkommen, welche letztere durch Einwirkung von m auf m' gleichfalls säculare Aenderungen erleiden, so werden auch die Geschwindigkeiten mit der Zeit andere und andere Werthe erhalten. Am leichtesten lässt sich diese zusammengesetzte Wirkung bei den Elementen J und Θ übersehen.

Sind, wie in §. 168, P und P' Fig. 44 die Nordpole der Bahnen von m und m', so ist nach §. 167 die Neigung $PP' = \iota$ constant, und die Knoten der Bahn von m gehen auf der von m' mit der constanten Geschwindigkeit $\frac{1}{4} m' n a^2 a' B_1$, welche C heisse, rückwärts, so dass, wenn Q den Ort von P am Ende des nächstfolgenden Zeitelements dt vorstellt, PQ auf PP' normal und der Winkel

$$P P' Q = C dt$$

ist. Bliebe demnach die Lage der Bahnebene von m', und damit P', unverändert, so würde P mit der Winkelgeschwindigkeit C rückwärts einen Kreis beschreiben, dessen Mittelpunkt P' wäre. Allein wegen der Störung, welche m' durch m erleidet, bewegt sich auch P' um P rückwärts mit einer Winkelgeschwindigkeit C', die aus C durch Vertauschung der Elemente von m und m' sich ergiebt und daher gleich $\frac{1}{4} m n' a'^2 a B_1$ ist, weil B_1, als der Coefficient eines Gliedes in der nach den Cosinus der Vielfachen von u entwickelten Function $U^{-\frac{3}{2}}$


Fig. 44.

(§. 157), eben so wie U selbst, von a und a' auf gleiche Weise abhängen muss. P' rückt daher normal auf PP' während des nächsten Zeittheilchens dt um eine Linie $P'Q'$ fort, so dass der Winkel

$$P' P Q' = C' dt$$

ist.

Hiernach kann man sich die beiden Pole aus ihrer ersten Lage P, P' in die nachherige Q, Q' dadurch gekommen denken, dass sich die Linie PP' um ihren Durchschnitt N mit QQ' gedreht hat. Weil Q und Q' auf entgegengesetzten Seiten von PP' liegen, so fällt N zwischen P und P', und dieses so, dass

$$PN : NP' = PQ : P'Q' = C : C' = m'n'a : mn'a' = m'\sqrt{a'} : m\sqrt{a} \,,$$

weil, bei der Vernachlässigung der Planetenmassen gegen die Sonnenmasse, $n^2 a^3 = n'^2 a'^3$ (§. 65) und daher

$$na : n'a' = \sqrt{a'} : \sqrt{a}$$

ist; der Drehungswinkel aber ist

$$PNQ = PP'Q + P'QQ' = (C + C')\,dt \,.$$

Dieselbe Betrachtung lässt sich nun für jedes folgende dt wiederholen, und wir gewinnen damit das merkwürdige Resultat,

dass die Pole der Bahnen von m und m' mit gleichen Winkelgeschwindigkeiten, $= C + C'$, Kreise rückwärts um einen ruhenden Punkt N beschreiben, von welchem sie nach entgegengesetzten Seiten in Entfernungen abstehen, die sich wie C und C', d. i. umgekehrt wie die Producte aus den Massen in die Quadratwurzeln der grossen Axen, verhalten;

oder mit anderen Worten:

dass sich die gemeinschaftliche Knotenlinie beider Bahnen mit der Winkelgeschwindigkeit $C + C'$ rückwärts in einer ruhenden Ebene (deren Pol N ist) dreht, mit welcher die beiden Bahnen nach entgegengesetzten Seiten hin unveränderliche, in dem Verhältnisse von C zu C' stehende Winkel machen.

§. 171. **Zusätze.** *a*) Sei E, wie in §. 168, ein von P und P' in geringer Entfernung liegender fester Punkt der Himmelskugel, auf welchen die Bewegungen von P und P' bezogen werden, und

$$EP = J, \quad EP' = J' \,.$$

Nach einem bekannten Satze der Geometrie hat man:

$$NP' \,.\, EP^2 + PN \,.\, EP'^2 = PP' \,.\, EN^2 + PP' \,.\, PN \,.\, NP' \,.$$

Weil auf der rechten Seite dieser Gleichung, infolge der Kreisbewegungen von P und P' um den festen Punkt N, sich bloss constante Grössen vorfinden, so muss auch die linke Seite constant sein. Berücksichtigen wir daher noch, dass die constanten Linien NP' und PN in dem Verhältnisse

$$C' : C = m\sqrt{a} : m'\sqrt{a'}$$

stehen, so ergiebt sich folgende zwischen den Neigungen J und J' bestehende merkwürdige Relation:

$$m\sqrt{a}\,.\,J^2 + m'\sqrt{a'}\,.\,J'^2 = \text{einer beständigen Grösse.}$$

Die Neigungen J und J' können hiernach nicht über gewisse Grenzen wachsen, und wenn die eine abnimmt, muss die andere zunehmen. — welches beides aber auch schon aus den Kreisbewegungen von P und P' folgt.

b) Die ruhende Ebene, welche N zum Pole hat, ist die unveränderliche Ebene des Systems der drei Körper M (Sonne, m und m'). Denn bedeuten F, F' und f die Flächengeschwindigkeiten der Radien Mm, Mm' und mm', wenn man bei unveränderter relativer Bewegung je zweier zu einem Radius gehörender Körper den einen ruhend annimmt, so wird die unveränderliche Ebene ihrer Lage nach durch Zusammensetzung der Flächen $M\,.\,m\,.\,F$, $M\,.\,m'\,.\,F'$ und $m\,.\,m'\,.\,f$ gefunden (§. 90), oder — weil es hier nur auf das gegenseitige Verhältniss dieser Flächen ankommt, und die dritte gegen die zwei ersten fast verschwindet — durch Zusammensetzung der zwei Flächen $m\,.\,F$ und $m'\,.\,F'$. Die Axe der unveränderlichen Ebene wird folglich gefunden, wenn man zwei auf den Flächen F und F' perpendikulare Linien, die sich wie $m\,.\,F$ und $m'\,.\,F'$ verhalten, zusammensetzt (§. 87).

Nun sind P und P' ersichtlich die Pole der Flächen F und F'. Heisst daher Z das Centrum der Himmelskugel, so haben die zwei zusammenzusetzenden Linien die Richtungen ZP und ZP'. Die durch Z gelegte Axe der unveränderlichen Ebene muss folglich mit ZP und ZP' in einer Ebene liegen, und die Sinus der Winkel der Axe mit ZP und ZP', oder auch die Winkel selbst, wegen der Kleinheit von PP', müssen sich — eben so wie bei zwei zusammenzusetzenden Kräften — wie $m'\,.\,F'$ und $m\,.\,F$ verhalten. Es ist aber

$$F = \frac{1}{2}\,na^2, \qquad F' = \frac{1}{2}\,n'a'^2$$

(§. 127, b) und daher

$$m'F' : mF = m'n'a'^2 : mna^2 = m'\sqrt{a'} : m\sqrt{a}$$
$$= C : C' = PN : NP'\,.$$

Mithin ist N selbst der Pol der unveränderlichen Ebene.

§. 172. Das in §. 170 durch geometrische Betrachtung erhaltene Resultat lässt sich ohne Schwierigkeit auch durch Analysis finden. — Man hat für die Bewegung des Pols P oder (p, q) die Gleichungen (c) in §. 168, oder wenn man $-Cdt$ statt $d\vartheta$ schreibt:

$$dp = -(q'-q)\,C\,dt\,,\quad dq = (p'-p)\,C\,dt\;; \qquad (\alpha)$$

und eben so für die Bewegung des Pols P' oder (p', q'), wenn man in (α) die auf m und m' bezüglichen Grössen mit einander verwechselt:

$$dp' = (q'-q)\,C'dt\,,\quad dq' = -(p'-p)\,C'dt\;. \qquad (\beta)$$

Aus diesen vier Gleichungen folgt:

$$C'dp + Cdp' = 0\,,\quad C'dq + Cdq' = 0\;.$$

Setzt man daher:

$$C'p + Cp' = (C+C')\,p_1\,,\quad C'q + Cq' = (C+C')\,q_1\,, \qquad (\gamma)$$

so sind dp_1 und dq_1 gleich Null, also p_1 und q_1 constant.

Ferner fliesst aus (α) und (β):

$$\left.\begin{aligned} dp'-dp &= (q'-q)\,(C+C')\,dt\,,\\ dq'-dq &= -(p'-p)\,(C+C')\,dt\,,\end{aligned}\right\} \qquad (\delta)$$

folglich

$$(p'-p)\,d(p'-p) + (q'-q)\,d(q'-q) =$$
$$= \frac{1}{2}\,d\,[(p'-p)^2 + (q'-q)^2] = \frac{1}{2}\,d\,.\,PP'^2 = 0\;.$$

Mithin bleibt PP' oder ι constant, und es wird folglich, wenn man

$$p'-p = \iota\cos\varphi\,,\qquad \text{also}\qquad q'-q = \iota\sin\varphi \qquad (\varepsilon)$$

setzt:

$$dp'-dp = -\iota\sin\varphi\,d\varphi\,,\quad dq'-dq = \iota\cos\varphi\,d\varphi\;.$$

Hiermit geht die eine, wie die andere, der beiden Gleichungen (δ) über in

$$d\varphi = -(C+C')\,dt\,,$$

und man kann daher

$$\varphi = -(C+C')\,t + D \qquad (\delta')$$

setzen, wo D einen constanten Winkel bedeutet.

Es folgt aber aus (ε) in Verbindung mit (γ):

$$\left.\begin{aligned} p &= p_1 - \frac{C}{C+C'}\,\iota\cos\varphi\,,\quad & p' &= p_1 + \frac{C'}{C+C'}\,\iota\cos\varphi\,,\\ q &= q_1 - \frac{C}{C+C'}\,\iota\sin\varphi\,,\quad & q' &= q_1 + \frac{C'}{C+C'}\,\iota\sin\varphi\,,\end{aligned}\right\} \qquad (\zeta)$$

worin noch für φ sein Werth aus (δ') zu substituiren ist.

Uebereinstimmend mit §. 170 beschreiben demnach die Pole (p, q) und (p', q'), oder P und P', um den ruhenden und immer zwischen ihnen liegenden Pol (p_1, q_1) oder N, Kreise mit den Halbmessern

$\frac{C}{C+C'}\,i$ und $\frac{C'}{C+C'}\,i$ mit der gemeinschaftlichen constanten Winkelgeschwindigkeit $-(C+C')$. Zugleich sieht man, wie mittelst der letzteren Formeln die Oerter von P und P' für jede Zeit t durch die sechs Constanten C, C', p_1, q_1, i, D bestimmt werden können, von denen die vier letzteren aus den Oertern, welche P und P' in der Epoche einnehmen, sich immer leicht finden lassen.

§. 173. Um von den zuletzt erhaltenen Formeln eine Anwendung zu zeigen, wollen wir nach ihnen die Säcularbewegungen der Pole der Bahnen des Jupiter und des Saturn zu berechnen suchen. Es sind diese beiden Planeten die bei weitem massenreichsten in unserem System. Die Störungen, welche sie von den übrigen Planeten erleiden, sind daher nur unbedeutend gegen diejenigen, welche sie auf einander ausüben, und man wird folglich ihre Bewegungen schon nahe richtig erhalten, wenn man bloss ihre gegenseitigen Störungen in Rechnung nimmt.

Beziehen sich die Buchstaben ohne Accent auf den Jupiter und die accentuirten auf den Saturn, so ist

$$m = \frac{1}{1053{\cdot}9}, \qquad m' = \frac{1}{3500{\cdot}2}.$$

Ferner ist nach der *Mécan. cél.* Tom. III, pag. 82:

$$(a'^2 - 2aa'\cos u + a^2)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{a'^3}(2{\cdot}179193 + 3{\cdot}185493\cos u + 2{\cdot}082131\cos 2u + \ldots),$$

also, wenn man a' zur Längeneinheit nimmt:

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{B}_0 = 2{\cdot}179193, \qquad \mathrm{B}_1 = 3{\cdot}185493, \qquad \mathrm{B}_2 = 2{\cdot}082131.$$

Sodann ist a. a. O. pag. 81

$$\frac{a}{a'} = \alpha = 0{\cdot}54531725.$$

und pag. 64 die jährlichen Bewegungen in Decimalsecunden

$$n = 337210''78, \qquad n' = 135792''34.$$

Hiermit findet sich

$$C = \frac{1}{4}m'na^2\mathrm{B}_1 = 22''816, \qquad C' = \frac{1}{4}mn'a\mathrm{B}_1 = 55''955.$$

$$C + C' = 78{\cdot}771 \text{ Dec. sec.} = 25{\cdot}522 \text{ Sex. sec.},$$

und damit die Umlaufszeit der Pole P und P' um N, oder die Um-

laufszeit der gemeinsamen Knotenlinie beider Bahnen in der unveränderlichen Ebene,

$$= \frac{400 \,.\, 100 \,.\, 100}{78{\cdot}771} = 50780 \text{ Jahren.}$$

Nun waren den 1. Januar 1800 die Neigungen beider Bahnen gegen die Ekliptik in Sexagesimalmaass

$$J = 1^{0}18'51''6 \,, \qquad J' = 2^{0}29'35''9 \,;$$

und die Längen ihrer aufsteigenden Knoten in derselben

$$\Theta = 98^{0}25'45'' \,, \qquad \Theta' = 111^{0}56'7'' \,.$$

Hieraus folgen für jenen Zeitpunkt, als Epoche, die rechtwinkligen Coordinaten von P und P', wenn der Pol der Ekliptik und der Frühlingsnachtgleichenpunkt in der Epoche zu den Punkten E und O genommen werden (§. 168):

$$p = J \sin\Theta = 4680''5 \,, \qquad q = -J\cos\Theta = 693''6 \,,$$
$$p' = 8326{\cdot}1 \,, \qquad q' = 3353{\cdot}1 \,,$$

und damit nach (ε) für die Epoche, als wo $\varphi = D$ ist:

$$\iota \cos D = p' - p = 3645''6 \,,$$
$$\iota \sin D = q' - q = 2659{\cdot}5 \,,$$

woraus die Constanten

$$D = 36^{0}6'40''$$

und

$$\iota = 4512''6 = 1^{0}15'12''6$$

hervorgehen.

Weiter folgen hieraus die Halbmesser

$$NP = \frac{C}{C + C'} \cdot \iota = 1307''0 = 21'47''0 \,,$$

$$NP' = \frac{C'}{C + C'} \cdot \iota = 3205{\cdot}5 = 53\;25{\cdot}5 \,,$$

und nach (ζ) die Coordinaten von N:

$$p_1 = p + NP \,.\, \cos D = 5736''4 \,,$$
$$q_1 = q + NP \,.\, \sin D = 1463{\cdot}9 \,.$$

Die Coordinaten von P und P' nach t seit 1800 verflossenen Jahren sind alsdann nach (ζ):

$$p = 5736''4 - 1307''0 \cos\varphi \,,$$
$$q = 1463{\cdot}9 - 1307{\cdot}0 \sin\varphi \,,$$
$$p' = 5736{\cdot}4 + 3205{\cdot}5 \cos\varphi \,,$$
$$q' = 1463{\cdot}9 + 3205{\cdot}5 \sin\varphi \,,$$

wo

$$\varphi = 36^\circ 6' 40'' - 25''522\,t \ .$$

Zusätze. *a*) Werden von der Ebene, deren Pol N ist, oder der unveränderlichen Ebene des Systems von Sonne, Jupiter und Saturn, die Neigung und die Knotenlänge rücksichtlich der Ekliptik mit J_1 und Θ_1 bezeichnet, so hat man

$$J_1 \sin\Theta_1 = p_1 \ , \qquad J_1 \cos\Theta_1 = -q_1 \ ,$$

woraus sich mit den obigen Werthen von p_1 und q_1

$$J_1 = EN = 1^\circ 38' 40''2 \quad \text{und} \quad \Theta_1 = 104^\circ 18' 58''$$

finden, — Bestimmungen, welche von den in §. 89 für die unveränderliche Ebene aller Körper unseres Sonnensystems angegebenen Bestimmungen, wegen der überwiegenden Massen des Jupiter und Saturn, nicht sehr abweichen.

b) Die grösste und die kleinste Neigung gegen die Ekliptik ist

für Jupiter: $EN \pm NP \ = 2^\circ \ 0' 27''$ und $1^\circ 16' 53''$,

für Saturn: $EN \pm NP' = 2 \ 32 \ \ 6$ und $0 \ 45 \ 15$.

Ist die Neigung der einen Bahn am grössten, so ist die der anderen am kleinsten. Die Linie PP' geht alsdann verlängert durch E, und die Knoten beider Bahnen fallen zusammen.

§. 174. Einer ähnlichen Analysis, wie in §. 172, wollen wir jetzt auch die Säcularänderungen der Excentricitäten und der Perihelien von m und m', oder der durch sie bestimmten Grössen f, g, f', g', unterwerfen.

In §. 164, (3) haben wir gefunden:

$$2f_1 = -m'Dg - m'Eg' \ , \qquad 2g_1 = m'Df + m'Ef' \ ,$$

d. i. (§. 165)

$$df = -\frac{1}{4} m' a^2 a' n (\mathrm{B}_1 g - \mathrm{B}_2 g') dt \ ,$$

$$dg = \frac{1}{4} m' a^2 a' n (\mathrm{B}_1 f - \mathrm{B}_2 f') dt \ ;$$

und eben so ist für die durch m erzeugten Säcularänderungen von f' und g', weil B_2 sowohl als B_1 eine symmetrische Function von a und a' ist,

$$df' = -\frac{1}{4} m a'^2 a n' (\mathrm{B}_1 g' - \mathrm{B}_2 g) dt \ ,$$

$$dg' = \frac{1}{4} m a'^2 a n' (\mathrm{B}_1 f' - \mathrm{B}_2 f) dt \ ;$$

oder, wenn wir zur Abkürzung die Constanten

$$\frac{1}{4} m' a^2 a' n B_1 = Gbh\,, \qquad \frac{1}{4} m' a^2 a' n B_2 = Gh\,,$$
$$\frac{1}{4} m a'^2 a n' B_1 = Gb\,, \qquad \frac{1}{4} m a'^2 a n' B_2 = G\,,$$

wo daher

$$b = \frac{B_1}{B_2} \quad \text{und} \quad h = \frac{m' a n}{m a' n'} = \frac{m' \sqrt{a'}}{m \sqrt{a}} \tag{α}$$

ist, setzen:

$$df = -Gh(bg - g')dt\,, \qquad df' = -G(bg' - g)dt\,,$$
$$dg = Gh(bf - f')dt\,, \qquad dg' = G(bf' - f)dt\,.$$

Es folgt hieraus:

$$df + idf' = -Gg(bh - i)dt + Gg'(h - bi)dt\,,$$
$$dg + idg' = Gf(bh - i)dt - Gf'(h - bi)dt\,.$$

Man setze nun

$$G(bh - i) = H \quad \text{und} \quad G(h - bi) = -Hi\,, \tag{β}$$

durch welche zwei Gleichungen die vorhin unbestimmt gelassene Grösse i und überdies H bestimmt werden. Man erhält damit

$$\begin{aligned} df + idf' &= -H(g + ig')dt\,, \\ dg + idg' &= H(f + if')dt\,, \end{aligned} \tag{γ}$$

zwei Gleichungen, aus denen sich ähnlicher Weise, wie aus den ähnlich geformten Gleichungen (δ) in §. 172, die Lösung des Problems ergeben wird.

Es folgt aber aus (β) nach Elimination von H:

$$i^2 + b(1 - h)i - h = 0\,. \tag{δ}$$

Dieser Gleichung zufolge hat i zwei durch die Constanten b und h bestimmte Werthe, welche man i_1 und i_2 nenne; die ihnen zugehörigen Werthe von H seien

$$H_1 = G(bh - i_1) \quad \text{und} \quad H_2 = G(bh - i_2)\,.$$

Indem man nun den ersten dieser zwei Werthe von i in den Gleichungen (γ) einführt und

$$f + i_1 f' = x\,, \qquad g + i_1 g' = y$$

setzt, kommt:

$$dx = -H_1 y\,dt\,, \qquad dy = H_1 x\,dt\,, \tag{ε}$$

folglich

$$x\,dx + y\,dy = \frac{1}{2} d(x^2 + y^2) = 0\,.$$

Mithin ist $x^2 + y^2$ eine Constante, welche man gleich l_1^2, und hiernach

$$x = l_1 \cos \psi_1 \,, \qquad y = l_1 \sin \psi_1$$

setze, woraus

$$dx = -y\, d\psi_1 \,, \qquad dy = x\, d\psi_1$$

folgt. Die Substitution hiervon in der einen oder anderen der Gleichungen (ε) giebt

$$d\psi_1 = H_1 dt \quad \text{und damit} \quad \psi_1 = H_1 t + L_1 \,,$$

wo L_1 den Werth von ψ_1 für $t = 0$ bezeichnet. Es ist demnach

$$(\zeta_1) \quad \begin{aligned} f + i_1 f' &= x = l_1 \cos \psi_1 = l_1 \cos (H_1 t + L_1) \,, \\ g + i_1 g' &= y = l_1 \sin \psi_1 = l_1 \sin (H_1 t + L_1) \,. \end{aligned}$$

Auf gleiche Weise erhält man aus (γ) mit Anwendung des zweiten aus (δ) fliessenden Werthes von i:

$$(\zeta_2) \quad \begin{aligned} f + i_2 f' &= l_2 \cos (H_2 t + L_2) \,, \\ g + i_2 g' &= l_2 \sin (H_2 t + L_2) \,, \end{aligned}$$

wo l_2 und L_2, eben so wie l_1 und L_1, Constanten sind, die man aus den Werthen von f, f', g, g', wie solche zu einer gewissen Zeit stattfinden, zu bestimmen hat. Bezeichnet man nämlich diese Werthe für $t = 0$ mit f_0, f_0', ..., so ist

$$(\iota) \quad \begin{aligned} f_0 + i_1 f_0' &= l_1 \cos L_1 \,, \qquad & f_0 + i_2 f_0' &= l_2 \cos L_2 \,, \\ g_0 + i_1 g_0' &= l_1 \sin L_1 \,, \qquad & g_0 + i_2 g_0' &= l_2 \sin L_2 \,, \end{aligned}$$

woraus sich l_1, ... L_2 auf bekannte Weise finden lassen. Die Werthe von f, ... g' zur Zeit t ergeben sich alsdann durch die Verbindung von (ζ_1) mit (ζ_2) und sind hiernach, wenn man, so wie

$$H_1 t + L_1 = \psi_1 \,, \quad \text{auch noch} \quad H_2 t + L_2 = \psi_2 \,,$$

und die Constanten

$$\frac{l_1}{i_2 - i_1} = k_1 \,, \qquad \frac{l_2}{i_2 - i_1} = k_2$$

setzt:

$$(\vartheta) \quad \begin{aligned} f &= i_2 k_1 \cos \psi_1 - i_1 k_2 \cos \psi_2 \,, \\ g &= i_2 k_1 \sin \psi_1 - i_1 k_2 \sin \psi_2 \,, \\ f' &= -k_1 \cos \psi_1 + k_2 \cos \psi_2 \,, \\ g' &= -k_1 \sin \psi_1 + k_2 \sin \psi_2 \,. \end{aligned}$$

§. 175. Berechnen wir nach diesen Formeln die Säcularstörungen, welche Jupiter und Saturn gegenseitig auf ihre Perihelien und Excentricitäten ausüben.

Mit den in §. 173 für m, m', a, $a' = 1$, n, n', B_1, B_2 angegebenen Werthen findet sich

$$b = \frac{B_1}{B_2} = 1{\cdot}52993\,, \qquad h = \frac{m'}{m\sqrt{a}} = 0{\cdot}40776\,,$$

und damit die Gleichung (δ)

$$i^2 + 0{\cdot}90609\,i - 0{\cdot}40776 = 0\,,$$

woraus

$$i_1 = 0{\cdot}32990\,, \qquad i_2 = -1{\cdot}23598$$

folgt.

Ferner erhält man in Sexagesimalsecunden

$$\log G = \log \frac{1}{4} m a n' B_2 = 1{\cdot}07371\,,$$
$$H_1 = Gbh - Gi_1 = 3''483\,,$$
$$H_2 = Gbh - Gi_2 = 22''038\,.$$

Nun war am 1. Januar 1800

$$e = 0{\cdot}048162\,, \qquad \omega = 11^0\,7'\,38''\,,$$
$$e' = 0{\cdot}056150\,, \qquad \omega' = 89\;\;8\;\;20\;\;,$$

folglich

$$f_0 = e\cos\omega = 0{\cdot}047257\,, \qquad g_0 = e\sin\omega = 0{\cdot}009295\,,$$
$$\log f_0' = 6{\cdot}92627 - 10\,, \qquad \log g_0' = 8{\cdot}74930 - 10\,,$$

und daher nach (η)

$$l_1\cos L_1 = 0{\cdot}047535\,, \qquad l_2\cos L_2 = \quad 0{\cdot}046214\,,$$
$$l_1\sin L_1 = 0{\cdot}027817\,, \qquad l_2\sin L_2 = -0{\cdot}060097\,.$$

Hieraus folgt

$$L_1 = \;\;30^0\,20'\,10''\,, \qquad \log l_1 = 8{\cdot}74096 - 10\,,$$
$$L_2 = 307\;\;33\;\;34\,, \qquad \log l_2 = 8{\cdot}87973 - 10\,,$$

$$k_1 = \frac{l_1}{i_2 - i_1} = -0{\cdot}035172\,,$$

$$k_2 = \frac{l_2}{i_2 - i_1} = -0{\cdot}048414\,,$$

also zuletzt nach (ϑ)

$$f = 0{\cdot}043472\cos\psi_1 + 0{\cdot}015972\cos\psi_2\,,$$
$$g = 0{\cdot}043472\sin\psi_1 + 0{\cdot}015972\sin\psi_2\,,$$
$$f' = 0{\cdot}035172\cos\psi_1 - 0{\cdot}048414\cos\psi_2\,,$$
$$g' = 0{\cdot}035172\sin\psi_1 - 0{\cdot}048414\sin\psi_2\,,$$

wo

$$\psi_1 = \;\;30^0\,20'\,10'' + \;\;3''483\,t\,,$$
$$\psi_2 = 307\;\;33\;\;34 + 22{\cdot}038\,t\,,$$

worin t die seit dem 1. Januar 1800 verflossene Zeit, in Jahren ausgedrückt, bedeutet.

Zusätze. a) Die rechtwinkligen Coordinaten des Mittelpunkts der Ellipse, welche Jupiter um die Sonne beschreibt, sind

$$ae\cos(\omega + 180^0) = -af\,, \qquad ae\sin(\omega + 180^0) = -ag\,.$$

und dieselben Coordinaten für Saturn gleich $-a'f'$, $-a'g'$. Aus den Ausdrücken für $f, \ldots g'$ findet sich aber

$$\begin{aligned} -af &= p\cos\chi_1 + q\cos\chi_2\,, \\ -ag &= p\sin\chi_1 + q\sin\chi_2\,, \\ -a'f' &= p'\cos\chi_1 - q'\cos\chi_2\,, \\ -a'g' &= p'\sin\chi_1 - q'\sin\chi_2\,, \end{aligned}$$

wo, wenn man wiederum a' zur Längeneinheit nimmt (§. 173),

$$\begin{aligned} p &= 0{\cdot}545317 \times 0{\cdot}043472 = 0{\cdot}023706\,, \\ q &= 0{\cdot}545317 \times 0{\cdot}015972 = 0{\cdot}008710\,, \\ p' &= 0{\cdot}035172\,, \qquad q' = 0{\cdot}048114\,. \end{aligned}$$

und überdies

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \psi_1 + 180^0 = 210^0\,20'\,10'' + 3''{\cdot}483\,t\,, \\ \chi_2 &= \psi_2 + 180^0 = 127\;\;33\;\;34\;\; + 22{\cdot}038\,t\,. \end{aligned}$$

Zieht man daher von der Sonne S aus (Fig. 45) in der Ebene der Ekliptik, mit welcher man sich gegenwärtig die Bahnebenen von Jupiter und Saturn zusammenfallend denken kann, eine Linie $SQ = q$, welche mit der Abscissenaxe, d. i. mit der Linie von S nach dem Frühlingsäquinoctium am 1. Januar 1800, einen Winkel $= \chi_2$ macht, und nach der entgegengesetzten Richtung von SQ eine Linie $SQ' = q'$; zieht man ferner, unter einem Winkel $= \chi_1$ mit der Abscissenaxe, die Linien $QP = p$ und $Q'P' = p'$, so sind P und P' die Oerter der Mittelpunkte der vom Jupiter und Saturn beschriebenen Ellipsen zur Zeit t. Im Verlauf der Zeit werden sich daher die gleich lang bleibenden Linien SQ und SQ' um S, QP um Q und $Q'P'$ um Q' gleichförmig und nach derselben Richtung, wie die Planeten um die Sonne, drehen, so dass Q und Q' mit S stets in gerader Linie und QP

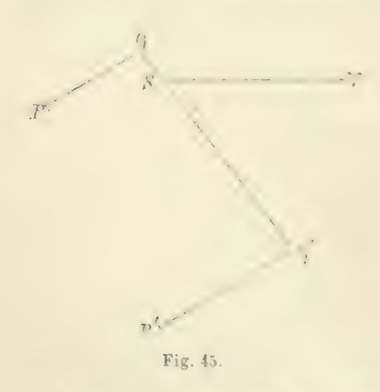


Fig. 45.

und $Q'P'$ sich stets parallel bleiben. Dabei werden die Umdrehungszeiten der Linie $Q'SQ$ und der Linien QP und $Q'P'$ resp.

$\frac{360^0}{22''038}$ und $\frac{360^0}{3''483}$, d. i. beiläufig 58800 und 372000 Jahre betragen.

b) Dieselbe Relation, die wir in §. 171, *a* zwischen den Quadraten der Neigungen zweier sich störender Planeten fanden, hat auch zwischen den Quadraten ihrer Excentricitäten statt. Denn aus den Formeln (ϑ) des §. 174 folgt:

$$e^2 = f^2 + g^2 = i_2^2 k_1^2 + i_1^2 k_2^2 - 2\, i_1\, i_2 k_1 k_2 \cos (\psi_2 - \psi_1) ,$$

$$e'^2 = f'^2 + g'^2 = k_1^2 + k_2^2 - 2\, k_1 k_2 \cos (\psi_2 - \psi_1) ,$$

und daher

$$e^2 - i_1\, i_2\, e'^2 = \text{einer von der Zeit unabhängigen Grösse.}$$

Zufolge der Gleichungen (δ) und (α) ist aber

$$- i_1\, i_2 = h = \frac{m' \sqrt{a'}}{m \sqrt{a}} .$$

Mithin ist auch

$$m \sqrt{a} \,.\, e^2 + m' \sqrt{a'} \,.\, e'^2 = \text{einer beständigen Grösse.}$$

Wie die Neigungen, können daher auch die Excentricitäten der Bahnen zweier einander störender Planeten gewisse Grenzen nicht überschreiten, und wenn die eine wächst, muss die andere abnehmen.

§. 176. Die in §. 163 in Bezug auf periodische Störungen gemachte Bemerkung, dass die Störung eines Planeten durch mehrere andere der Summe der Störungen, welche jeder der letzteren einzeln hervorbringt, gleich ist, sobald die Quadrate und höheren Potenzen der störenden Massen vernachlässigt werden: diese Bemerkung leidet offenbar auch auf die Säcularungleichheiten Anwendung.

So wurde in §. 165 für die säculare Geschwindigkeit, mit welcher die Excentricität der Bahn von m durch Einwirkung von m' geändert wird,

$$de = -\frac{1}{4} m' n a^2 a' \mathrm{B}_2 e' dt \,.\, \sin (\omega - \omega')$$

gefunden. Hierin ist B_2, folglich auch $-\frac{1}{4} a a' \mathrm{B}_2$, eine von den constant bleibenden Elementen a und a' symmetrisch abhängige Function, die wir jetzt mit (0,1), und die auf gleiche Weise aus a und a'', aus a' und a'', etc. gebildeten Functionen mit (0,2), (1,2), etc. bezeichnen wollen.

Wenn daher m, ausser durch m', noch durch die Planeten m''. etc. gestört wird, deren Elemente zur Zeit $t \ldots a'', e'', \omega''$, etc. heissen, so wird sein:

$$de = andt\{m'e'\,(0,1)\sin(\omega - \omega') + m''e''\,(0,2)\sin(\omega - \omega'') + \ldots\} \; .$$

Eben so hat man für die gleichnamigen Störungen der Planeten $m', m'', \ldots$ durch die jedesmal übrigen:

$$de' = a'n'dt\{me\,(1,0)\sin(\omega' - \omega) + m''e''\,(1,2)\sin(\omega' - \omega'') + \ldots\} \; ,$$

$$de'' = a''n''dt\{me\,(2,0)\sin(\omega'' - \omega) + m'e'\,(2,1)\sin(\omega'' - \omega') + \ldots\} \; ,$$

u. s. w. Aus diesen Gleichungen, in Verbindung mit den entsprechenden für $d\omega, d\omega', d\omega'' \ldots$ können durch ähnliche Kunstgriffe, wie in §. 174, die Säcularungleichheiten selbst, denen $e, e', \ldots$ und $\omega, \omega', \ldots$ unterworfen sind, gefunden werden. Statt aber diese etwas weitläufige Rechnung hier anzustellen, mag nur noch gezeigt werden, wie mit Hülfe der für $de, de', \ldots$ erhaltenen Gleichungen die merkwürdige Relation, die wir vorhin zwischen den Quadraten der Excentricitäten zweier sich störender Planeten fanden, auf das System aller ausgedehnt werden kann.

Es kommt nämlich, wenn man diese Gleichungen resp. mit $\frac{me}{an}, \frac{m'e'}{a'n'}, \frac{m''e''}{a''n''}, \cdots$ multiplicirt, sie hierauf addirt und noch bemerkt, dass die Function $(0,1)$ wegen ihrer Symmetrie auch $= (1,0)$, und eben so

$$(0,2) = (2,0) \; , \quad (1,2) = (2,1) \; ,$$

etc. ist:

$$\frac{m}{an}\,e\,de + \frac{m'}{a'n'}\,e'\,de' + \frac{m''}{a''n''}\,e''\,de'' + \ldots = 0 \; ,$$

oder weil

$$(a) \qquad a\sqrt{a}\,.\,n = a'\sqrt{a'}\,.\,n' = a''\sqrt{a''}\,.\,n'' = \text{etc.}$$

ist:

$$m\sqrt{a}\,.\,e\,de + m'\sqrt{a'}\,.\,e'de' + \ldots = 0 \; .$$

Hieraus aber folgt:

$$(A) \qquad m\sqrt{a}\,.\,e^2 + m'\sqrt{a'}\,.\,e'^2 + m''\sqrt{a''}\,.\,e''^2 + \ldots =$$
$$\text{einer constanten Grösse } C \; .$$

Weil alle Planeten sich nach derselben Richtung um die Sonne bewegen, und daher $n, n', n'', \ldots$ einerlei Zeichen haben, so müssen in den Gleichungen (a), folglich auch in (A), die Wurzelgrössen $\sqrt{a}, \sqrt{a'}, \ldots$ mit einerlei Zeichen, es sei mit dem positiven, genommen werden. Die Glieder auf der linken Seite von (A) sind dann

insgesammt positiv; keines von ihnen kann folglich grösser werden, als die ebenfalls positive Constante C auf der Rechten, und wenn die Excentricitäten einiger Planeten wachsen, so müssen die von anderen gleichzeitig abnehmen. Da ferner die Excentricitäten aller Planeten gegenwärtig sehr klein sind, und es daher auch C ist, so werden wenigstens die Excentricitäten des Jupiter, Saturn und Uranus, als derjenigen Planeten, denen die grössten Massen und grössten Entfernungen, und folglich in (A) die grössten Glieder zugehören, stets sehr klein bleiben. Anderweitige Untersuchungen haben gelehrt, dass dasselbe auch von den Excentricitäten der übrigen Planeten gilt. *Mécan. cél.* Tome I, pag. 305.

§. 177. Der Ausdruck für die säculare Geschwindigkeit, mit welcher sich die Neigung der Bahn von m durch die Störung von m' ändert (§. 168):

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{4} m' n a^2 a' \mathrm{B}_1 J' \sin(\Theta - \Theta') ,$$

ist dem für die Excentricität ganz ähnlich. Die in Betreff der letzteren so eben gemachten Rechnungen und Schlüsse werden daher auch auf die Neigung Anwendung finden. Es wird mithin auch die in §. 171, $a)$ erhaltene Relation zwischen den Quadraten der Neigungen zweier Planetenbahnen gegen eine feste Ebene auf das System aller Planeten erstreckt werden können und

$$m\sqrt{a}\,.\,J^2 + m'\sqrt{a'}\,.\,J'^2 + m''\sqrt{a''}\,.\,J''^2 + \ldots = \qquad (B)$$

einer constanten Grösse C'

sein. Die Neigungen werden folglich, so wie sie es jetzt sind, auch fortwährend sehr klein bleiben.

Auffallend hierbei ist der Umstand, dass die feste Ebene, auf welche in (B) die Neigungen bezogen werden, dafern sie nur mit Einer, und folglich auch mit den übrigen Bahnen, sehr kleine Winkel macht, sonst jede beliebige sein kann: und es wird daher durch die Formel (B) noch eine andere merkwürdige Relation ausgedrückt sein. Um diese zu ermitteln, bezeichne man, wie in §. 168, die Nordpole der Bahnen von m, m', m'',... mit P, P', P'',... und den Nordpol der festen Ebene mit E. Man setze ferner der Kürze halber

$$m\sqrt{a} = c \quad , \quad m'\sqrt{a'} = c' \qquad \text{etc.},$$

so wird die Formel (B):

$$c\,.\,EP^2 + c'\,.\,EP'^2 + c''\,.\,EP''^2 + \ldots = C' .$$

Sei nun A irgend ein Punkt in dem kleinen Stück der Kugel-

fläche, in welchem die Punkte E, P, P'.... enthalten sind, und welches wir hier als eben betrachten können, und werden in Bezug auf ein rechtwinkliges Axensystem in dieser Ebene, welches A zum Anfangspunkte hat, die Coordinaten von E, P, P', ... resp. gleich f, g; x, y; x', y'; ... gesetzt, so wird

$$EP^2 = (x-f)^2 + (y-g)^2,$$
$$EP'^2 = (x'-f)^2 + (y'-g)^2, \quad \text{etc.}$$

und damit

$$(b) \quad c[(x-f)^2 + (y-g)^2] + c'[(x'-f)^2 + (y'-g)^2] + \dots$$
$$= c(x^2+y^2) + c'(x'^2+y'^2) + \dots + (c+c'+\dots)(f^2+g^2)$$
$$-2f(cx+c'x'+\dots) - 2g(cy+c'y'+\dots) = C'$$

d. h. gleich einer für alle Zeit beständigen Grösse, was man auch für Werthe den Constanten f und g beilegen mag.

Die hierzu nöthige und hinreichende Bedingung ist, dass jede der drei Summen

$$c(x^2+y^2) + c'(x'^2+y'^2) + \dots,$$
$$cx + c'x' + \dots, \qquad cy + c'y' + \dots$$

für sich constant sei. Nun sind (§. 75)

$$\frac{cx+c'x'+\dots}{c+c'+\dots} \quad \text{und} \quad \frac{cy+c'y'+\dots}{c+c'+\dots}$$

die Coordinaten des Schwerpunktes der Punkte P, P', ..., wenn den letzteren die Massen c, c', ... beigelegt werden. Dieser Schwerpunkt, und folglich auch die Ebene, welcher er als Pol zugehört, müssen daher bei allen Bewegungen der Pole P, P', ... in Ruhe bleiben.

In der Formel (B) für die Neigungen ist mithin zugleich der Beweis für das Vorhandensein einer ihre Lage nicht ändernden Ebene enthalten, — und zwar derselben, welche nach §. 89 vorzugsweise die unveränderliche oder invariable Ebene genannt wird. Denn heisst Z der Mittelpunkt der Himmelskugel, so findet sich die Axe der letzteren Ebene durch die Zusammensetzung von Linien, welche die Richtungen ZP, ZP', ... haben und sich, ihren Längen nach, wie $m\sqrt{a}$, $m'\sqrt{a'}$, ..., d. i. wie c, c', ... verhalten, also durch Zusammensetzung der Linien $c.ZP$, $c'.ZP'$, ... (§. 171, b). Man hat aber nach §. 74, 2), wenn S der Schwerpunkt der n gleich schweren Punkte P, P', ... ist:

$$ZP + ZP' + \dots = n.ZS,$$

wo auch Z liegen mag: also auch, wenn c gleich schwere Punkte in P, c' eben so schwere in P', etc. vereinigt sind, d. h. wenn sich die Massen in P, P', ... wie c, c', ... verhalten, und S auch hier den Schwerpunkt bezeichnet:

$$c \,.\, ZP + c' \,.\, ZP' + \ldots \equiv (c + c' + \ldots)\, ZS\,.$$

Die aus $c \,.\, ZP$, $c' \,.\, ZP'$, ... zusammengesetzte Linie, also die Axe der unveränderlichen Ebene, wenn für Z wiederum der Kugelmittelpunkt genommen wird, hat demnach ZS zur Richtung und folglich den Schwerpunkt S der Massen c, c', ... zum Pole, — wie zu erweisen stand.

Zusatz. Wählt man S zum Anfangspunkte der Coordinaten, so werden

$$cx + c'x' + \ldots = 0 \quad \text{und} \quad cy + c'y' + \ldots = 0\,,$$

und die Gleichung (b) reducirt sich auf

$$c \,.\, EP^2 + c' \,.\, EP'^2 + \ldots = c \,.\, SP^2 + c' \,.\, SP'^2 + \ldots + (c + c' + \ldots)\, SE^2\,,$$

eine schon in §. 91, c) bemerkte Relation zwischen den Quadraten der Entfernungen der Massen c, c', ... von ihrem Schwerpunkte S und einem anderen willkürlichen Punkte E. Zugleich geht daraus hervor, dass die Constante $C' = c \,.\, EP^2 + \ldots$ am kleinsten wird, wenn man E mit S zusammenfallen lässt, d. h. wenn man die Neigungen der Bahnen auf die unveränderliche Ebene selbst bezieht.

Viertes Kapitel.

Von der Stabilität des Planetensystems.

§. 178. Im vorigen Kapitel sind wir zu den für die Dauer des Planetensystems höchst wichtigen Resultaten gelangt:

dass erstens die mittleren Entfernungen der Planeten von der Sonne, und folglich auch ihre Umlaufszeiten, durch alle Zeit unverändert bleiben; dass zweitens die Excentricitäten ihrer Bahnen stets kleine Brüche und mithin die Bahnen selbst immer nahe kreisförmig bleiben, und dass es drittens eine Ebene von unveränderlicher Lage giebt, mit welcher die Bahnen stets nur kleine Winkel machen.

Können daher auch die Apsidenlinien, so wie die Knotenlinien mit jener Ebene, bedeutend ihre Lage ändern, ja sich um ganze Kreise drehen, so wird doch das ganze System sich von einem gewissen mittleren Zustande nie beträchtlich entfernen, sondern nur geringe Schwankungen um denselben machen.

Der bedeutendste unter den drei genannten Gründen für die stabile Dauer des Systems ist unstreitig der erste, oder die Beständigkeit der mittleren Entfernungen. Im Obigen (§. 169) haben wir uns von dieser Beständigkeit allerdings nur durch indirecte Schlüsse überzeugt und dabei nur die ersten Potenzen der störenden Massen, so wie der Excentricitäten und Neigungen, berücksichtigt. Allein Laplace, der Entdecker dieser wichtigen Wahrheit, zeigte schon bei ihrer ersten Bekanntmachung im Jahre 1773, dass sie noch bei Rücksichtnahme auf die zweite und dritte Potenz der Excentricitäten und Neigungen Gültigkeit hat. Wenige Jahre später (1776) bewies Lagrange, dass sich für die mittleren Entfernungen selbst dann keine säcularen Störungen zu erkennen geben, wenn man zwar nur die erste Potenz der Massen, aber noch alle höheren Potenzen der Excentricitäten und Neigungen in Rechnung nimmt. Endlich hat Poisson (1808) dasselbe auch noch bei Berücksichtigung der Quadrate der Massen dargethan.

Dass die Excentricitäten und die Neigungen immer klein bleiben, hat hauptsächlich darin seinen Grund, dass alle Planeten sich nach einerlei Richtung um die Sonne bewegen, indem bei dieser Einrichtung in den Gleichungen (A) und (B) §§. 176 und 177 alle Glieder auf der linken Seite einerlei Zeichen haben. Wäre dagegen, um nur die Störungen ins Auge zu fassen, welche zwei Planeten wechselseitig auf ihre Excentricitäten e und e' ausüben, die Bewegung des einen der des anderen entgegengesetzt, so hätten in der Gleichung:

$$m\sqrt{a}\,.\,e^2 + m'\sqrt{a'}\,.\,e'^2 = \text{einer constanten Grösse},$$

die beiden Glieder auf der linken Seite entgegengesetzte Zeichen, und e und e' würden gleichzeitig abnehmen und gleichzeitig wachsen. Auch würde unter leicht angebbaren Bedingungen ein Wachsthum ohne Grenzen eintreten können. Sind nämlich die zwei Bewegungen einander entgegengesetzt, so wird in §. 174 der Werth des Verhältnisses

$$m'\sqrt{a'} : m\sqrt{a} = h$$

negativ, und es können dann die Wurzeln i_1 und i_2 der Gleichung (∂),

$$= -\tfrac{1}{2}b(1-h) \pm \sqrt{[h + \tfrac{1}{4}b^2(1-h)^2]}$$

auch imaginär werden. Mit solchen Werthen von i_1 und i_2 finden sich aber die Grössen f, g, f', g', mithin auch die Excentricitäten $\sqrt{(f^2+g^2)}$ und $\sqrt{(f'^2+g'^2)}$, nicht mehr durch trigonometrische, sondern durch Exponentialfunctionen der Zeit, wie $A \,.\, a^t$, ausgedrückt und können daher mit der Zeit ohne Ende zunehmen.

§. 179. Noch müssen wir eines dem ersten Blicke nach sehr zufällig scheinenden Umstandes gedenken, der ganz besonders dazu beiträgt, dass sich das System von einem mittleren Zustande nie bedeutend entfernen kann, und dass namentlich die periodischen Störungen nie eine allzubeträchtliche Grösse erreichen können. Es ist dies die Einrichtung, dass die Umlaufszeiten, und folglich auch die mittleren Bewegungen der Planeten, in incommensurabeln Verhältnissen zu einander stehen, von denen keines einem einfachen commensurabeln Verhältnisse nicht einmal sehr nahe kommt.

Um dieses so weit, als es hier thunlich ist, zu erläutern, wollen wir zu den in §. 158 gefundenen, von den Excentricitäten unabhängigen Störungen der Länge und des Radius Vector zurückgehen. Von beiderlei Störungen hat der Coefficient des allgemeinen Gliedes den Divisor

$$i^2k^2 - 1 = [(i+1)n - in'][(i-1)n - in'] : n^2,$$

weil $k = (n - n') : n$. Da nun für i nach und nach alle ganzen Zahlen zu setzen sind, so würde, wenn das Verhältniss der mittleren Bewegungen $n : n'$ einem der Verhältnisse $i : i+1$ oder $i : i-1$, d. i. $1:2$, $2:3$, $3:4$, etc. oder $2:1$, $3:2$, $4:3$, etc. sehr nahe gleich käme, der entsprechende Coefficient sehr gross und damit eine sehr bedeutende Störung erzeugt werden.

Eben so erhellet, dass unter den von den ersten Potenzen der Excentricitäten und der Neigung abhängigen Störungen, deren allgemeiner Coefficient (§§. 161, 162) die Grösse

$$(ik+1)^2 - 1 = i(n-n')[(i+2)n - in'] : n^2$$

zum Divisor hat, beträchtliche entstehen müssen, wenn das Verhältniss $n : n'$ von $i : i+2$, also von einem der Verhältnisse ... $5:3$, $4:2$, $3:1$, $1:3$, $2:4$, $3:5$, ... wenig abweicht. Indessen sind hiervon die in der Natur vorkommenden Verhältnisse zwischen den mittleren Bewegungen viel zu sehr verschieden, als dass von dieser Seite her eine nur einigermaassen beträchtliche Störung zu befürchten stände.

§. 180. Unter allen Verhältnissen zwischen den mittleren Bewegungen der Planeten nähert sich einem einfachen rationalen Ver-

hältniss am meisten das zwischen den Bewegungen des Jupiter und Saturn, also merkwürdiger Weise das zwischen den Bewegungen der zwei grössten Planeten unseres Systems. Denn heissen U und U' die Umlaufszeiten und n und n' die mittleren Bewegungen des Jupiter und Saturn, so ist

$$U = 11{\cdot}86197 \text{ und } U' = 29{\cdot}45714 \text{ jul. Jahren},$$

woraus

$$\frac{U}{U'} = \frac{n'}{n} \text{ überaus nahe } = \frac{60}{149}, \text{ und schon sehr nahe } = \frac{2}{5}$$

folgt, so dass die fünffache Bewegung des Saturn von der doppelten des Jupiter nur um einen geringen Theil der einen oder der anderen Bewegung selbst verschieden ist. Es kommt nämlich mit Anwendung des fast vollkommen richtigen Verhältnisses 60 : 149,

$$\frac{5U}{2U'} = \frac{5n'}{2n} = \frac{150}{149} \text{ und } 5n' - 2n = \frac{1}{74{\cdot}5}n = \frac{1}{30}n'.$$

Auch finden sich in der That, wenn man in der Entwickelung der gegenseitigen periodischen Störungen des Jupiter und Saturn bis zur dritten Potenz der Excentricitäten incl. fortgeht, Glieder, deren Coefficienten das Quadrat von $5n' - 2n$ zum Divisor haben und daher ungeachtet der hohen Potenz der Excentricitäten noch sehr gross, grösser als jede andere periodische Störung im ganzen Planetensystem*), ausfallen.

Nach Bouvard's astronomischen Tafeln (Paris, 1821) werden diese zwei sogenannten grossen Gleichungen des Jupiter und Saturn folgendergestalt berechnet. Zuerst sind für die mittlere Pariser Mitternacht, womit der 1. Januar 1800 anfängt, als Epoche, die stets vom mittleren Frühlingsäquinoctialpunkte in der Epoche an gerechneten mittleren Längen λ und λ' des Jupiter und Saturn

---

*) Die grösste periodische Langenstörung erleidet (Méc. cél., Tome III, pag. 95—146)

Merkur durch Venus,	sie beträgt		8″5,
Venus durch Erde;	-	-	11·4,
Erde durch Jupiter;	-	-	6·8,
Mars durch Jupiter,	-	-	25·0,
Uranus durch Saturn;	-	-	149·7.

Die Störungen des Jupiter und Saturn, welche ihrer Grösse nach unmittelbar auf die im Texte angegebenen folgen, sind

für Jupiter durch Saturn: 3′ 29″0,
für Saturn durch Jupiter: 11 9·4.

$$\lambda = 81^\circ 52' 19''3 + 30^\circ 20' 56''718 \,.\, t \;,$$
$$\lambda' = 123 \quad 5 \; 29{\cdot}4 + 12 \; 13 \; 16{\cdot}127 \,.\, t \;,$$

wo t die seit der Epoche verflossene Zeit, in julianischen Jahren ausgedrückt, bedeutet. Hiermit bestimmt man die Argumente

$$A = 5\lambda' - 2\lambda + 4^\circ 10' 4''8 - 1' 16''403 \,.\, t + 0''013 \,.\, t^2$$
$$= 95^\circ 52' 53''0 + 23' 10''795 \,.\, t + 0''013 \,.\, t^2 \;,$$

$$A' = A - 29''8 - 0''270 \,.\, t \;;$$

und es sind dann die Gleichungen für die Länge

des Jupiter: $+ (19' 46''619 - 0''0347 \,.\, t + 0''000033 \,.\, t^2) \sin A$
$- 12''014 \sin 2A \;,$

des Saturn: $- (47' 52''649 - 0''0803 \,.\, t + 0''000082 \,.\, t^2) \sin A'$
$+ (30''504 - 0''0017 \,.\, t) \sin 2A' \;.$

Die Periode jeder dieser beiden Gleichungen beträgt (§. 109)

$$\frac{360^\circ}{23' 11''} = 932 \text{ Jahre} \,.$$

Der Anfang einer solchen Periode, d. i. einer der Zeitpunkte, wo die Argumente der Gleichungen gleich Null, mithin, zufolge dieser Gleichungen allein, die Geschwindigkeit des Jupiter am grössten und die des Saturn am kleinsten gewesen, ist

$$\frac{95^\circ 52' 53''}{23' 11''} = 248 \text{ Jahre}$$

vor der Epoche, also um das Jahr 1552, eingetreten. Von da an nimmt 466 Jahre hindurch, also bis zum Jahre 2018, die Geschwindigkeit des Jupiter ab und die des Saturn zu. Die Astronomen der letztverflossenen Jahrhunderte hatten diese Verzögerung des einen und Beschleunigung des anderen Planeten aus Beobachtungen kennen gelernt, und mussten diese Anomalieen bei Unkenntniss ihrer Periode um so auffallender finden, als von allen anderen Planeten die Umlaufszeiten sich durchaus constant gezeigt hatten. Nach mehreren vergeblichen Versuchen, den Grund dieser sonderbaren Erscheinung zu ermitteln, gelang es Laplace (im Jahre 1786), auch sie dem Gesetze der allgemeinen Schwere anzupassen und die oben angedeutete theoretische Erklärung ausfindig zu machen.*)

---

*) Die Theorie des Jupiter und Saturn ist von Hansen in seiner Preisschrift »*Untersuchungen über die gegenseitigen Störungen des Jupiters und Saturns*« Berlin 1831, und später in seiner posthumen Abhandlung »*Ueber die Störungen der grossen Planeten, insbesondere des Jupiter*« Leipzig 1875, bearbeitet worden. Leverrier

§. 181. Zusätze. *a*) Dass durch die gegenseitige Einwirkung zweier Planeten die mittlere Geschwindigkeit des einen sich verringert, wenn die des anderen grösser wird, und umgekehrt, dies lässt sich leicht mit Hülfe des Princips der Erhaltung der lebendigen Kräfte darthun. Bedeuten nämlich die in §. 91, *b* mit A, B, C bezeichneten Körper die Sonne und die beiden Planeten, und setzen wir demgemäss ihre Massen $a = 1$, $b = m$, $c = m'$, die Radien $AB = r$, $AC = r'$, und die durch AB und AC ausgedrückten relativen Geschwindigkeiten von B und C, wenn A ruhend angenommen wird, gleich u und u', so verwandelt sich bei Weglassung der Quadrate und des Productes der Massen m und m' die Gleichung am Schlusse von §. 91, *c*) in

$$mu^2 + m'u'^2 = 2K\left(\frac{m}{r} + \frac{m'}{r'}\right) + \text{Const.}$$

Nach (11) in §. 52 ist aber, wenn a und a' die momentanen, d. i. die aus den jedesmaligen Werthen von r, u und r', u' abgeleiteten, und daher wegen der gegenseitigen Störung von einem Zeitpunkte zum anderen sich ändernden, halben grossen Axen der Bahnen von m und m' bedeuten:

$$u^2 = K\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \quad \text{und} \quad u'^2 = K\left(\frac{2}{r'} - \frac{1}{a'}\right)$$

(vergl. §. 146). Hierdurch wird die vorige Gleichung:

$$\frac{m}{a} + \frac{m'}{a'} = \text{Const.},$$

und wegen $n^2a^3 = n'^2a'^3 = K$:

$$m \cdot n^{\frac{2}{3}} + m' \cdot n'^{\frac{2}{3}} = \text{Const.}$$

Wenn daher n wächst, muss n' abnehmen, und umgekehrt.

b) In der letzten Gleichung sind n und n' die momentanen mittleren Bewegungen. Weil sie, eben so wie a und a', frei von säcularen Störungen sind, so kann man $n = \nu + x$ und $n' = \nu' + x'$ setzen, wo ν und ν' durch alle Zeit constant, x und x' aber kleine Grössen von periodischer Natur bedeuten. Die vorige Gleichung wird damit:

$$m(\nu + x)^{\frac{2}{3}} + m'(\nu' + x')^{\frac{2}{3}} = \text{Const.},$$

---

behandelt die Bewegung des Jupiter und des Saturn in den *Annales de l'Observatoire de Paris*, welche die Theorie der sämmtlichen grossen Planeten, nebst Tafeln, enthalten. Für die Sonne (Erde) sind ausserdem 1853 Tafeln von Hansen und Olufsen, für den Uranus und Neptun von Newcomb in Washington erschienen. A. d. H.

folglich mit Weglassung der höheren Potenzen von x und x':

$$m \,.\, \nu^{-\frac{1}{3}} x + m' \,.\, \nu'^{-\frac{1}{3}} x' = m \,.\, n^{-\frac{1}{3}} x + m' \,.\, n'^{-\frac{1}{3}} x' = \text{Const.}$$

oder

$$m \sqrt{a} \,.\, x + m' \sqrt{a'} \,.\, x' = \text{Const.} \qquad (\alpha$$

Wenden wir dieses auf Jupiter und Saturn an, wo die durch die grossen Gleichungen $+ 19' 47'' \sin \varDelta$ und $- 47' 53'' \sin \varDelta$ verbesserten mittleren Längen, wegen der langen Periode der ersteren, als die momentanen mittleren Längen selbst erscheinen, und wo folglich die Geschwindigkeiten, mit denen sich diese Gleichungen ändern:

$$(5n' - 2n)\, 19'8 \cos \varDelta \quad \text{und} \quad -(5n' - 2n)\, 47'9 \cos \varDelta \;,$$

die periodischen Glieder x und x' der mittleren Bewegungen, oder doch die vorzüglichsten unter diesen Gliedern, sein werden. Die Gleichung (α) geht damit über in:

$$(m \sqrt{a} \,.\, 19'8 - m' \sqrt{a'} \,.\, 47'9) \cos \varDelta = \text{Const.}$$

Dieses ist aber nicht anders möglich, als wenn die in $\cos \varDelta$ multiplicirte Grösse gleich Null, und damit

$$m \sqrt{a} \,.\, 19'8 = m' \sqrt{a'} \,.\, 47'9$$

ist.

Die Coefficienten der grossen Gleichungen von Jupiter und Saturn müssen daher, nahe wenigstens, im umgekehrten Verhältnisse der Massen und der Quadratwurzeln aus den mittleren Entfernungen stehen; was sich auch bestätigt findet, indem (§. 175)

$$\frac{m' \sqrt{a'}}{m \sqrt{a}} = h = 0{\cdot}408 \quad \text{und} \quad \frac{19' 47''}{47' 53''} = 0{\cdot}413$$

ist.

§. 182. Ausser der jetzt besprochenen Störung zwischen Jupiter und Saturn giebt es noch einige andere, deren Perioden wegen des von einem einfachen rationalen Verhältnisse nicht allzu entfernten Verhältnisses zweier mittleren Bewegungen n und n' von langer Dauer sind. Jede periodische Störung der Länge, welche der Planet m' auf den Planeten m ausübt, ist nämlich von der Form

$$A \sin (int - i'n't + \alpha) \;, \qquad (p$$

wo i und i' zwei ganze Zahlen bedeuten: und jede dieser Störungen hat ihre entsprechende unter den von m auf m' ausgeübten Störungen:

$$A' \sin (i'n't - int + \alpha') = - A' \sin (int - i'n't - \alpha') \;, \qquad (p'$$

wo i und i' dieselben Zahlen wie vorhin bezeichnen. Die Periode jeder dieser beiden Störungen ist

$$= \pm \frac{360^0}{in - i'n'} = \pm \frac{UU'}{iU' - i'U},$$

und daher gegen die Umlaufszeiten U und U' sehr lang, wenn $iU' - i'U$ gegen U und U' sehr klein ist.

Beziehen sich z. B. n und n' auf Venus und Erde, so ist $U = 0{\cdot}6152$ Jahre und $U' = 1$ Jahr, folglich

$$\frac{UU'}{2U' - 3U} = \frac{0{\cdot}6152}{0{\cdot}1544} = 4{\cdot}0 \text{ Jahren}.$$

$$\frac{UU'}{5U - 3U'} = \frac{0{\cdot}6152}{0{\cdot}0760} = 8{\cdot}1 \text{ Jahren}.$$

Unter den gegenseitigen Störungen von Venus und Erde kommen daher zwei Paare mit den langen Perioden von 4 und von 8 Jahren vor, von denen das erstere $(2n - 3n')t$, das letztere $(5n' - 3n)t$ zum veränderlichen Theile seines Arguments hat.

Eben so entspringt daraus, dass die Umlaufszeit des Mars, von 1·8808 Jahren, der doppelten Umlaufszeit der Erde nahe gleich kommt, in dem Laufe der Erde und des Mars ein Paar von Störungen mit einer Periode von nahe 16 Jahren; u. s. w.

Von zwei so zusammengehörigen Störungen (p) und (p') von langer Periode gilt übrigens eben so, wie dies bei Jupiter und Saturn gezeigt worden, der Satz, dass sich immer nahe

$$A : A' = m' \sqrt{a'} : m \sqrt{a}$$

verhält.

Endlich zeichnen sich, wie die des Jupiter und Saturn, so auch alle anderen Störungen von langer Periode, durch die Grösse ihrer Coefficienten merklich vor den übrigen aus.

§. 183. Schlussbemerkung. Was in §. 145 über die Bestimmung der mittleren Elemente der Mondsbewegung gesagt worden, ist im Ganzen auch auf die Planeten anwendbar, nur dass hier als unbekannte Grössen noch die störenden Massen mit auftreten, — den Fall ausgenommen, wenn der störende Planet einer von denen ist, welche Begleiter haben, und wo seine Masse auf die in §. 66 gezeigte Weise bestimmt werden kann.

Weil die Planetenstörungen verhältnissmässig sehr gering sind, so wird man die Elemente der Bewegung schon unter der Voraussetzung,

dass sie rein elliptisch ist, sehr nahe richtig bestimmen können. Man setze daher jedes Element gleich diesem seinem nahe richtigen Werthe + einer noch unbekannten, von der Ordnung der Massen zu betrachtenden Correction, und berechne mit diesen so zusammengesetzten Elementen des Planeten, so wie mit denen der Erde, für die Zeit, wo der Planet beobachtet worden, nach den gegebenen Formeln für die gestörte Bewegung die heliocentrischen Coordinaten des Planeten und der Erde, wobei in den Störungsgliedern die Massen, und in dem elliptischen Theile die Correctionen der Elemente als Unbekannte vorkommen werden. Aus diesen heliocentrischen Coordinaten berechne man weiter die geocentrische Länge und Breite des Planeten und setze sie der beobachteten Länge und Breite gleich. Dies giebt zwei Gleichungen, in denen die Correctionen der Elemente und die Massen, von welchen beiden man immer nur die ersten Potenzen beibehält, die unbekannten Grössen sind. Jede andere Beobachtung giebt ein neues Paar solcher Gleichungen, und je mehr man derselben bildet, mit desto grösserer Schärfe wird man, die Methode der kleinsten Quadrate anwendend, jene Unbekannten zu bestimmen im Stande sein.

Anhang.

I. Beweis der Unveränderlichkeit der mittleren Entfernungen, nach LAGRANGE.

Der Satz, dass die mittleren Entfernungen der Planeten von der Sonne keine säcularen Aenderungen erleiden, ist für die Astronomie von hoher Wichtigkeit, und der in dem Falle, wenn bloss die ersten Potenzen der Massen berücksichtigt werden, von Lagrange für diesen Satz gegebene Beweis so einfach und elegant, dass ich nicht umhin kann zu versuchen, diesen Beweis meinen Lesern verständlich zu machen. Auch wird sich dabei Gelegenheit zur Erörterung noch einiger die Störungsrechnungen betreffender, sehr fruchtbarer Ansichten und Begriffe finden, welche im Vorigen unberührt geblieben sind.

1) Setzen wir, dass auf einen Planeten m ausser der Sonne M kein anderer Körper anziehend wirke, und dass er sich daher vollkommen elliptisch bewege. Im Zeitpunkte T, wo seine Coordinaten gleich r, l, b, und die Geschwindigkeiten derselben gleich r', l', b' seien, empfange er irgend woher einen Stoss, wodurch die Geschwindigkeiten die resp. Incremente $\Delta r'$, $\Delta l'$, $\Delta b'$, erhalten. Die Folge hiervon wird sein, dass er von T an in einer anderen Ellipse, als vorher, fortgeht. So wie nämlich die Elemente seiner vorherigen elliptischen Bewegung nach der in §. 53 erklärten Methode aus r, l, b und r', l', b' zu bestimmen sind, so sind es die Elemente der nachherigen Bewegung aus r, l, b und $r' + \Delta r'$, $l' + \Delta l'$, $b' + \Delta b'$.

2) Um das Gesagte nur auf das Element a anzuwenden, heisse v die Geschwindigkeit des Planeten in seiner Bahn zur Zeit T vor dem Stosse, $v + \Delta v$ die durch den Stoss in demselben Zeitpunkte

geänderte Geschwindigkeit, und $a + \varDelta a$ der dadurch geänderte Werth von a. Alsdann wird sein (§. 53, 3)

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{u^2}{\mu}, \tag{a}$$

wo $\mu = k^2 = K(M + m)$;

$$\frac{1}{a + \varDelta a} = \frac{2}{r} - \frac{(u + \varDelta u)^2}{\mu}; \tag{b}$$

und wenn man (b) von (a) abzieht:

$$\frac{\varDelta a}{a^2} - \frac{(\varDelta a)^2}{a^3} + \ldots = \frac{2u\varDelta u + (\varDelta u)^2}{\mu}. \tag{c}$$

Nehmen wir an, dass der Stoss, und folglich $\varDelta u$, also auch $\varDelta a$, unendlich klein, gleich du und da, sind, so wird die Relation (c) zwischen diesen Incrementen:

$$\frac{da}{a^2} = \frac{2u\,du}{\mu}, \tag{d}$$

und ergiebt sich daher unmittelbar, wenn man (a) nach a und u differentiirt, r aber als constant ansieht.

3) Seien A_0, A_1, A_2, ... die Oerter eines Planeten in Zeitpunkten, welche in unendlich kleinen einander gleichen Intervallen, deren m die Zeiteinheit ausmachen, auf einander folgen; also $m \, . \, A_0 A_1$, $m \, . \, A_1 A_2$, etc. seine Geschwindigkeiten in diesen Zeitpunkten (§. 10). Wird nun der Planet bloss von der Sonne angezogen, und bewegt er sich daher rein elliptisch, so wird man stets dieselben sechs Elemente seiner Bewegung finden, mag man sie aus dem Orte A_0 und der Geschwindigkeit $m \, . \, A_0 A_1$, oder aus dem Orte A_1 und der Geschwindigkeit $m \, . \, A_1 A_2$, u. s. w. nach den in §. 53 gegebenen Vorschriften ableiten. Wird aber die Bewegung des Planeten um die Sonne durch die Anziehung eines oder mehrerer anderer Körper gestört, so werden diese Systeme von Elementen von einem Zeitpunkte zum anderen etwas Weniges von einander verschieden ausfallen, und man kann sich daher die gestörte Bewegung auch als eine elliptische vorstellen, bei welcher die Elemente sich fortwährend ändern. Wir wollen diese Elemente, zum Unterschiede von den bisher gebrauchten, bloss von den Säcularstörungen afficirten mittleren Elementen, die momentanen Elemente nennen.

4) Sei die Bewegung des Planeten eine gestörte, und die ihn zur Zeit T störende Kraft $= X$. Es ist dieses X gleich dem Incremente der Geschwindigkeit des Planeten, wenn die Kraft eine Zeiteinheit hindurch, ohne sich zu ändern, auf ihn gewirkt hat. Denkt man sich daher die störende Kraft den Planeten durch Stösse treibend,

welche sich in jedem Zeitelemente dt wiederholen (§§. 20 und 21), so ist Xdt die Geschwindigkeit, welche dem Planeten durch den Stoss im Zeitpunkte T mitgetheilt wird; $X_1 dt$ die Geschwindigkeit durch den nächstfolgenden, ein Zeitelement später eintretenden Stoss, wenn X_1 die störende Kraft in diesem späteren Zeitpunkte bezeichnet; u. s. w. Durch jeden dieser Stösse werden aber gleichzeitig die momentanen Elemente um ein unendlich Weniges geändert.

Um insbesondere die Aenderung von a zu finden, zerlege man die Kraft X in zwei, von denen U die Richtung der Bewegung hat, die andere V darauf perpendikular ist. Hierdurch zerlegt sich die durch den Stoss T erzeugte Geschwindigkeit Xdt in die Geschwindigkeit Udt und Vdt nach denselben Richtungen, und die Geschwindigkeit u in der Bahn gewinnt damit das Increment

$$du = Udt\ .$$

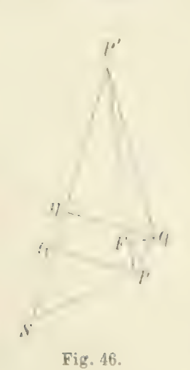
Durch diese von einem fremden Stoss bewirkte Aenderung von u erhält aber nach 2) die mittlere Entfernung, wenn sie zur Zeit T gleich a war, das Increment

$$da = \frac{2a^2}{\mu} udu = \frac{2a^2}{\mu} uUdt\ ;$$

und eine ähnliche Aenderung erleidet a zu Anfange jedes neuen Zeitelements dt. Die Geschwindigkeit, mit welcher sich a zur Zeit T ändert, ist hiernach

$$= \frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{\mu} uU\ .$$

5) Um diese Geschwindigkeit von a berechnen zu können, muss zuvor noch die nach der Richtung der Bewegung geschätzte störende Kraft U bestimmt werden. Wir wollen das hierzu von Lagrange angegebene Verfahren gebrauchen, ein Verfahren, welches in seiner Allgemeinheit der ganzen höheren Mechanik zu grossem Nutzen gereicht hat, und welches sich für den vorliegenden Fall folgendergestalt am einfachsten und fasslichsten darstellen lassen möchte.


Fig. 46.

Befindet sich in S (Fig. 46) die Sonne, in P der gestörte Planet, in P' der störende, dessen Masse, wie früher, m' heisse, so ist die störende Kraft aus zwei Componenten zusammengesetzt, von denen die eine, gleich $Km' : PP'^2$, die Richtung PP', die andere, gleich $Km' : SP'^2$, eine mit $P'S$ parallele Richtung hat (§. 91). Die nach einer beliebigen Richtung PQ geschätzte störende Kraft ist hiernach gleich der Summe dieser

beiden, nachdem man die erstere mit $\cos PQ^\wedge PP'$, die letztere mit

$$\cos PQ^\wedge P'S = -\cos PQ^\wedge SP'$$

multiplicirt hat, also

$$= \frac{Km'}{PP'^2} \cdot \frac{PF}{PQ} - \frac{Km'}{SP'^2} \cdot \frac{GH}{PQ} = Z,$$

wenn F, G, H die Fusspunkte der von Q auf PP' und von P, Q auf SP' gefällten Perpendikel sind.

Man nehme nun PQ unendlich klein an, so wird:

$$\frac{PF}{PP'^2} = \frac{1}{FP'} - \frac{1}{PP'} = \frac{1}{QP'} - \frac{1}{PP'}$$

und damit

$$Z = \frac{Km'}{PQ}\left(\frac{1}{QP'} - \frac{1}{PP'} - \frac{1}{SP'^2}(SH - SG)\right)$$

Es drückt aber $Km'(\ldots)$ das Increment der Grösse

$$Km'\left(\frac{1}{PP'} - \frac{1}{SP'^2} \cdot SG\right)$$

aus, wenn P nach Q fortrückt. Man nennt diese Grösse die störende Function (Störungsfunction). Um aus ihr die nach einer beliebigen Richtung geschätzte störende Kraft zu finden, hat man also ihr Increment zu bestimmen, wenn P um einen unendlich kleinen Raum PQ nach dieser Richtung fortbewegt wird, und das Increment durch diesen Raum zu dividiren.

Man setze, wie in §. 95,

$$SP = r, \quad SP' = r', \quad PP' = \varrho,$$

so ist

$$\cos S = \frac{r^2 + r'^2 - \varrho^2}{2rr'}, \quad SG = r\cos S = \frac{r^2 + r'^2 - \varrho^2}{2r'},$$

und damit die störende Function, welche Ω heisse:

$$\Omega = Km'\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{r^2 + r'^2 - \varrho^2}{2r'^3}\right).$$

6) Werde nun für PQ der Weg selbst genommen, welchen der Planet in dem auf T folgenden Zeittheilchen dt zurücklegt, so ist die nach der Richtung dieses Weges geschätzte, vorhin mit U bezeichnete, störende Kraft

$$= \frac{(d\Omega)}{PQ},$$

wo $(d\Omega)$ die Aenderung bedeuten soll, welche die Function Ω durch die wirkliche Ortsveränderung des Planeten P während des auf T

folgenden Elementes dt erfährt. Zugleich aber ist die Geschwindigkeit $u = PQ : dt$, und folglich

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{\mu} \cdot \frac{PQ}{dt} \cdot \frac{(d\Omega)}{PQ} = \frac{2a^2}{\mu} \cdot \frac{(d\Omega)}{dt} .$$

7) Es kommt nun zunächst auf die Berechnung der Function Ω für die Zeit T an. Bezeichnen für diese Zeit l und l' die in der Bahn von P gerechneten Längen von P und P', und b' die Breite von P' in Bezug auf dieselbe Bahn, so ist (§. 96)

$$\varrho^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos b' \cos (l - l') ,$$

und damit

$$\Omega = Km' \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{r}{r'^2} \cos b' \cos (l - l')\right) ,\text{*)}$$

worin noch für die Coordinaten r, l, r', l', b' ihre elliptischen Werthe, durch die zur Zeit T stattfindenden Elemente beider Bahnen ausgedrückt, zu setzen sind.

Lassen wir für's Erste die Excentricitäten und die gegenseitige Neigung beider Bahnen unberücksichtigt, so wird

$$\varrho^2 = a^2 + a'^2 - 2aa' \cos (\lambda - \lambda') .$$

---

*) Man sieht bald, wie man aus dieser Formel die in §. 95 erhaltenen Ausdrücke für die drei rechtwinklig coordinirten störenden Kräfte ableiten kann. Denn zuerst ist die nach der Richtung von r geschätzte Kraft gleich dem partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial \Omega}{\partial r} = - Km' \left(\frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial \varrho}{\partial r} + \frac{1}{r'^2} \cos b' \cos (l - l') \right) .$$

Substituirt man hierin den aus der Gleichung für ϱ fliessenden Werth von

$$\frac{\partial \varrho}{\partial r} = \frac{r}{\varrho} - \frac{r'}{\varrho} \cos b' \cos (l - l') ,$$

so findet sich der mit m' multiplicirte Theil der Kraft T in §. 95.

Ebenso erhält man die dort mit V bezeichnete Kraft durch eine Verrückung des Planeten um rdl, während r ungeändert bleibt, also

$$V = \frac{\partial \Omega}{r \partial l} .$$

Um endlich die Kraft W zu finden, lege man dem Planeten eine Breite b in Bezug auf seine Bahn bei, wodurch

$$\varrho^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' (\sin b \sin b' + \cos b \cos b' \cos (l - l'))$$

wird, und man bekommt

$$W = \frac{\partial \Omega}{r \partial b} ,$$

nachdem man in der Entwickelung dieses partiellen Differentialquotienten $b = 0$ gesetzt hat.

$$\Omega = Km'\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{a}{a'^2}\cos(\lambda - \lambda')\right) = \frac{1}{2}Km'\sum A_i \cos i(\lambda - \lambda'), \; ^{*})$$

worin A_i eine Function von a, a' und der Stellenzahl i ist (§§. 157 und 158).

Um hieraus den Werth von Ω, insofern er von den Excentricitäten abhängig ist, zu ermitteln, hat man statt der mittleren Werthe der beiden Radien und der beiden Längen ihre elliptischen

$$r = a + x, \quad l = \lambda + y, \quad r' = a' + x', \quad l' = \lambda' + y'$$

zu setzen (§. 159), wo

$$x = -ae\cos(\lambda - \omega) + \frac{1}{2}ae^2(1 - \cos 2(\lambda - \omega)) + \ldots,$$

$$y = 2e\sin(\lambda - \omega) + \frac{5}{4}e^2\sin 2(\lambda - \omega) + \ldots,$$

$$x' = -a'e'\cos(\lambda' - \omega') + \frac{1}{2}a'e'^2(1 - \cos 2(\lambda' - \omega')) + \ldots,$$

$$y' = 2e'\sin(\lambda' - \omega') + \frac{5}{4}e'^2\sin 2(\lambda' - \omega') + \ldots$$

ist (§. 51). Der Anfang der dazu nöthigen Rechnung ist der in §. 159 geführten ähnlich. Es wird nämlich, wenn man jenen mittleren Werth von Ω gleich O setzt, der elliptische

$$\Omega = O + x\frac{\partial O}{\partial a} + y\frac{\partial O}{\partial \lambda} + x'\frac{\partial O}{\partial a'} + y'\frac{\partial O}{\partial \lambda'}$$

$$+ \frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2 O}{\partial a^2} + xy\frac{\partial^2 O}{\partial a \partial \lambda} + xx'\frac{\partial^2 O}{\partial a \partial a'} + \ldots + \frac{1}{6}x^3\frac{\partial^3 O}{\partial a^3} + \ldots$$

Ohne aber diese Rechnung hier anfangen, und noch weniger sie weiter ausführen zu wollen, so erhellet schon aus der dortigen und aus früheren ähnlichen Rechnungen, dass, bis zu welcher Ordnung der Excentricitäten man auch fortgehen mag, alle Glieder in der Reihenentwickelung von Ω von der Form

---

*) Aus diesem mittleren Werthe von Ω ergeben sich nach voriger Anmerkung die von den Excentricitäten unabhängigen störenden Kräfte in der Richtung des Radius

$$\frac{\partial \Omega}{\partial a} = \frac{1}{2}Km'\sum\frac{\partial A_i}{\partial a}\cos i(\lambda - \lambda')$$

und perpendikular darauf in der Bahnebene

$$\frac{\partial \Omega}{a\partial \lambda} = -\frac{1}{2}Km'\sum iA_i \sin i(\lambda - \lambda').$$

Ausdrücke, welche mit den auf ganz andere Weise in §. 158 gefundenen vollkommen übereinstimmen.

$$Km' \, . \, C \cos (i\lambda - i'\lambda' + \gamma)$$

sein werden, wo C und γ Functionen der Elemente beider Bahnen sind, i und i' aber ganze Zahlen bedeuten, die alle positiven und negativen Werthe, Null nicht ausgeschlossen, annehmen können.

Endlich ist klar, dass eine Reihe von derselben Form für Ω auch dann sich ergeben muss, wenn noch auf den vorhin weggelassenen Factor $\cos b'$ mit Rücksicht genommen wird. Denn es ist

$$\cos b' = 1 - \frac{1}{2}\sin b'^2 + \ldots = 1 - \frac{1}{2}\sin \iota^2 \sin (\lambda' - \vartheta)^2 + \ldots$$

$$= 1 - \frac{1}{4}\iota^2 [1 - \cos 2(\lambda' - \vartheta)] + \ldots,$$

mit welcher nach den geraden Potenzen der Neigung fortgehenden Reihe ein Theil der Glieder in der vorigen Entwickelung von Ω multiplicirt werden muss. Offenbar aber können dadurch keine Glieder von anderer Form, als der schon bemerkten, zum Vorschein kommen.

Nach diesem Allen kann die für Ω sich bildende Reihe ausgedrückt werden durch

$$\Omega = Km' [A + \sum C \cos (i\lambda - i'\lambda' + \gamma)],$$

mit der Erinnerung, dass in dem summatorischen Gliede i und i' nicht zugleich $= 0$ anzunehmen sind, indem das dadurch entstehende, von λ und λ' freie und bloss von den Elementen abhängige Glied schon durch A sich dargestellt findet.

8. In der Reihe für Ω sind, streng genommen, nicht bloss die mittleren Längen λ und λ', sondern auch A, C und γ, als Functionen der zur Zeit T stattfindenden Elemente beider Planeten, mit T selbst veränderlich. Da aber die Aenderungen der Elemente, als von den gegenseitigen Störungen herrührend, m' oder m zum Factor haben, und Ω eine mit m' multiplicirte Grösse ist, so sind, wenn wir bloss die erste Potenz der Massen berücksichtigen, A, C und γ als constant zu betrachten.

Unter dieser Annahme, die von jetzt an fest gehalten werden soll, ist λ die einzige in Ω vorkommende Grösse, welche sich bei der Bewegung des Planeten P ändert, und man wird folglich die durch diese Bewegung während dt entstehende Aenderung von Ω finden, wenn man Ω bloss nach λ differentiirt, also

$$(d\Omega) = - Km' d\lambda \sum i C \sin (i\lambda - i'\lambda' + \gamma).$$

Hiermit und weil

$$d\lambda = n\,dt \quad \text{und} \quad \mu = k^2(M + m)$$

ist, findet sich nach (6) die Geschwindigkeit von a:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{m'}{M+m} \cdot 2a^2 n \sum iC \sin(i\lambda - i'\lambda' + \gamma).$$

Es sind aber n und n' die Geschwindigkeiten von λ und λ', und daher

$$\sin(i\lambda - i'\lambda' + \gamma) \text{ die Geschwindigkeit von } -\frac{\cos(i\lambda - i'\lambda' + \gamma)}{in - i'n'};$$

mithin muss

$$a = \frac{m'}{M+m} \cdot 2a^2 \sum \frac{in}{in - i'n'} C \cos(i\lambda - i'\lambda' + \gamma) + \text{Const.}$$

sein. Der mit T sich ändernde Theil von a besteht demnach aus periodischen Gliedern, welche von dem jedesmaligen Stande der beiden Planeten gegen einander und gegen ihre Apsiden und Knoten abhängen. Auch kann keines dieser Glieder die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen, oder unendlich gross werden, weil i und i' nie zugleich Null sind, und das Verhältnis $n : n'$ incommensurabel ist.

Die von der ersten Potenz der störenden Masse abhängigen Störungen der mittleren Entfernung sind demnach, wie weit man auch die Approximation in Beziehung auf die Excentricitäten und die Neigung treiben mag, keine säcularen, sondern bloss periodische Störungen.

Da endlich bei zwei oder mehreren störenden Planeten die Totalstörung, so lange nur die ersten Potenzen der Massen berücksichtigt werden, einfach der Summe der von den einzelnen Planeten bewirkten Störungen gleich ist (§. 163), *so muss der bloss für Einen störenden Planeten bewiesene Satz auch bei jeder beliebigen Anzahl solcher Körper in Richtigkeit sein.*

II. Ueber die Methode der speciellen Störungen.

Die im dritten und vierten Abschnitte dargestellte Methode, die Störungen zu berechnen, welche ein Himmelskörper in dem Laufe eines anderen hervorbringt, beruht auf der Entwickelung von Reihen, welche nach den Potenzen der Excentricitäten und der gegenseitigen Neigung der Bahnen beider Körper fortgehen. Soll daher diese Methode angewendet werden können, so müssen, damit die Reihen

schnell genug convergiren, die Excentricitäten und die Neigung nur klein sein. Werden diese Bedingungen nicht erfüllt, was namentlich bei den Kometen und mehr oder weniger bei den kleinen Planeten der Fall ist, so muss man auf eine andere Methode bedacht sein, welche von Reihenentwickelungen frei ist. Eine solche andere Methode ist die der speciellen Störungen. Sie besteht im Wesentlichen darin, dass man, wenn die momentanen Elemente des gestörten Planeten für einen gewissen Zeitpunkt (Anh. I. 3) gegeben sind, einen von diesem Punkte anfangenden Zeitraum, innerhalb dessen auf die Geschwindigkeiten, mit denen sich die Elemente ändern, die Aenderungen selbst noch keinen merkbaren Einfluss haben, durch einander nahe genug liegende Zeitpunkte in gleiche Theile theilt; dass man mit den Elementen im Anfangspunkte, die Geschwindigkeiten berechnet, mit denen sich die Elemente in diesem und den folgenden Theilpunkten ändern, und dass man hierauf aus diesen Geschwindigkeiten und aus den Werthen der Elemente im Anfangspunkte, nach einem unter dem Namen der mechanischen Quadratur bekannten Verfahren, ihre Werthe für jeden der übrigen Theilpunkte ableitet, um somit durch Interpolation ihre Werthe für irgend einen dazwischen fallenden Zeitpunkt, und aus diesen nach bekannten Regeln die Coordinaten des gestörten Körpers für denselben Zeitpunkt, berechnen zu können.

Während daher die erstere Methode allgemeine Formeln für die Zusätze aufstellt, welche an den mit gewissen mittleren Elementen nach der elliptischen Theorie berechneten Coordinaten der Störungen wegen anzubringen sind, und wonach diese Zusätze für jeden Zeitpunkt ohne Weiteres berechnet werden können, vermag die letztere Methode bloss die Geschwindigkeiten der Elemente durch allgemeine Formeln auszudrücken, und kann aus den für einen gewissen Zeitpunkt gegebenen Elementen zu denen eines späteren Zeitpunktes nicht auf einmal, sondern nur schrittweise durch Berechnung der nach und nach eintretenden Aenderungen gelangen.

Es ist nicht meine Absicht, hier eine nähere Anleitung zur Berechnung dieser speciellen Störungen zu geben. Man findet alles deshalb zu wissen Nöthige zusammengestellt in zwei in den *Berliner Jahrbüchern* für 1837 und 1838 enthaltenen Abhandlungen Encke's *Ueber mechanische Quadratur* und *Ueber die Berechnung der speciellen Störungen*, worin ihr Verfasser die ihm früher von Gauss über diese Gegenstände mitgetheilten und später von ihm selbst bei Kometen und den kleinen Planeten so häufig angewendeten Formeln und Methoden veröffentlicht und mit einer reichen Anzahl die prac-

tische Anwendung betreffender Bemerkungen, so wie mit einem ausführlichen Beispiele, begleitet hat.*)

Für gegenwärtigen Zweck setze ich nur hinzu, dass man zu den Formeln für die Geschwindigkeiten, mit denen sich die momentanen Elemente des gestörten Planeten ändern, mit Hülfe desselben Principes gelangen kann, dessen wir uns im Obigen bei der Bestimmung der Geschwindigkeit der mittleren Entfernung bedienten. Es wird nämlich jede der Gleichungen, welche die Elemente, durch die Coordinaten und deren Geschwindigkeiten ausgedrückt, darstellen (§. 53), nach den Elementen und den Geschwindigkeiten differentiirt, und sodann für das Differential jeder Geschwindigkeit die mit dem Differential der Zeit multiplicirte Kraft gesetzt, welche nach der Richtung der Geschwindigkeit wirkt, worauf, wenn man noch jede dieser Gleichungen mit letzterem Differential dividirt, die gesuchten Ausdrücke für die Geschwindigkeiten der Elemente hervorgehen.

So ist z. B. die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Länge l des Planeten ändert,

$$= l' = \frac{\sqrt{\mu p}}{rr} ,$$

folglich die Geschwindigkeit, mit welcher der Planet in perpendikularer Richtung auf dem Radius in der Ebene der Bahn fortgeht,

$$= rl' = \frac{\sqrt{\mu p}}{r} .$$

Das Differential dieser Geschwindigkeit ist gleich $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{p}} \cdot \frac{dp}{r}$. Setzen wir daher die nach derselben Richtung wirkende, im Früheren mit T bezeichnete Kraft gleich $Km'Q$, wo Q eine aus §. 95 bekannte Function der Coordinaten des gestörten und des störenden Planeten ist, so wird

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{p}} \cdot \frac{dp}{r} = Km'Q\,dt .$$

*) Einen Nachtrag zu der oben angeführten Abhandlung bildet der Aufsatz von Encke, *Ueber die Variation der Constanten bei der Planetenbewegung*, im *Berliner Jahrbuche* für 1855. In neuerer Zeit zieht man in der Regel vor, direct die Störungen der drei Coordinaten an Stelle der Störungen der sechs Bahnelemente zu berechnen. Die einschlagenden Vorschriften sind für rechtwinklige Coordinaten zuerst von Encke (*Berliner Monatsbericht* vom Novbr. 1851 und *Berliner Jahrbuch* für 1858) und von G. P. Bond, *On some applications of the method of mechanical Quadratures*. May 1849 (in den *Memoirs of the American Academy of arts and sciences*, Vol. IV), für Polarcoordinaten von Brünnow (*Astronomische Nachrichten* Nr. 808), und in der ihm eigenthümlichen Form von Hansen (*Astron. Nachrichten* Nr. 799—801, ferner Nr. 823—826) entwickelt worden. A. d. H.

und somit die Geschwindigkeit der Aenderung des halben Parameters:

$$\frac{dp}{dt} = 2\,Km'\sqrt{\frac{p}{\mu}}\,.\,rQ = \frac{m'}{M+m}\,.\,2\,n\sqrt{a^3p}\,.\,rQ\ ,$$

weil $\mu = K(M+m) = n^2a^3$ ist.

Statt einer weiteren Ausführung dieses Gegenstandes will ich zum Schlusse des Ganzen noch einen Satz entwickeln, durch den man, sollte er auch nicht bei der wirklichen Berechnung von Nutzen sein, von den Aenderungen, welche die verschiedenen Elemente eines Planeten durch eine augenblickliche Störung erleiden, wenigstens eine sehr anschauliche Uebersicht gewinnt.

1) Befindet sich die Sonne in S und der Planet zu einer gewissen Zeit T in P, so ist seine elliptische Bewegung gegeben, wenn noch der zweite Brennpunkt F der Ellipse, oder ihr zwischen S und F mitten inne liegender Mittelpunkt M gegeben ist. Denn erstens ist die Ebene der Ellipse einerlei mit der Ebene des Dreieckes SPF, und daher ihrer Lage nach gegeben. Sodann ist ihre grosse Axe gleich $SP+FP$, ihre Excentricität gleich $SF:(SP+FP)$, und ihr Perihel liegt von S aus nach der Richtung FS, wodurch ihre Grösse, Form und Lage in der Ebene SPF gegeben sind. Endlich ist mit der grossen Axe auch die Umlaufszeit bekannt, hierdurch aber und daraus, dass der Planet zur Zeit T sich in P befindet, lässt sich sein Ort in der Ellipse für jeden anderen Zeitpunkt ermitteln.

2) Empfängt nun der Planet in P, bis wohin er in der durch S, P und F bestimmten Ellipse fortgegangen ist, einen fremdartigen Stoss, so wird er eine andere Ellipse zu beschreiben anfangen, deren zweiter Brennpunkt F' und deren Mittelpunkt M' sei. Die Elemente der letzteren Ellipse werden eben so durch S, P und F', wie die der ersteren durch S, P und F, bestimmt sein, und man wird die durch den Stoss bewirkte Aenderung der Elemente des Planeten vollständig anzugeben vermögen, wenn man die Aenderung des Ortes des zweiten Brennpunktes, oder auch die damit parallele und halb so grosse Ortsänderung des Mittelpunktes der Ellipse zu bestimmen im Stande ist. So wird z. B. die grosse Axe um $F'P - FP$ sich ändern, und die Apsidenlinie wird aus der Richtung FS in $F'S$ übergehen.

3) Um die Verrückung von F oder M jetzt näher zu bestimmen, stelle die in der Ebene SPM enthaltene Linie PQ (Fig. 17) die Geschwindigkeit des Planeten in P vor dem Stosse dar. Die ihm durch den Stoss ertheilte Geschwindigkeit sei gegen erstere sehr klein und $= QR$, folglich PR die Geschwindigkeit unmittelbar nach

demselben. Werde ferner die Excentricität der Ellipse so klein angenommen, dass ihr Quadrat vernachlässigt, und mithin die Ellipse selbst als ein Kreis angesehen werden kann (§. 42), dessen Mittelpunkt vor dem Stosse M ist, und dessen Halbmesser MP nach der Natur des Kreises in der Ebene SPQ auf PQ perpendikular steht. Aus gleichem Grunde wird nach dem Stosse der Mittelpunkt M' in der Ebene SPR in einer auf PR perpendikularen Linie liegen.

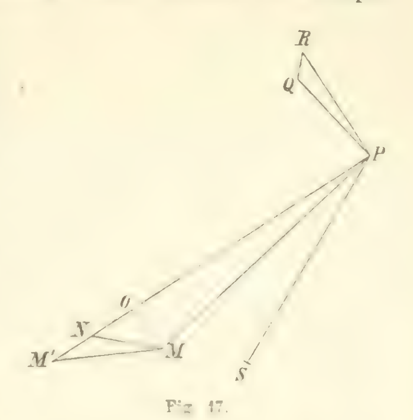


Fig. 17.

4) Man kennt somit die Richtung, nach welcher hin der Punkt M' von P aus liegt, und es ist nur noch übrig die Länge von PM' zu bestimmen. Zu dem Ende erinnere man sich des Satzes, dass die Flächengeschwindigkeit von einer Planetenbahn zur anderen der Quadratwurzel aus dem Parameter proportional ist (§. 52). Nun sind die Flächengeschwindigkeiten vor und nach dem Stosse gleich den Dreiecksflächen SPQ und SPR, und die halben Parameter gleich den mittleren Entfernungen MP und $M'P$ oder den Halbmessern der beiden Kreise, wegen Vernachlässigung des Quadrats der Excentricität (§. 49). Es verhält sich demnach

$$\sqrt{MP} : \sqrt{M'P} = SPQ : SPR\ .$$

Es ist aber

$$SPQ = \tfrac{1}{2} SP \,.\, PQ \,.\, \sin SPQ$$

und

$$SPR = \tfrac{1}{2} SP \,.\, PR \,.\, \sin SPR\ .$$

Weil ferner die Winkel SPQ und SPR nur sehr wenig von einander verschieden sind und überdies wegen der geringen Excentricität nur wenig von 90° abweichen, so sind ihre Sinus einander gleich zu achten, und es verhält sich daher

$$\sqrt{MP} : \sqrt{M'P} = PQ : PR\ ,$$

oder, wenn man auf PM' ein Stück PN von solcher Länge abschneidet, dass sich

$$(a) \qquad PM : PN = PQ : PR$$

verhält:

$$\sqrt{PM} : \sqrt{PM'} = PM : PN ,$$

folglich

$$PM : PN = PN : PM' ;$$

und wenn man noch auf PM' eine Linie $PO = PM$ abträgt,

$$PO : ON = PN : NM' ,$$

also $ON = NM'$, weil PO und PN nur sehr wenig von einander verschieden sind.

5) Nehmen wir noch an, dass die Richtung QR des Stosses, und somit auch M', in der Ebene $SPQM$ enthalten sei. Wegen der rechten Winkel MPQ und NPR sind alsdann die Winkel MPN und QPR einander gleich, und deshalb und wegen a die Dreiecke MPN und QPR einander ähnlich, folglich auch MN auf QR perpendikular.

Sind demnach der Mittelpunkt M einer nahe kreisförmigen Planetenbahn, der Ort P des Planeten, seine auf MP sehr nahe perpendikulare Geschwindigkeit PQ, und eine ihm durch einen Stoss in P in der Ebene der Bahn mitgetheilte gegen PQ sehr kleine Geschwindigkeit QR gegeben, so findet man die durch den Stoss bewirkte Verrückung des Mittelpunktes von M nach M' dadurch, dass man in der Bahnebene durch P und M zwei resp. auf PR und QR perpendikulare Linien zieht, und dass man, wenn diese sich in N schneiden, von P nach N zu eine Linie $PO = PM$ abträgt und $NM' = ON$ macht, so dass M' und O auf entgegengesetzte Seiten von N fallen.

6) Ist die Richtung QR des Stosses auf der Bahnebene SPQ perpendikular, so ändert diese ihre Lage und wird SPR, in welcher der neue Mittelpunkt M' dieselbe Lage, wie M, gegen S und P hat.

Zusätze. *a.* Setzen wir in dem noch Folgenden fest, dass der Stoss, wie in 5), in der Bahnebene selbst geschehe, und nehmen wir zuerst den speciellen Fall an, dass seine Richtung in dieser Ebene auf PQ perpendikular sei, so ist es auch MN auf PM. Alsdann fallen O und M' mit N zusammen, und es steht daher auch MM' auf QR rechtwinklig.

b. Fällt QR in PQ selbst, sei es nach P zu, oder nach der entgegengesetzten Seite, so haben PQ und PR, folglich auch PM und PM', einerlei Richtung, und es ist daher auch in diesem Falle MM' auf QR rechtwinklig.

c. In allen übrigen Fällen weicht MM' von der auf QR perpendikularen Lage MN ab. Indessen kann die grösste Abweichung

nur $19^0 28'$ ($= \text{arc tang} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$) betragen. So gross findet sich nämlich das Maximum des Winkels an der Spitze M eines Dreieckes NMM', welches die Eigenschaft hat, dass der Fusspunkt O eines von der Spitze auf die Basis NM' gefällten Perpendikels ausserhalb der Basis fällt, während zugleich $ON = NM'$ ist.

d) Wird das Dreieck PQR um P im Sinne der Bewegung des Planeten nach links um 90^0 gedreht, so fällt es in das Dreieck PMN, und QR erhält einerlei Richtung mit MN. Man kann daher auch sagen: *die Richtung, nach welcher M fortrückt, weicht von der Richtung des Stosses, nachdem diese um* 90^0 *im Sinne der Planetenbewegung gedreht worden, nie allzu bedeutend, höchstens um* $19\frac{1}{2}^0$, *ab.*

Mit Hülfe des so ausgedrückten Satzes kann man sich von der Beschaffenheit der Aenderungen der Elemente im Allgemeinen, ob und welche von ihnen wachsen, welche abnehmen, immer leicht Rechenschaft geben.

Bewegt sich z. B. der Planet P in einem widerstehenden Mittel, und wirkt daher auf ihn unausgesetzt eine störende Kraft nach der entgegengesetzten Richtung seiner Bewegung, so rückt nach jenem Satze der Mittelpunkt M stetig nach P hin; die mittlere Entfernung MP wird folglich immer kleiner, und damit auch die Umlaufszeit. Wenn daher, um diesen Gegenstand noch etwas näher in's Auge zu fassen, M_0, M_1, M_2, ... (Fig. 48) die Oerter von M in Zeitpunkten, die um einander gleiche Zeitelemente getrennt sind, und P_0, P_1, P_2, ... die gleichzeitigen Oerter von P bezeichnen, so liegt M_1 von M_0 nach P_0 hin, M_2 von M_1 nach P_1 hin, u. s. w.; und da zugleich P_0P_1, P_1P_2, ... Bogenelemente sind, welche M_0, M_1, ... zu Mittelpunkten haben, so ist die Bewegung von P der Bewegung des Endpunktes eines gespannten, sich über der Curve $M_0M_1M_2$ ... aufwickelnden und damit immer kürzer werdenden Fadens vergleichbar.

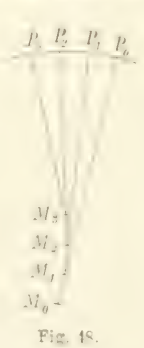


Fig. 48.

Weil ferner bei der nahe constanten Geschwindigkeit von P die davon abhängige störende Kraft nahe constant bleibt, so werden auch die von letzterer abhängigen Verrückungen des Mittelpunktes M_0M_1, M_1M_2, ... nahezu einander gleich sein; und weil überdies die Richtung, nach welcher sich M bewegt, auf der des Planeten P perpendikular ist, so wird die Bewegung von M der von P in dem Verhältnisse von M_0M_1 zu P_0P_1 nahe ähnlich sein. Der Mittelpunkt der Bahn eines in einem widerstehenden Mittel sich bewegenden Pla-

neten wird daher während jedes Umlaufes des Planeten einen kleinen Kreis beschreiben, und darin stets um 90° hinter dem gleichzeitigen Orte des Planeten in seiner Bahn zurück sein; dabei wird während jedes Umlaufes die mittlere Entfernung MP um die Peripherie des kleinen Kreises kleiner werden, indem sich um eben so viel der vorhin gedachte Faden aufwickelt. — Man sehe Fig. 49, wo A, B, C, D und a, b, c, d gleichzeitige Oerter von P und M vorstellen.

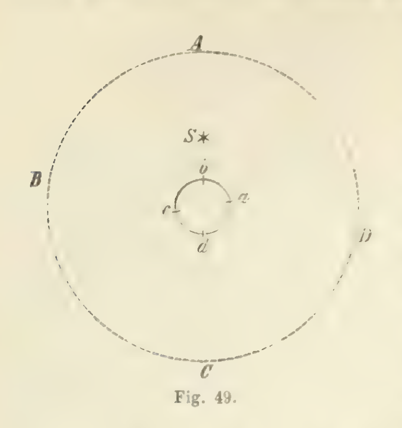
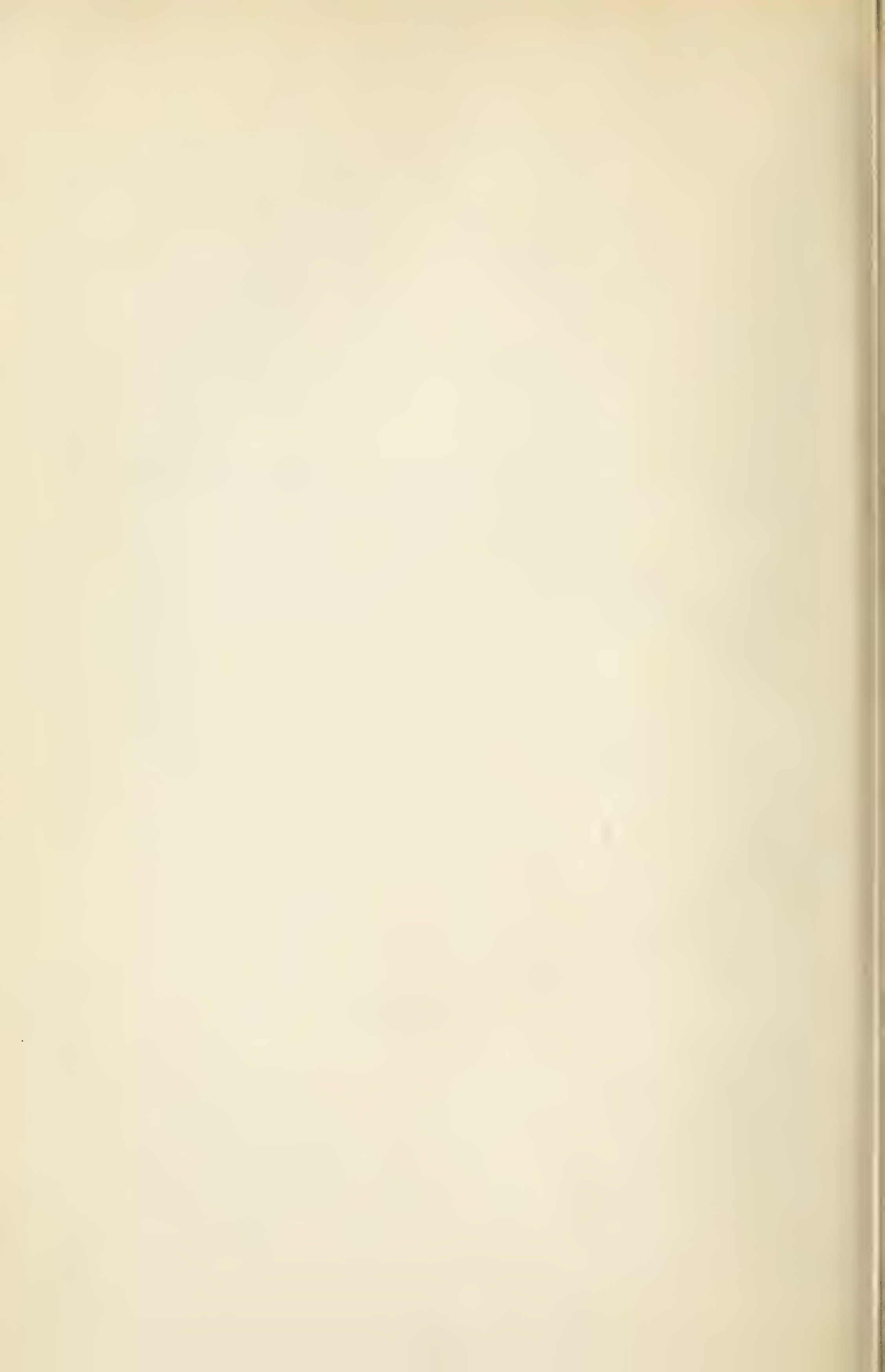


Fig. 49.

Noch erhellet aus dieser Kreisbewegung von M, dass die Apsidenlinie MS, während der Planet vom Perihel A zum Aphel C fortgeht, aus der Lage aS in cS übergehend, sich rückwärts dreht, und während der anderen Hälfte der Umlaufszeit sich wieder vorwärts bewegt; dass endlich die Excentricität, gleich $MS : MP$, am kleinsten gleich $bS : bB$, und am grössten gleich $dS : dD$ ist, wenn sich der Planet zwischen Perihel und Aphel in der Mitte, resp. in B und D, befindet.

Elementare Herleitung des Newton'schen Gesetzes aus den Kepler'schen Gesetzen der Planetenbewegung.

[Crelle's Journal, Band 31, Seite 174—177. 1845.]



Eine Ellipse kann als die rechtwinklige Projection eines Kreises auf eine Ebene betrachtet werden, und folglich die Bewegung eines Planeten P in einer Ellipse als die Projection der Bewegung eines anderen Körpers Q in einem Kreise auf die Ebene der Planetenbahn. Nach einem bekannten Satze der Mechanik wird alsdann auch die beschleunigende Kraft V, welche die elliptische Bewegung von P bewirkt, die Projection der beschleunigenden, die Kreisbewegung von Q erzeugenden Kraft W auf die Ebene der Planetenbahn sein.

Diese Betrachtung giebt uns ein leichtes Mittel an die Hand, um mit Hülfe ganz elementarer Sätze die einen Planeten P treibende Kraft V zu bestimmen. Es sei (Fig. 1) AB die grosse Axe gleich $2a$, C der Mittelpunkt, CD die halbe kleine Axe, e die Excentricität und p der halbe Parameter der Ellipse, in welcher sich der Planet P um die in dem einen Brennpunkte S ruhende Sonne bewegt. Man beschreibe über AB als Durchmesser einen Kreis und gebe diesem eine solche Neigung, gleich i, gegen die Ebene der Ellipse, dass die rechtwinklige Projection des auf AB normalen Halbmessers CE auf diese Ebene identisch mit CD wird; denn somit wird die Projection des Kreises auf dieselbe Ebene die Ellipse selbst sein. Da hiernach CDE ein rechter Winkel, und

$$CE = CB = SD$$

zufolge der Haupteigenschaften der Brennpunkte ist, so sind die Dreiecke CDE und DCS einander gleich und ähnlich, mithin

$$DE = CS, \quad \text{und} \quad \frac{DE}{CE} = \frac{CS}{CB} \quad \text{oder} \quad \sin i = e \ ,$$

d. h. *dem über die grosse Axe einer Ellipse beschriebenen Kreise muss, wenn von ihm die Ellipse als rechtwinklige Projection soll betrachtet werden können, eine solche Neigung gegen die Ebene der Ellipse gegeben werden, dass der Sinus dieser Neigung der Excentricität der **Ellipse gleich ist.***

Ueberdies hat man

$$\cos i^2 = \frac{CD^2}{CE^2} = \frac{CD^2}{CB} \cdot \frac{1}{CB} = \frac{p}{a} \, .$$

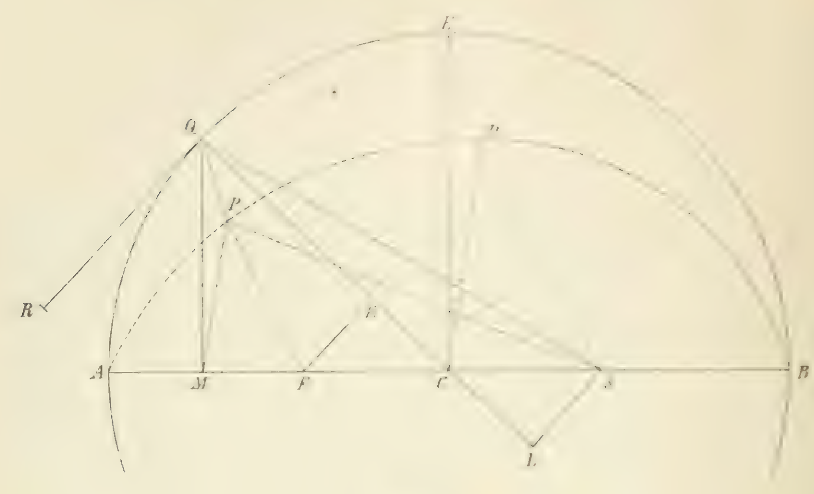


Fig. 1.

Bei der Bewegung von P in der Ellipse und von Q im Kreise soll nun immer P die Projection von Q und mithin die Linie SP die Projection der Linie SQ sein. Die Flächengeschwindigkeit von SP, oder die Fläche, welche SP in der Zeiteinheit überstreicht, setze man gleich $\frac{1}{2}c$, und die Flächengeschwindigkeit von SQ gleich $\frac{1}{2}k$, so ist die Fläche c die Projection der Fläche k, folglich

$$c = k \cos i \, , \quad k^2 = \frac{c^2}{\cos i^2} = \frac{a}{p} c^2 \, , \text{ also } \frac{k^2}{a} = \frac{c^2}{p} \, .$$

Da nach Kepler's zweitem Gesetze c constant, und daher nach der allbekannten Schlussweise die auf P wirkende Kraft V nach S gerichtet ist, so wird auch k constant sein; die auf Q wirkende Kraft W wird die Richtung QS haben, und es wird V, als die Projection von W, gleich $\frac{SP}{SQ} \cdot W$ sein.

Wir wollen nun zunächst die Kraft W zu bestimmen suchen und deshalb durch die den Kreis in Q berührende Linie QR die Geschwindigkeit von Q ausdrücken. Damit wird k gleich dem Doppelten des Dreiecks SQR sein, also, wenn L den Fusspunkt des von S auf CQ gefällten Perpendikels bezeichnet,

$$k = LQ \cdot QR \, , \quad \text{folglich} \quad QR = \frac{k}{LQ} \, .$$

Es ist aber, wenn bei einem beliebig sich in einer Curve bewegenden Körper die Kraft, welche die Bewegung erzeugt, in eine Tangential- und eine Normalkraft zerlegt wird, letztere stets dem Quadrate der Geschwindigkeit, dividirt durch den Halbmesser der Krümmung, gleich. Hiernach ist die auf Q nach der Richtung QC wirkende Normalkraft

$$N = \frac{QR^2}{a} = \frac{k^2}{a \cdot LQ^2} = \frac{c^2}{p \cdot LQ^2} .$$

Zugleich aber ist N, als die nach der Richtung QC geschätzte Kraft W, gleich $\frac{LQ}{SQ} \cdot W$, und daher

$$W = \frac{SQ}{LQ} \cdot N = \frac{c^2}{p} \cdot \frac{SQ}{LQ^3} ,$$

und somit endlich die gesuchte, auf P wirkende Kraft

$$V = \frac{SP}{SQ} \cdot W = \frac{c^2}{p} \cdot \frac{SP}{LQ^3} .$$

Es lässt sich aber leicht zeigen, dass $LQ = SP$ ist. Denn fällt man von Q auf AB das Perpendikel QM, so verhält sich

$$MQ : LS = CQ : CS = CE : DE = MQ : PQ ;$$

folglich ist $LS = PQ$. Die bei L und P rechtwinkligen Dreiecke QLS und SPQ sind daher einander gleich und ähnlich; folglich ist

$$LQ = SP .$$

Hierdurch wird

$$V = \frac{c^2}{p} \cdot \frac{1}{SP^2} .$$

Die Kraft, welche einen Planeten nach der Sonne treibt, ist daher umgekehrt dem Quadrate seiner Entfernung von der Sonne proportional, und dieses nicht bloss für einen und denselben Planeten, sondern auch von einem zum anderen, weil das Verhältniss $c^2 : p$ zufolge des dritten Kepler'schen Gesetzes von einer Planetenbahn zur anderen constant ist.

Zusatz. Die eben gemachte Construction ist in so fern noch merkwürdig, als sich aus ihr für die Ellipse, wenn diese als die rechtwinklige Projection eines Kreises auf eine Ebene definirt wird, ein sehr einfacher synthetischer Beweis der Haupteigenschaften ihrer Brennpunkte ableiten lässt.

Ist nämlich S ein fester Punkt in der Ebene eines Kreises und Q ein beliebiger Punkt in der Peripherie desselben, und fällt man von Q und S auf die durch S und Q zu legenden Durchmesser des Kreises die Perpendikel QM und LS, so verhalten sich dieselben

$$MQ : LS = CQ : CS,$$

wenn C des Kreises Mittelpunkt bezeichnet: d. h. die Entfernungen der Punkte Q und S von den durch S und Q zu legenden Durchmessern stehen in einem constanten Verhältnisse.

Es werde nun der Kreis auf eine durch CS zu legende Ebene rechtwinklig projicirt, und es sei dabei P die Projection von Q, und D die Projection von E, als dem Endpunkte des auf CS perpendikularen Halbmessers, so verhält sich

$$PQ : MQ = DE : CE,$$

und wenn man diese Proportion mit der vorigen zusammensetzt:

$$PQ : LS = DE : CS;$$

d. h. die Entfernungen eines beliebigen Punktes Q in der Peripherie und eines festen Punktes S in der Ebene eines Kreises, und zwar die Entfernung des Punktes Q von einer durch S und den Mittelpunkt C des Kreises gelegten festen Ebene, die des Punktes S von einer durch Q und C gelegten Geraden, stehen in einem constanten Verhältnisse.

Bestimmt man folglich die Lage der Projectionsebene so, dass $DE = CS$ wird, oder vielmehr umgekehrt bestimmt man im Durchmesser AB, in welchem die Projectionsebene den Kreis schneidet, den Punkt S solchergestalt, dass

$$CS = DE$$

und mithin, wegen der dann congruenten Dreiecke CDE und DCS

$$SD = CE = \frac{1}{2} AB$$

wird, so wird $PQ = LS$; woraus, weil alsdann die Dreiecke SPQ und QLS congruiren,

$$SP = LQ$$

folgt.

Auf gleiche Weise zeigt sich, wenn man in AB die Linie DE von C nach F auf die andere Seite von C trägt, oder auch

$$FD = \frac{1}{2} AB$$

macht und von F auf CQ das Perpendikel FK fällt, dass dann $FP = KQ$ ist. Wegen $FC = CS$ ist aber auch $KC = CL$ und daher

$$FP + SP = KQ + LQ = 2CQ = AB,$$

welches die zu beweisende Eigenschaft der Brennpunkte F und S ist.

Variationum quas elementa motus perturbati planetarum subeunt nova et facilis evolutio.

(Crelle's Journal, Band 32, S. 106—118, 1844.)

Programma quo ad lectionem publicam *de structura systematis nostri solaris* muneris professionis ordinariae adeundi caussa hora XI. die XXIV. m. octobris a. MDCCCXLIV in aula academica Lipsiensi patrio sermone habendam observantissime invitat Augustus Ferdinandus Moebius, professor ordinarius designatus.

Lipsiae typis excudit C. P. Melzerus.

Cuivis astronomicorum calculorum perito notum est, duas esse methodos, quibus mutuae corporum coelestium perturbationes in computum vocentur. Una, quae *methodus perturbationum absolutarum* vocatur, formulas proponit, quibus corporis perturbati coordinatae polares, i. e. longitudo, latitudo et radius vector, tempore et quantitatibus constantibus exprimuntur, ita ut ad locum corporis pro dato tempore inveniendum sola substitutio hujus specialis valoris temporis in formulis istis generalibus requiratur. Verum enim vero quum ejusmodi formulas tunc tantum ea, qua sufficit, acie evolvere liceat, si excentricitas et inclinatio orbitae corporis perturbati parvae sunt, quod solummodo in planetis majoribus eorumque satellitibus accidit: pro planetis minoribus et pro cometis alia sub nomine *methodi perturbationum specialium* cognita adhiberi solet methodus, — quamquam horum quoque corporum perturbationes priori methodo subjicere vir ill. Hansen nostris temporibus feliciter conatus est*).

Methodus haec altera in consideratione nititur, corpus perturbatum circa corpus primarium, puta planetam circa solem, si vis perturbatrix subito cesset, secundum Kepleri leges motu elliptico progressurum esse ultima prioris orbitae particula perfecte determinando; quum autem illius vis impulsus continuo iterentur, elementa motus elliptici, quem corpus quovis temporis momento sequi studeat, continuo mutari. Hinc altera methodus eo tendit, ut ex elementis ellipticis, quae temporis quodam momento locum habuerunt, elliptica alius momenti elementa derivet, quippe ex quibus locus corporis ad hoc posterius tempus pertinens secundum regulas, quae elliptico motui

---

*) **Hansen**, ***Ermittelung der absoluten Störungen in Ellipsen von beliebiger Excentricität und Neigung.*** Gotha 1843. [*Mémoire sur le calcul des perturbations qu'éprouvent les comètes.* Pariser Preisschrift 1846, ferner drei Abhandlungen *über die Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten* 1856, 57, 59 nebst *Tafeln der Egeria* 1867, in den *Schriften der K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig.*]

competunt, notissimas calculari possit. Jam si haec duo temporis momenta perparum inter se distarent, evolutione tantum formularum differentialium opus esset, quibus variationes elementorum motus elliptici, singulo, ut ita dicam, vis perturbatricis impulsu productae, exprimuntur. Quum vero istud temporis intervallum haud raro annos, imo longam interdum annorum seriem complectatur, formulae illae differentiales a priori momento usque ad posterius integrandae sunt. Haec autem integratio ob nimiam formularum complicationem directe institui nequit et idcirco ope quadraturae, quam vocant, mechanicae absolvenda est.

Utriusque harum methodorum prima fundamenta geometra summus Eulerus posuit; et formulas quidem differentiales, quibus elementorum variationes secundum methodum posteriorem calculantur, in dissertatione enucleavit, quae tomo XII. *Nov. Comment. Petrop.* anni 1768 inserta est: *Methodus facilis motus corporum coelestium utcunque perturbatos ad rationem calculi astronomici revocandi.* Eaedem formulae, licet sub forma paulum mutata, exhinc diversimodo ab aliis evolutae sunt, ut a Lagrangio, a Laplacio, a Besselio; ultimo denique tempore ab Enckio in *Ephemeridibus Berolinensibus* anni 1837, et quidem ea sub forma, sub qua a Gaussio quondam cum eo hae formulae communicatae fuerant. Jam si, oblata mihi nunc scribendi occasione, earundem formularum explicationem rursus in medium protuli, id propterea a me factum est, quod in elaborando libro anno praeterlapso a me edito (*Die Elemente der Mechanik des Himmels etc.*) in modum incidi, quo ad istas formulas, ut mihi saltem videtur, simplicius et facilius, quam, quas alii secuti sunt, rationibus pervenire licet.

His formulis evolutis, epilogi instar in variationem inquisivi, cui locus centri ellipseos perturbatae subjectus est. Quum enim, ut in fine istius libri ostendi, ex variatione centri variationes elementorum motus facillime derivari possint, et in orbitis paulum excentricis inter directionem vis perturbantis et directionem, secundum quam centrum progreditur, memorabilis nexus intercedat, operae mihi pretium visum est, variationem centri, quam l. c. geometriae tantum elementaris ope et ratione approximativa exploravi, nunc formularum analyticarum adjumento accuratius determinare. Sed rem ipsam aggrediar eamque ita exponam, ut etiam ab iis, qui in calculis physico-astronomicis minus versati sunt, facile intelligi queat.

§. 1. Vocentur S et P loca solis et planetae, quem initio a perturbationibus liberum ideoque in ellipsi progredientem statuimus.

cujus unum focum sol occupat; focus alter designetur per F. Ponendo igitur ellipseos semiaxem majorem $= a$, excentricitatem $= e$, longitudinem perihelii in orbitae plano numeratam $= \omega$ et dehinc puncti F longitudinem $= \omega + 180^0$, longitudinem planetae in orbita veram $= l$ et radium vectorem planetae $= r$, erunt in triangulo SFP latera

$$SF = 2ae, \quad SP = r, \quad FP = 2a - r$$

secundum notissimam ellipseos proprietatem, et angulus

$$PSF = \omega + 180^0 - l;$$

ergo

$$(2a - r)^2 = 4aaee + rr - 4aer \cos(\omega + 180^0 - l),$$

quae aequatio facile contrahitur in

$$a(1 - ee) = r + er \cos(l - \omega), \tag{1}$$

sive ponendo

$$a(1 - ee) = p, \tag{2}$$

quae linea p tertia proportionalis ad semiaxem majorem et minorem est et semiparameter ellipseos vocatur:

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos(l - \omega). \tag{1*}$$

Ponatur adhuc brevitatis gratia

$$e \cos(\omega + 180^0 - l) = - e \cos(l - \omega) = x, \tag{3}$$

$$e \sin(\omega + 180^0 - l) = + e \sin(l - \omega) = y, \tag{4}$$

ita ut ax et ay projectiones sint lineae ae a sole usque ad centrum ellipseos ductae, una in radium vectorem, altera in lineam radio normalem. Dehinc formula (1*), quae aequationem ellipseos polarem sistit, mutatur in

$$\frac{p}{r} = 1 - x. \tag{1**}$$

§. 2. Relatione inter coordinatas planetae polares r et l eruta, quotientes differentiales $\frac{dr}{dt}$ et $\frac{dl}{dt}$ sive celeritates indagemus, quibus coordinatae istae temporis t decursu variantur. Ac primum quidem relatio inter has celeritates, quae $r_,$ et $l_,$ appellentur*), protinus fluit ex differentiatione formulae (1*):

$$\frac{pr_,}{rr} = e \sin(l - \omega) \,.\, l_, = yl_,. \tag{5}$$

Ut autem celeritatum unamquamque seorsim noscamus, secunda lex Kepleri adhuc in usum vocanda est, quae areas a radio vectore

*) in *Elementis mech. coel.* §. 43 scripsimus r' et l'.

descriptas tempori proportionales esse enunciat. Constat nimirum ex elementis geometriae, sectorem a radio per tempusculum dt descriptum esse $= \frac{1}{2} rrdl$. Denotando igitur rationem peripheriae ad diametrum per π et motum planetae medium per n, quibus area ellipseos fit $= \pi a \sqrt{ap}$, et tempus revolutionis planetae $= \frac{2\pi}{n}$, lex illa Kepleri ad hanc nos proportionem ducit:

$$\frac{1}{2} rrdl : \pi a \sqrt{ap} = dt : \frac{2\pi}{n},$$

ex qua

$$rrl_{,} = na\sqrt{ap}$$

sequitur, et si praeterea

$$\mu = nna^3 \tag{6}$$

ponimus:

$$l_{,} = \frac{\sqrt{\mu p}}{rr}, \tag{7}$$

et hoc valore ipsius $l_{,}$ in (5) substituto:

$$r_{,} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cdot y. \tag{8}$$

Caeterum ex physices coelestis elementis notum est, esse

$$nna^3 = K(M + m), \tag{9}$$

ubi M et m massas solis et planetae et K vim acceleratricem significant, qua a corpore, cujus massa $= 1$, aliud corpus in distantia $= 1$ ab illo dissitum attrahitur.

§. 3. Ut ex formulis hucusque evolutis, si elementa motus a, n, e, ω, et una coordinatarum r et l data sunt, coordinata altera et celeritates $r_{,}$ et $l_{,}$ computari possunt, ita vicissim earundem formularum ope elementa motus determinare licet, si temporis quodam momento coordinatarum utraque et earum celeritates datae sunt et quantitas μ cognita supponitur. Tunc enim invenitur p ex (7), x ex (1**), y ex (5) vel (8), e et ω ex (3) et (4) conjunctim, a ex (2) et n ex (6).

Inprimis notatu digna est formula, qua elementum a per r, $r_{,}$ et $l_{,}$ exhibetur. Prodit enim ex formulis (2), (3), (4) et (1**):

$$\frac{p}{a} = 1 - ee = 1 - xx - yy = 1 - \left(1 - \frac{p}{r}\right)^2 - yy,$$

et divisione per p facta:

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{p}{rr} - \frac{yy}{p}, \tag{10}$$

et formulis (7) et (8) in usum vocatis:

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{rrl_{,}^{2} + r_{,}^{2}}{\mu}; \qquad (11)$$

ex quo theorema illud memorabile sequitur:

Ad determinandum semiaxem majorem sive distantiam planetae a sole mediam sufficere radium vectorem et quantitatem celeritatis, qua planeta in orbita progreditur, neutiquam vero hujus celeritatis etiam directionem requiri.

Planetae enim celeritatem si in duas alias resolvimus, quarum una directionem radii habet, altera huic directioni normalis est, manifesto habemus celeritates $r_{,}$ et $rl_{,}$; quapropter celeritas planetae ipsa est $= \sqrt{(r_{,}^{2} + rrl_{,}^{2})}$, a qua et ab r elementum a pendere formula (11) nos docet.

Caeterum quoniam vi acceleratrice, cujus directio in orbitam corporis normalis est, quantitas celeritatis corporis non mutatur, ex theoremate modo allato adhuc concludere licet:

Axem majorem ellipseos, qua planeta perturbatus ingreditur, quantitatem immutatam servaturum esse, si vis perturbans orbitae planetae semper normalis insistat.

§. 4. Supponamus jam, planetam temporis momento, quo locum per coordinatas r et l datum occupat et celeritate quoad quantitatem et directionem per $r_{,}$ et $l_{,}$ plane definita incedit, ictu infinite parvo alicunde oriundo secundum directionem in plano orbitae contentam pulsari, quo celeritates $r_{,}$ et $l_{,}$ incrementa infinite parva $dr_{,}$ et $dl_{,}$ capiant. Hinc planeta, qui ante istud momentum in ellipsi movebatur, cujus elementa ex r, l, $r_{,}$ et $l_{,}$ ratione modo exposita computari possunt, post ictum in ellipsi paululum ab illa diversa procedere incipiet, quippe cujus elementa ex quantitatibus r, l, $r_{,} + dr_{,}$ et $l_{,} + dl_{,}$ ad idem momentum spectantibus calculanda sunt.

Variationes igitur, quas elementa motus ob ictum subeunt, inveniemus, si formulas, quae inter elementa et r, l, $r_{,}$, $l_{,}$ locum tenent, secundum elementa et celeritates $r_{,}$, $l_{,}$ differentiamus, coordinatas r, l vero et quantitatem μ, quae natura sua constans est, immutatas linquimus. Efficitur hoc modo ex (7), (1**), (8) et (11):

$$\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,dp = 2rrdl_{,}\,, \qquad (12)$$

$$dx = -\frac{dp}{r}\,, \quad dr_{,} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,dy - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{p^{3}}}\cdot ydp\,,$$

$$\frac{\mu da}{aa} = 2rrl_{,}dl_{,} + 2r_{,}dr_{,}\,;$$

et si in his formulis pro dp, l, et r, valores ex (12), (7) et (8) substituuntur:

$$\sqrt{\frac{\mu}{p}}\, dx = -2rdl, , \tag{13}$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{p}}\, dy = dr, + \frac{rry}{p} dl, , \tag{14}$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{p}}\, da = 2\frac{aa}{p} y dr, + 2aadl, . \tag{15}$$

Inventis dx et dy sine mora variationes elementorum e et ω exhiberi possunt. Est enim secundum (3) et (4)

$$ee = xx + yy, \quad \text{tang}\,(l - \omega) = -\frac{y}{x} ,$$

et dehinc differentiando:

$$ede = xdx + ydy , \tag{16}$$

$$\frac{d\omega}{\cos(l - \omega)^2} = \frac{xdy - ydx}{xx} ,$$

sive

$$ee d\omega = xdy - ydx . \tag{17}$$

§. 5. Investigemus nunc effectum ictus, qui planetae celeritatem infinite parvam plano orbitae normalem tribuit, quae dw vocetur et positiva accipiatur, si sursum, i. e. versus boream, directa est. Combinatione hujus celeritatis cum celeritate $rl,$, quae in plano orbitae radio vectori normaliter insistit, nova oritur $= rl,$, quae itidem radio normalis est et cum priori $rl,$ angulum facit $= \frac{dw}{rl,}$ brevitatis caussa per $d\sigma$ designandum. Ejusmodi igitur ictu planum orbitae circa radium vectorem tanquam axem per angulum eundem $d\sigma$ volvitur, dum celeritates $rl,$ et $r,$ et dehinc etiam motus in plano omnino non mutantur.

Notissima est ratio, qua situs plani orbitae versus planum aliquod fundamentale, puta versus planum eclipitices, *inclinatione* et *longitudine nodi ascendentis* determinatur. Videamus igitur, quantum haec duo elementa, quae ι et ϑ dicam, rotatione orbitae per angulum $d\sigma$ varientur. Projiciantur in hunc finem planetae et nodi ascendentis ante et post ictum loca in sphaeram coelestem ex sole, utpote centro, in P, N et N', et ducantur tres circuli maximi NN', NP et $N'P$, qui erunt ii, in quibus sphaera planum fundamentale, planum orbitae ante ictum idemque postea secat. Hinc anguli, quos circuli

NP et $N'P$ cum circulo NN' faciunt, erunt

$$= \iota \text{ et } \iota + d\iota, \text{ angulus } NPN' = d\sigma \ ;$$

denique si punctum circuli fundamentalis NN', a quo in hoc circulo longitudines numerantur, vocaveris A, erunt arcus

$$AN = \vartheta, \quad AN' = \vartheta + d\vartheta, \quad \text{ergo} \quad NN' = d\vartheta \ ;$$

arcus fractus $AN + NP = l$, ideoque $NP = l - \vartheta$.

In triangulo sphaerico $NN'P$ sunt igitur latera

$$NN' = d\vartheta, \quad NP = \lambda - \vartheta \ ,$$

anguli iis oppositi

$$= d\sigma, \quad 180^0 - \iota - d\iota \ ,$$

et tertius angulus $= \iota$; ergo

$$\cos(\iota + d\iota) = \cos(d\sigma) \cos\iota - \sin(d\sigma) \sin\iota \cos(\lambda - \vartheta)$$

et

$$\sin(\iota + d\iota) : \sin(d\sigma) = \sin(\lambda - \vartheta) : \sin(d\vartheta) \ ;$$

unde sequitur neglectis, ut par est, altioribus potestatibus differentialium $d\iota$ et $d\vartheta$:

$$d\iota = \cos(\lambda - \vartheta) \, d\sigma \quad \text{et} \quad d\vartheta = \frac{\sin(\lambda - \vartheta)}{\sin\iota} d\sigma \ . \tag{18}$$

Atque his formulis variationes, quas elementa ι et ϑ ob rotationem orbitae per angulum $d\sigma$ sive propter ictum in orbita normalem experiuntur, determinatae sunt.

Probe vero adhuc notandum est, variatione situs orbitae variari etiam longitudinem l. Haec enim, quum per arcum fractum $AN + NP$ repraesentetur, progrediente nodo ex N in N' mutatur in $AN' + N'P$ et idcirco incrementum capit

$$dl = AN' - AN - (NP - N'P) \ ,$$

vel si ex N' in NP perpendiculum $N'R$ demittitur:

$$dl = NN' - NR \ .$$

Est autem

$$NR = NN' \cos N'NP = d\vartheta \, . \cos\iota \ ;$$

ergo

$$dl = (1 - \cos\iota) \, d\vartheta \ .$$

Denique per se patet, eodem incremento longitudinem non solum planetae, sed etiam cujusvis alius puncti in orbitae plano, ergo etiam longitudinem ω perihelii, augendam esse.

§. 6. Postquam ostensum est, quantum elementa motus elliptici variantur, si temporis quopiam momento celeritas planetae caussa

aliqua externa, quam ictum appellavimus, infinite parum variatur, facile est videre, quomodo effectus, quem vis aliqua planetam continuo perturbans producit, explorari possit. Ejusmodi enim vis eodem modo, ut quaelibet alia vis acceleratrix, in eo se exserere censenda est, ut initio cujusvis elementi temporis celeritas planetae secundum quamlibet directionem aestimata incrementum capiat, quod vi secundum eandem directionem aestimatae et per temporis elementum multiplicatae aequale est.

Statuamus, ut antea, locum, quem planeta temporis quodam momento occupat, per r et l, et celeritatem, quam hoc momento adeptus est, per $r_,$ et $l_,$ definiri. Jam si vis, quae eodem momento planetam perturbat, secundum radium vectorem, secundum directionem, quae in plano per radium et directionem celeritatis ducendo ipsi radio normalis est, et secundum directionem eidem plano normalem in tres vires resolvitur per P, Q, R nuncupandas: celeritates, quae ex resolutione celeritatis planetae secundum easdem directiones oriuntur, et quae sunt $= r_,$, $r l_,$ et o, incrementa Pdt, Qdt et Rdt accipient ideoque mutabuntur in $r_, + Pdt$, $rl_, + Qdt$ et Rdt, — dummodo adhuc vires P, Q, R positivae vel negativae iisdem sub conditionibus numerentur, sub quibus celeritates $r_,$, $rl_,$ et dw (art. 5) vel positivas vel negativas aestimavimus.

Planeta igitur, qui per elementum dt, quod momentum memoratum proxime praecedebat, in ellipsi movebatur ope quantitatum r, l, $r_,$ et $l_,$ determinanda, per elementum dt proxime sequens in ellipsi incedet, cujus elementa ex

$$r,\quad l,\quad r_, + Pdt,\quad l_, + \frac{Q}{r}dt$$

prodeunt, et cujus planum a plano prioris ellipseos in radio vectore sub angulo

$$d\sigma = \frac{dw}{rl_,} = \frac{Rdt}{rl_,}$$

secatur. Hinc prioris ellipseos elementis et quantitatibus auxiliaribus ab iis pendentibus per p, x, y, a, e, ω, ι, ϑ, posterioris per $p + dp$, $x + dx, \ldots$ expressis, incrementa dp, $dx, \ldots$ reperientur, si in formulis (12), (13), ... (17)

$$Pdt \text{ et } \frac{Q}{r}dt \text{ pro } dr_, \text{ et } dl_,,$$

et in (18)

$$\frac{R}{rl_,}dt = \frac{rR}{\sqrt{\mu p}}dt \quad \text{pro } d\sigma$$

substituuntur.

Quo facto, et si praeterea brevitatis gratia

$$\sqrt{\frac{p}{\mu}}\cdot P = P_1\,, \qquad \sqrt{\frac{p}{\mu}}\cdot Q = Q_1\,, \qquad \sqrt{\frac{p}{\mu}}\cdot R = R_1 \tag{19}$$

positum fuerit, efficietur

$$dp = 2rQ_1dt\,, \qquad dx = -2Q_1dt\,, \qquad dy = P_1dt + \frac{ry}{p}Q_1dt\,,$$

$$da = 2\frac{aa}{p}yP_1dt + \frac{2aa}{r}Q_1dt\,, \tag{20}$$

$$ede = xdx + ydy = yP_1dt + \left(\frac{ryy}{p} - 2x\right)Q_1dt\,, \tag{21}$$

$$eed\omega = xdy - ydx = xP_1dt + \left(\frac{rx}{p} + 2\right)yQ_1dt\,. \tag{22}$$

Ex (10) et (1**) autem fluit

$$\frac{ryy}{p} - 2x = 2 - \frac{p}{r} - 2x - \frac{r}{a} = \frac{p}{r} - \frac{r}{a}\,,$$

$$\frac{rx}{p} + 2 = \frac{r}{p} + 1\,.$$

Harum transformationum ope, et si anomaliam veram

$$l - \omega = v$$

ponimus, unde

$$x = -e\cos v \quad \text{et} \quad y = e\sin v$$

sequuntur, prodit:

$$da = 2\frac{aae}{p}\sin v\,.\,P_1dt + 2\frac{aa}{r}Q_1dt\,, \tag{I.}$$

$$de = \sin v\,.\,P_1dt + \frac{1}{e}\left(\frac{p}{r} - \frac{r}{a}\right)Q_1dt\,, \tag{II.}$$

$$d\omega = -\frac{1}{e}\cos v\,.\,P_1dt + \frac{p+r}{pe}\sin v\,.\,Q_1dt + (1-\cos\iota)\,d\vartheta\,, \tag{III.}$$

(confer art. 5). Denique formulae (18) nobis suppeditant:

$$d\iota = \frac{r}{p}\cdot\cos(\lambda - \vartheta)\,.\,R_1dt\,, \tag{IV.}$$

$$d\vartheta = \frac{r}{p}\cdot\frac{\sin(\lambda-\vartheta)}{\sin\iota}\cdot R_1dt\,. \tag{V.}$$

§. 7. Pauca de computatione virium perturbantium P, Q, R, quae in his formulis occurrunt, addenda sunt. Quae vires, quum, aeque ac vis perturbans integra, massae planetae perturbantis proportionales sint, caeteroquin a mutuo situ solis, planetae perturbati et perturbantis dependeant, necessario productis $Km'P_0$, $Km'Q_0$, $Km'R_0$ aequiparari poterunt, in quibus m' istam massam, K, ut supra, vim attractivam unitatis massae in corpus unitate lineari ab ea distans, et

P_0, Q_0, R_0 quantitates exprimunt, quae solummodo a coordinatis planetarum perturbati et perturbantis pendent. Has functiones pro datis assumentes*) habebimus:

$$P_1 = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot P = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot Km' P_0 \, ,$$

sive, quum ex (6) et (9) sequatur

$$\frac{K}{\sqrt{\mu}} = \frac{na\sqrt{a}}{M+m} :$$

$$P_1 = \frac{m'}{M+m} na\sqrt{ap} \, . \, P_0 \, ,$$

et eodem modo

$$Q_1 = \frac{m'}{M+m} na\sqrt{ap} \, . \, Q_0 \, ,$$

$$R_1 = \frac{m'}{M+m} na\sqrt{ap} \, . \, R_0 \, .$$

§. 8. Unius adhuc elementi determinanda restat variatio, longitudinis puta mediae in epocha, vel si mavis temporis, quo planeta perihelium transit. In hunc finem formulae prius evolvendae sunt, quibus pro dato temporis momento locus planetae ellipticus inveniri potest. Hoc vero facillime succedet inquirendo in relationem inter r et $r_, = \frac{dr}{dt}$ exsistentem, quippe quae, si integrata fuerit, relationem inter r et t quaesitam suppeditabit.

Relatio, quae inter r et $r_,$ locum habet, illico combinatione formularum (8) et (10) reperitur

$$\frac{r_,^2}{\mu} = \frac{2}{r} - \frac{p}{rr} - \frac{1}{a} \, ,$$

et si pro μ et p valores ex (6) et (2) substituuntur:

$$(23) \quad \frac{rrr_,^2}{nnaa} = 2ar - aa\,(1 - ee) - rr = aaee - (a - r)^2 \, .$$

*) Ponendo planetae perturbantis radium vectorem $= r'$, ejusdem longitudinem in orbita planetae perturbati numeratam $= l'$, latitudinem ad eandem orbitam relatam $= b'$ et

$$\sqrt{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos b' \cos (l - l'))} = \varrho \, ,$$

quae est distantia duorum planetarum a se invicem, tunc erit:

$$P_0 = \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r'^3}\right) r' \cos b' \cos (l - l') - \frac{r}{\varrho^3} \, ,$$

$$Q_0 = -\left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r'^3}\right) r' \cos b' \sin (l - l') \, ,$$

$$R_0 = \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r'^3}\right) r' \sin b' \, .$$

Loco ipsius r aliam nunc introducamus variabilem E ita, ut sit:

$$a - r = ae\cos E \ , \qquad (24)$$

ergo

$$aaee - (a-r)^2 = aaee\sin E^2 \qquad (25)$$

et

$$r_{,} = \frac{dr}{dt} = ae\sin E\frac{dE}{dt} \ .$$

Hac ratione formula (23) mutatur in

$$\frac{nnaa}{rr}\frac{dE^2}{dt^2} = 1 \ ,$$

sive (24)

$$ndt = \frac{r}{a}dE = (1 - e\cos E)\,dE \ ,$$

ex qua, peracta integratione, sequitur:

$$n(t - t_0) = E - e\sin E \ .$$

t_0 denotante valorem temporis t, quo

$$E = 0\,, \quad \text{ergo} \quad r = a(1-e) \quad \text{et} \quad l = \omega \ ,$$

uti ex (24) et (1) colligere licet; itaque t_0 significat tempus, quo planeta perihelium permeat, et $n(t - t_0)$ est motus medius planetae inde a transitu per perihelium usque ad finem temporis t. Vocatur hic motus *anomalia media*, quae cum longitudine perihelii in summam collecta dat *longitudinem* planetae sic dictam *mediam*. Quamobrem designando planetae tempore t anomaliam mediam et longitudinem mediam per M et λ, et longitudinem mediam tempore epochae, i. e. pro $t = 0$, per ε, erit

$$\left.\begin{aligned} &\omega + M = \omega + n(t - t_0) = \lambda \ , \\ &\omega - nt_0 = \varepsilon \ , \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

ergo

$$\lambda = \varepsilon + nt \ , \qquad (27)$$

et

$$M = E - e\sin E = \varepsilon + nt - \omega \ . \qquad (28)$$

Secundum hanc formulam, si elementa n, e, ε et ω nota fuerint, pro quovis tempore t angulum E, qui *anomalia excentrica* dicitur, computare valebimus. Inventa autem hac anomalia ope formularum (24) et (1) coordinatae r et l, quibus planetae locus in orbita determinatur, innotescent.

§. 9. Jam ut variatio elementi ε sive longitudinis mediae in epocha eliciatur, videamus antea, quantum anomalia media M, quae per E et e, ideoque ob (24) per r, a et e definita est, propter variationes elementorum a et e mutetur.

Differentiatione formularum (28) et (24) secundum M, E, e et a nanciscimur:

$$dM = (1 - e\cos E)\,dE - \sin E\,de\ ,$$
$$(1 - e\cos E)\,da = a\cos E\,de - ae\sin E\,dE\ ;$$

ergo post eliminationem ipsius dE:

$$ae\sin E\,dM + (1 - e\cos E)^2 da = a(\cos E - e)\,de\ .$$

Ex (24) autem fluit:

$$1 - e\cos E = \frac{r}{a}\ ,$$

$$(1^{**}) \qquad \cos E - e = \frac{a-r}{ae} - e = \frac{p-r}{ae} = -\frac{rx}{ae}\ ,$$

et ex (25) et (23) conjunctim:

$$aaee\sin E^2 = \frac{rrr_{\prime}^2}{nnaa} = \frac{arryy}{p}$$

propter (6) et (8); ergo

$$\sqrt{\frac{a}{p}}\cdot y\,dM + \frac{r}{aa}\,da = -\frac{x}{e}\,de\ .$$

Substituendo in hac formula pro da et de valores ex (20) et (21) prodit

$$\sqrt{\frac{a}{p}}\cdot y\,dM = -\left(\frac{2r}{p} + \frac{x}{ee}\right)yP_1\,dt - \left[2 + \frac{x}{ee}\left(\frac{ryy}{p} - 2x\right)\right]Q_1\,dt\ ,$$

vel paullo simplicius, si in coefficiente ipsius Q_1 $ee - yy$ pro xx, ac deinde $\frac{r}{p} + 1$ pro $\frac{rx}{p} + 2$ (art. 6) ponimus:

$$dM = -\sqrt{\frac{p}{a}}\cdot\left(\frac{2r}{p} + \frac{x}{ee}\right)P_1\,dt - \sqrt{\frac{p}{a}}\cdot\frac{y}{ee}\left(\frac{r}{p} + 1\right)Q_1\,dt\ .$$

§. 10. Quum sit (26)

$$M + \omega = \lambda\ ,$$

si variationi anomaliae mediae modo erutae addimus variationem longitudinis perihelii in (22) exhibitam, assequemur variationem longitudinis mediae

$$= \left[\frac{x}{ee} - \sqrt{\frac{p}{a}}\cdot\left(\frac{2r}{p} + \frac{x}{ee}\right)\right]P_1\,dt + \frac{y}{ee}\left(1 - \sqrt{\frac{p}{a}}\right)\left(\frac{r}{p} + 1\right)Q_1\,dt\ .$$

Atque haec est variatio, quam longitudo media per temporis elementum dt subit non ob planetae progressum medium per idem tempusculum, qui est $= n\,dt$, sed propter simultaneas variationes elementorum a, e, ω, ex quibus et ex r longitudo media derivari potest

(confer art. 8). Erit igitur, si hanc partialem ipsius λ variationem per $(d\lambda)$ et totalem per $d\lambda$ exprimimus:

$$d\lambda = (d\lambda) + n dt \ . \tag{29}$$

Haec vero partialis variatio $(d\lambda)$ erit simul variatio $d\varepsilon$ longitudinis mediae in epocha, dummodo hanc longitudinem non per $\varepsilon = \lambda - nt$, ut in (27), sed, respectu habito continuae variationis motus medii n, per

$$\varepsilon = \lambda - \int_0^t n dt \tag{30}$$

definimus. Ex hac enim formula, quae, si planeta non perturbatur, ideoque n constans est, cum priori omnino congruit, ex hac inquam formula differentiando efficitur

$$d\varepsilon = d\lambda - n dt = (d\lambda)$$

propter (29), dum ex priori concludendum fuisset

$$d\varepsilon = d\lambda - n dt - t dn = (d\lambda) - t dn \ .$$

Hac posteriori igitur definitione utentes secundum formulam ipsius $(d\lambda)$ valorem exhibentem habebimus

$$d\varepsilon = -\left[\left(1 - \sqrt{\frac{p}{a}}\right)\frac{\cos v}{e} + 2\sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{r}{p}\right] P_1 dt \qquad \text{VI.}$$
$$+ \left(1 - \sqrt{\frac{p}{a}}\right)\left(\frac{r}{p} + 1\right)\frac{\sin v}{e} Q_1 dt \ ,$$

cui supradictis de caussis addendus est terminus $(1 - \cos\iota) d\vartheta$.

§. 11. Methodi perturbationum, de qua hic agitur, problema principale versatur in eo, ut ex datis pro tempore quodam t_0 sex elementis planetae ellipticis, quae sint a_0, e_0, ω_0, ι_0, ϑ_0, ε_0, et quae dehinc pendent p_0, n_0, inveniantur pro alio quopiam tempore t_1 elementa elliptica a_1, e_1, ω_1, etc.; et ut his inventis locus planetae pro tempore t_1 calculetur. Solvitur hoc problema integrando primum expressiones I, II, ... VI, quas pro da, de, ... $d\varepsilon$ evolvimus, inde a $t = t_0$ usque ad $t = t_1$; hinc enim prodeunt differentiae $a_1 - a_0$, $e_1 - e_0$, etc.

Jam ut ex elementis a_1, e_1, ..., quae sic innotuerunt, locus planetae pro tempore t_1 reperiatur, primum longitudo media λ_1 pro eodem tempore investiganda est. Quae quum sit

$$\lambda_1 = \varepsilon_1 + \int_{t_0}^{t_1} n dt \ ,$$

duplex adhuc integratio peragatur necesse est; habetur enim

$$n = n_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{dn}{dt} dt ,$$

ergo

$$\int_{t_0}^{t_1} n dt = n_0 (t_1 - t_0) + \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{t_0}^{t} \frac{dn}{dt} dt .$$

Quae autem ad hunc scopum requiritur expressio ipsius dn, protinus ex formula (6) differentiata et ex I. demanat:

$$dn = -\frac{3}{2}\frac{n}{a} da = -3 \frac{ane}{p} \sin v \, . \, P_1 dt - 3 \frac{an}{r} Q_1 dt .$$

Longitudine media λ_1 hoc modo reperta radius vector et longitudo vera ratione in art. 8 jam significata elici queunt. Indicatae autem integrationes, quum reapse institui nequeant, quomodo mechanice per quadraturas absolvendae sint, non hujus loci est dicere.

§. 12. Ut iis, quae de elementorum variationibus hucusque disserui, nunc finem imponam, nonnulla addere liceat de relationibus, quae inter has variationes locum habent. Quanquam enim sex elementorum motus elliptici nullum a reliquis pendet, tamen inter variationes eorum ab ictu aliquo exortas relationes exsistunt, et ea quidem de caussa, quod duabus ellipsibus, in quibus planeta ante et post ictum movetur, non modo sol communis focus, sed etiam locus, quem planeta momento ictus occupat, commune punctum est.

Ad quod ulterius disquirendum meminisse primum juvat lemmatis ex descriptione ellipseos immediate fluentis: ellipsin perfecte datam esse, si duo ejus foci S et F et quodpiam peripheriae punctum P pro datis haberi queant. Quamobrem sole exsistente in S et planeta momento ictus in P, foco altero ante ictum in F, post ictum in F', orbita ante ictum ex S, P, F, post eum ex S, P, F' cognoscetur, et idcirco variatio orbitae variatione foci ex F in F' progredientis, ergo variationibus trium coordinatarum data erit, quibus punctum F in spatio determinatur. Ex his igitur tribus variationibus variationes sex elementorum derivare licebit; unde tandem concludimus, a tribus sex elementorum variationibus, quamvis non a qualibuscunque tribus, tres reliquas pendere. — Caeterum idem ex eo quoque colligi potest, quod variationes da, de, $d\omega$, $d\varepsilon$ solummodo a $dr_{\prime}$, dl, et variationes $d\iota$, $d\vartheta$ ab unico $d\sigma$ pendent.

§. 13. Quum variationes sex elementorum ex variationibus coordinatarum foci F inveniri possint, haud abs re erit, expressiones harum trium variationum investigare, vel etiam variationum, quas

coordinatae centri ellipseos subeunt et quae semissibus priorum manifesto aequales sunt. Respectu trium axium coordinatorum, quorum origo communis in solem cadit, et quorum primus directionem radii vectoris habet, secundus in plano orbitae radio normalis, tertius plano ipsi normalis est, coordinatae tres centri orbitae sunt ax, ay, 0 (confer art. 1). Hinc variationes centri orbitae in directione primi et secundi axis sunt

$$adx + xda \quad \text{et} \quad ady + yda \; ,$$

vel substitutis pro dx, dy, da valoribus ex art. 6:

$$d\,.\,ax = 2\frac{ax\,.\,ay}{p}P_1\,dt - 2a\left(1 - \frac{ax}{r}\right)Q_1\,dt \; ,$$

$$d\,.\,ay = \left(a + 2\frac{ay\,.\,ay}{p}\right)P_1\,dt + \left(\frac{2a}{r} + \frac{r}{p}\right)ayQ_1\,dt \; .$$

Variatio tertio axi parallela ex art. 5 sine difficultate eruitur. Quum enim planum orbitae tempusculo dt per angulum $d\sigma$ circa radium vectorem rotetur, et quum orbitae centri distantia a radio sit $= ay$, orbitae centrum durante hoc dt per spatiolum $= ayd\sigma$ in directione ad planum normali promovebitur. Ergo, si hoc spatiolum symmetriae caussa per $d\,.\,az$ exprimimus, et quum sit

$$d\sigma = \frac{Rr}{\sqrt{\mu p}}dt = \frac{r}{p}R_1\,dt$$

(art. 6), erit:

$$d\,.\,az = \frac{r}{p}ayR_1\,dt \; .$$

§. 14. Valores pro $d\,.\,ax$ et $d\,.\,ay$ modo exhibiti, quando excentricitas orbitae perparva est, ad consectaria quaedam satis memorabilia deducunt. Excentricitate enim plane neglecta hi valores coeunt in formas simplicissimas:

$$d\,.\,ax = -2aQ_1\,dt, \qquad d\,.\,ay = aP_1\,dt \; ,$$

vel quia (19)

$$P_1 = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\,.\,P, \qquad Q_1 = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\,.\,Q \; .$$

et neglecta excentricitate (6)

$$\sqrt{\frac{p}{\mu}} = \sqrt{\frac{a}{\mu}} = \frac{1}{na}$$

est:

$$nd\,.\,ax = -2\,Qdt, \qquad nd\,.\,ay = Pdt \; .$$

Ut, quid hae formulae indicent, eo facilius intelligatur, ponamus celeritatem, qua centrum ellipseos progreditur, $= u$, vim perturbantem $= T$, angulos, quos directiones ipsarum u et T cum radio vectore faciunt, $= v$ et τ; denique vis perturbantis ideoque etiam celeritatis u directionem in plano orbitae ipso contentam assumamus. Quo pacto erit

$$d \,.\, ax = u \cos v \,.\, dt\,, \qquad d \,.\, ay = u \sin v \,.\, dt\,,$$

$$P = T \cos \tau\,, \qquad Q = T \sin \tau\,,$$

et formulae istae mutabuntur in

$$nu \cos v = -2\, T \sin \tau\,, \qquad nu \sin v = T \cos \tau\,,$$

vel si $\tau + 90^0 = \tau'$ statuimus:

$$nu \cos v = 2\, T \cos \tau'\,, \qquad nu \sin v = T \sin \tau'\,.$$

Ex his videmus primum, si angulus τ' sit $= 0$, vel $= 90^0$, 180^0, 270^0, eundem valorem etiam angulum v habiturum esse: pro quovis alio valore ipsius τ' valorem ipsius v ab eo discrepaturum, ita tamen, ut ambo anguli in eundem quadrantem cadant, et ut eorum differentia non superet $19^0 28' =$ arc $(\text{tang} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}})$: is enim est maximus valor, quem differentia angulorum τ' et v aequatione

$$2 \text{ tang } v = \text{tang } \tau'$$

inter se junctorum adipisci potest. Sequitur ex his theorema illud, quod in »*Elementis mechanicae coelestis*« pag. 315 proposui:

Directionem, secundum quam centrum orbitae paulum excentricae procedat, a directione vis perturbantis per quadrantem ulterius promotae non admodum declinare, ad summum angulo undeviginti et semissis graduum.

Eaedem denique formulae docent:

Celeritatem, qua centrum promoveatur, maximum valorem adipisci, $= \frac{2T}{n}$, pro $\tau = 90^0$ *et* 270^0, h. e. *si vis perturbans radio vectori normaliter insistat: minimum contra valorem, dimidio maximi aequalem,* $= \frac{T}{n}$, pro $\tau = 0$ et 180^0, h. e. *si directio vis perturbantis in radium cadat; et hunc minimum valorem ad vim perturbantem rationem eandem tenere, quam planetae a sole distantia* (a) *ad planetae celeritatem* (na).

Lipsiae, 1844.

De computandis occultationibus fixarum per planetas.

[Dissertatio astronomica, quam exhibuit Augustus Ferdinandus Mœbius Philos. Dr. Ll. Aa. Mag. Lipsiae, apud C. H. Reclam, 1815.]

Felicissimo casu mihi contigit, ut, quod Kregelius de Sternbach liberalissimus mathematicarum et inprimis astronomicarum litterarum adjutor earundem ipsa caussa legavit, stipendium in me conferretur. Praeterlapsis jam annis, per quos illius liberalitatis fructus percepi, et quorum unum ex voluntate generosissimi testatoris itineri astronomico destinatum Gottingae transegi, celeb. Gaussio, Viro mihi maxime venerando studia mea moderante, a. 1813, nunc mihi injunctum est officium, ut libellum, quo progressuum meorum redderem rationem, in publicum emitterem.

Academiae Lipsiensis amplissimo Philosophorum ordini hunc libellum gratissimi animi documentum esse voluit

auctor.

§. 1. Occultationes fixarum per planetas iisdem manifesto annumerandae sunt phaenomenis coelestibus, quibus occultationes fixarum per lunam, transitus lunae et planetarum inferiorum per solis discum et similia, quippe quum in omnibus hisce apparitionibus duo corpora coelestia ex terrae superficie observata in unum eundemque coeli locum pervenire videantur. Licebit igitur ex illarum occultationum observationibus eadem quoque exspectare commoda, quae ab hisce praeberi jamdudum constat, longitudinum nimirum locorum terrestrium determinationem, correctionem planetae occultantis elementorum et cognitionem inprimis parallaxium planetarium, quarum quantum in tota astronomia intersit, quantumque satis rigorosa earum determinatione adhuc destituamur, omnibus hujus scientiae cultoribus est notissimum. Fixarum igitur per planetas occultationes, quum ob exiguum et simul exacte terminatum planetarum discum longe certissime observari possint, praecipua sane cura atque attentione astronomorum dignae censeri queunt; eoque magis videri possit mirum, quod hucusque, licet plurimae fixarum et planetarum conjunctiones, occultationes vero ipsae, ex quibus solis maxima omnium commoda hauriri possunt, nusquam, quod nos quidem sciamus, observatae inveniantur; nisi, quod rarissime occurrunt, speciosa ista negligentia prorsus fere excusetur. Hinc ob plurima, quibus istiusmodi occultationes sese commendant commoda, et ne forte, quae in posterum acciderint, occultationes observantium oculos subterfugiant, is certo laborem valde laudabilem suscepisse aestimandus est, qui pro singulis planetis singulisque fixis, certe principalioribus, occultationum tempora conetur investigare. Qua quidem de re ut nos, saltem ex aliqua parte, mereremur, opportuna hacce, quae nobis se obtulit, scribendi occasione ad generaliorem dictarum occultationum evolvendam theoriam usi sumus, et inprimis ad exponendam methodum, datae fixae per datum planetam occultationum tempora inveniendi. Cujus denique methodi adjectis quibusdam fixarum per Venerem occultandarum exemplis usum ostendimus.

§. 2. Perspicuum autem est, non quamvis fixam a dato planeta posse occultari. Suus enim cuique planetae est zodiacus sive zona in sphaera coelesti, cuius limites ipse ex terra observatus ultra citraque nunquam transgreditur. Ne igitur in eligendis fixis incerti simus, utrum eae revera per datum planetam unquam occultentur, nec ne, — quod quamvis per se ostenderet satis continuata computatio, tamen ejus initium saepius frustra futurum fuisset, — ante omnia disquirendi erunt limites occultantis planetae, sive maximae et minimae pro data quavis ejus longitudine geocentrica latitudines. Exhibita est ad hunc finem a Viro summo Gaussio formula aeque brevis atque elegans (*Monatl. Corresp. Bd. X. Ueber die Grenzen der geometrischen Oerter der Planeten*). Designatis scilicet orbitae terrae excentricitate, semiparametro, distantia heliocentrica aphelii a nodo ascendente per e', k', g' et iisdem elementis planetae per e, k, g: ex distantiis heliocentricis terrae a nodo ascendente $= t'$, distantiae planetae ab eodem nodo $= t$, vel vice versa, hac formula eruuntur:

$$\frac{k'}{\cos t' - e' \cos g'} = \frac{k}{\cos t - e \cos g},$$

ita ut combinatis his terrae et planetae locis heliocentricis, quae dehinc sequuntur latitudines planetae geocentricae, maximae et minimae sint respondentium longitudinum geocentricarum.

§. 3. Hoc igitur modo limitibus planetae inventis, fixisque stellis, quae intra eos cadunt, rite electis, ad methodum ipsam earum occultationes computandi nunc progrediamur. Et primum quidem, quum tempora occultationum adhuc ignorentur, observatorem in centro terrae collocemus, removeamus orbitarum perturbationes, removeamus et omnes deviationes lucis, ita ut centra terrae et planetae perfectas ellipses circa solem describant et describere videantur. His stabilitis continuo intelligitur, si unquam fixa post planetam ex terra observata fuerit, eandem occultationem iterum locum habituram, quoties terra et planeta iisdem orbitarum locis simul observantur, quibus prior occultatio accidit. Primum igitur erit necessarium, ut mutuam istam terrae et planetae in orbitis suis positionem definiamus, ac deinde, ut investigemus tempora, quibus haec corpora in locis priori modo repertis simul occurrunt. Atque haec sunt, quae in duabus, quae nunc sequuntur, sectionibus declarare studebimus.

Sectio prima.

Determinatio locorum terrae et planetae ad occultationem fixae efficiendam necessariorum.

§. 4. Concipiatur conus, cujus basis sit orbita planetae, vertex vero centrum stellae fixae; superficies hujus coni planum orbitae terrestris sive ecliptices vel una in recta linea, vel in duabus, vel in ellipsi sive etiam circulo secabit, prouti stella vel in dilatato orbitae planetae plano, quo casu conus ipse in planum abit, vel in orbitae terrestris plano, vel alibi sita fuerit. Alia enim sectio conica propterea oriri nequit, quia ob immensam fixae a systemate nostro solari distantiam conus pro cylindro omnino est habendus. Ipsam vero orbitam terrestrem hae lineae vel nusquam, vel in duobus, vel in quatuor punctis secabunt, uti ex theoria sectionum conicarum satis constat. Jam quum tam ad conjunctionem quam ad oppositionem fixae et planetae requiratur, ut tria puncta, nimirum centra terrae, fixae et planetae in una eademque recta jaceant, et quidem ad conjunctionem, ut centrum planetae, ad oppositionem vero, ut centrum terrae inter duo reliqua situm sit, quumque eandem ob caussam coni illius latera conjunctionum et oppositionum sint loci geometrici: sequitur, si terrae orbita a superficie conica nusquam secetur, nunquam neque conjunctionem neque oppositionem locum habere; sin autem secetur, has apparitiones revera posse observari, modo terra in uno sectionis punctorum occurrat, planeta vero in coni latere situs sit eo, quod sectionis punctum transit. Caeterum requiretur ad conjunctionem, ut latitudines fixae et planetae sint utraeque vel septentrionales vel australes, ad oppositionem, ut ad diversas ecliptices partes jaceant.

§. 5. Ommissis casibus, quibus fixa in plano dilatato orbitae vel terrae vel planetae obversatur et quos infra separatim tractabimus, de elliptica orbitae planetaris in planum ecliptices projectione per coni superficiem facta in praesenti nonnulla addere liceat, quippe quae calculos geometricis his disquisitionibus mox superstruendos haud parum sublevare poterunt. Linea nodorum quum planetae orbitam in duas partes ita dissecet, ut planeta in earum una commorans borealem in altera australem habeat latitudinem, eadem quoque linea

in plano ecliptices pro quavis fixa puncta conjunctionum separabit ab iis, quae ad oppositiones faciunt. Ut autem de situ, quem haec puncta inter se obtinent, perfectiores adhuc nobis comparemus notiones, fingamus id quod parum a veritate recedit, orbitas terrae et planetae esse circulos, quorum centrum commune obtineat sol. Projectio igitur orbitae planetae in planum ecliptices per conum sive potius cylindrum facta tunc erit ellipsis, cuius centrum cum centro solis itidem coincidet. Cum circulari autem orbita terrae haec ellipsis vel nullum punctum habebit commune, vel in duobus punctis semiperipheria inter se distantibus eam tanget, vel in quatuor punctis, quorum iterum bina e diametro sibi sunt opposita, eam secabit. Idem contingere, si orbita terrae simili modo in planetae orbitae planum projiciatur, sponte apparet. Qua de re etiam admissis excentricitatibus terrae et planetae quatuor sectionis puncta ita inter se erunt disposita, ut in utraque orbita bina quaevis semiperipheria circiter inter se distent, quorum in uno si datur conjunctio, in altero oppositio locum habet: ut igitur ad unam lineae nodorum partem duo cadant puncta conjunctionum, ad alteram duo oppositionum. Sin vero duo vel conjunctionum vel oppositionum puncta in unum coeunt, quae reliqua sunt duo vel simul coincident, vel plane deficient, vel parum inter se distabunt. Punctum denique conjunctionis cum puncto oppositionis coincidere non poterit, nisi in linea nodorum ipsa, quo casu duo reliqua in eadem linea coincidant, erit necessarium.

§. 6. His de locis, quae terra et planeta ad occultandam fixam occupare debent, generaliter praemonitis nunc videamus quomodo ista loca ex datis orbitarum terrae et planetae elementis datisque fixae longitudine et latitudine ope calculi possint determinari. Assumatur in hunc finem systema trium axium in solis centro sub rectis angulis se secantium, quorum duo, qui dicantur x, y in plano ecliptices jaceant, tertii z positiva pars polum ecliptices borealem, negativa australem transeat. Vocentur jam stellae fixae coordinatae his axibus parallelae: X, Y, Z; coordinatae orbitae planetae, x, y, z; coordinatae tandem ejusdem orbitae per conum in eclipticam projectae: ξ, η: hae posteriores ex prioribus ita definientur, ut sit:

$$\xi = \frac{xZ - zX}{Z - z}, \quad \eta = \frac{yZ - zY}{Z - z},$$

sive potius, quia z respectu ipsius Z ob immensam fixae a sole distantiam plane evanescit:

$$\xi = x - z\frac{X}{Z}, \quad \eta = y - z\frac{Y}{Z}.$$

Vocatis igitur coordinatis orbitae terrae x', y', puncta, in quibus haec orbita a priori projecta secatur, determinabuntur aequationibus $x' = \xi$, $y' = \eta$, sive:

$$x' = x - z\frac{X}{Z}, \quad y' = y - z\frac{Y}{Z}, \tag{1}$$

in quibus, quum duae tantum lateant quantitates incognitae, nimirum argumentum loci terrae in coordinatis x', y', et argumentum loci planetae in x, y, z, haec loca a terra et a planeta occupanda, ut conjunctio vel oppositio accidat, resolutione illarum aequationum inveniri poterunt.

§. 7. Aptissime autem pro locorum argumentis eligentur anomaliae excentricae, quippe quibus coordinatae loci in orbita forma perquam concinna exhiberi possunt. Positis enim:

semiaxi orbitae terrae majori . . . . $= 1$,
excentricitate . . . . $= \sin\varphi'$,
anomalia excentrica terrae . . . . . $= E'$;

posito praeterea, ut terrae coordinatae in formam brevissimam redigantur, coordinatas x positivas transire perihelium orbitae terrestris, cujus longitudo vocetur π', coordinatas y positivas ad punctum 90^0 secundum ordinem signorum a priori dissitum tendere, manifesto erit:

$$\begin{aligned} x' &= \cos E' - \sin\varphi', \\ y' &= \cos\varphi' \sin E'. \end{aligned} \tag{2}$$

Planetae vero coordinatae, anomalia ejus excentrica littera E designata, in hunc modum poterunt exprimi:

$$\begin{aligned} x &= \alpha \sin E + \alpha' \cos E - \alpha'', \\ y &= \beta \sin E + \beta' \cos E - \beta'', \\ z &= \gamma \sin E + \gamma' \cos E - \gamma'', \end{aligned} \tag{3}$$

ubi quantitates α, α', α'', β, ... a longitudine perihelii terrae $= \pi'$ et orbitae planetaris elementis dependent, et quidem hoc modo, ut, si ponatur:

semiaxis major orbitae planetae . . . . $= a$,
excentricitas . . . . $= \sin\varphi$,
longitudo perihelii . . . . $= \pi$,
longitudo nodi ascendentis . . . . . . $= \Omega$,
inclinatio orbitae versus eclipticam . . . $= i$,

emergat*):

$$\begin{aligned}
\alpha &= a\cos\varphi\,\{\sin(\pi'-\Omega)\cos(\pi-\Omega)\cos i-\cos(\pi'-\Omega)\sin(\pi-\Omega)\}\,,\\
\alpha' &= a\,\{\sin(\pi'-\Omega)\sin(\pi-\Omega)\cos i+\cos(\pi'-\Omega)\cos(\pi-\Omega)\}\,,\\
\alpha'' &= a\sin\varphi\,\{\sin(\pi'-\Omega)\sin(\pi-\Omega)\cos i+\cos(\pi'-\Omega)\cos(\pi-\Omega)\}\,,\\
\beta &= a\cos\varphi\,\{\cos(\pi'-\Omega)\cos(\pi-\Omega)\cos i+\sin(\pi'-\Omega)\sin(\pi-\Omega)\}\,,\\
(4)\quad \beta' &= a\,\{\cos(\pi'-\Omega)\sin(\pi-\Omega)\cos i-\sin(\pi'-\Omega)\cos(\pi-\Omega)\}\,,\\
\beta'' &= a\sin\varphi\,\{\cos(\pi'-\Omega)\sin(\pi-\Omega)\cos i-\sin(\pi'-\Omega)\cos(\pi-\Omega)\}\,,\\
\gamma &= a\cos\varphi\cos(\pi-\Omega)\sin i\,,\\
\gamma' &= a\sin(\pi-\Omega)\sin i\,,\\
\gamma'' &= a\sin\varphi\sin(\pi-\Omega)\sin i\,.
\end{aligned}$$

Fixae denique longitudo a perihelio terrae incepta si vocatur l, latitudo b, fiet:

$$(5)\quad \frac{X}{Z}=\cot b\cos l\,,\qquad \frac{Y}{Z}=\cot b\sin l\,.$$

§. 8. His igitur coordinatarum valoribus in aequationibus (1) substitutis, prodibit:

$$\begin{aligned}
\cos E'-\sin\varphi' &= \alpha\sin E+\alpha'\cos E-\alpha''\\
&\quad -\{\gamma\sin E+\gamma'\cos E-\gamma''\}\cot b\cos l\,,\\
\cos\varphi'\sin E' &= \beta\sin E+\beta'\cos E-\beta''\\
&\quad -\{\gamma\sin E+\gamma'\cos E-\gamma''\}\cot b\sin l\,,
\end{aligned}$$

quae aequationes in has formas commode redigentur:

$$(6)\quad \begin{aligned}
\cos E' &= A\sin E+A'\cos E-A''\,,\\
\sin E' &= B\sin E+B'\cos E-B''\,,
\end{aligned}$$

positis

---

*) Facile obtinentur hae expressiones, in formulis, quas celeb. Gauss in *Theoria mot. corp. coel.* art. 53 pro iisdem coordinatis exhibuit:

$$\begin{aligned}
x &= r\cos(N-\Omega)\cos u+r\cos i\sin(N-\Omega)\sin u\,,\\
y &= r\cos i\cos(N-\Omega)\sin u-r\sin(N-\Omega)\cos u\,,\\
z &= r\sin i\sin u\,,
\end{aligned}$$

loco N et u substituendo π' et $v+\pi-\Omega$ (v denotante anomaliam veram), ac dein pro $r\sin v$ et $r\cos v$ ponendo $a\cos\varphi\sin E$ et $a\cos E-a\sin\varphi$. Conferatur art. 58 operis citati.

$$
\begin{aligned}
A &= \alpha - \gamma \cot b \cos l\ , \\
A' &= \alpha' - \gamma' \cot b \cos l\ , \\
A'' &= \alpha'' - \gamma'' \cot b \cos l - \sin \varphi'\ , \\
B &= \frac{\beta}{\cos \varphi'} - \frac{\gamma}{\cos \varphi'} \cot b \sin l\ , \\
B' &= \frac{\beta'}{\cos \varphi'} - \frac{\gamma'}{\cos \varphi'} \cot b \sin l\ , \\
B'' &= \frac{\beta''}{\cos \varphi'} - \frac{\gamma''}{\cos \varphi'} \cot b \sin l\ .
\end{aligned}
\tag{7}
$$

§. 9. Si plurium fixarum per eundem planetam occultationes investigandae sunt, coefficientium A, A', A'', B, B', B'', quibus aequationes (6) afficiuntur, computatio ope formularum (7) facile sane poterit absolvi, quippe quum quantitates α, α',... pro eodem planeta eosdem retineant valores. Sin vero his valoribus nondum erutis unius tantum aut paucarum fixarum per planetam quaeruntur occultationes, satius erit coefficientium A, A',... valores, ommissis quantitatibus auxiliaribus α, α',..., ex terrae et planetae elementis immediate derivare. Quod fiet ope formularum sequentium:

$$
\begin{aligned}
\cot b \cos l &= m \sin \mu\ , \\
\sin(\pi' - \Omega) &= m \cos \mu\ , \\
\cos(\pi' - \Omega) &= s \sin \sigma\ , \\
m \cos(i + \mu) &= s \cos \sigma\ , \\
\cot b \sin l &= n \sin \nu\ , \\
\cos(\pi' - \Omega) &= n \cos \nu\ , \\
\sin(\pi' - \Omega) &= t \sin \tau\ , \\
n \cos(i + \nu) &= t \cos \tau\ .
\end{aligned}
$$

Inventis enim hoc modo s, σ, t, τ, continuo erit:

$$
\begin{aligned}
A &= a s \cos \varphi \cos(\pi - \Omega + \sigma)\ , \\
A' &= a s \sin(\pi - \Omega + \sigma)\ , \\
A'' &= a s \sin \varphi \sin(\pi - \Omega + \sigma) - \sin \varphi'\ , \\
B &= \frac{a}{\cos \varphi'} t \cos \varphi \cos(\pi - \Omega - \tau)\ , \\
B' &= \frac{a}{\cos \varphi'} t \sin(\pi - \Omega - \tau)\ , \\
B'' &= \frac{a}{\cos \varphi'} t \sin \varphi \sin(\pi - \Omega - \tau)\ .
\end{aligned}
$$

Praeterea ad calculi recte instituti confirmationem adhiberi poterit formula:

$$s\,t\sin(\sigma+\tau) = \cos i - \cot b\sin i\sin(l+\pi'-\Omega)\;.$$

Obtinentur hae formulae facta valorum quantitatum α, α'...(4) in aequationibus (7) substitutione. Quae quum nullis omnino difficultatibus sit obnoxia, in ulteriori formularum illustratione h. l. commorari omnino superfluum foret.

§. 10. Aggrediamur jam negotium in toto hoc occultationum calculo longe gravissimum, investigationem valorum anomaliarum excentricarum E et E' ex aequationibus modo exhibitis (6). Prima autem, quae ad harum aequationum resolutionem sese offert methodus, haec est, ut earum combinatione anomalia vel terrae vel planetae eliminetur. Quo facto alterius, quae remanet, anomaliae sinus vel cosinus aequatione gradus quarti involutus obtinebitur, cui levibus quibusdam adhibitis operationibus trigonometricis forma ad instituendum calculum aptior tribui potest haecce:

$$\cos(2E-\zeta) - g\cos(E-\eta) + h = 0\;.$$

Hac igitur aequatione biquadratica resoluta, quatuor vel duo reales, qui exinde ipsius E vel E' valores resultant, in aequationibus (6) substituti quatuor vel duos alterius anomaliae valores respondentes suppeditabunt.

Verumenimvero ob coefficientes aequationis biquadraticae nimium compositos eorumque computationem non admodum expeditam, praestat aequationes (6) sejunctas retinere ex iisque approximando valores ipsarum E et E' una elicere. Hanc igitur methodum alteram diligentius nunc explicare studebimus.

§. 11. Jam paragraphus quinta nos docet modum, quo primos valores approximatos ipsarum E et E' invenire liceat. Quum enim neglectis excentricitatibus orbita terrae abeat in circulum et orbita planetae projecta in ellipsin circulum istum secantem in quatuor punctis, quorum bina e diametro sibi sunt opposita, haec quatuor puncta anomalias quaesitas determinantia resolutione aequationis tantummodo quadraticae inveniri poterunt. Ponantur igitur $\sin\varphi'$ et $\sin\varphi = 0$, quo fient etiam α'', β'', γ'', A'', B'', nihilo aequalia. Aequationes vero (6) transibunt in has:

$$\cos E' = A\sin E + A'\cos E\;,$$

$$\sin E' = B\sin E + B'\cos E\;,$$

quarum quadratis additis reperietur:

$$(A'^2 + B'^2 - A^2 - B^2) \cos 2E + 2(AA' + BB') \sin 2E$$
$$= 2 - A'^2 - B'^2 - A^2 - B^2 .$$

Positis igitur:

$$A'^2 + B'^2 - A^2 - B^2 = f \cos \zeta ,$$
$$2(AA' + BB') = f \sin \zeta , \qquad (8)$$
$$2 - A'^2 - B'^2 - A^2 - B^2 = g ,$$

erit

$$\cos(2E - \zeta) = \frac{g}{f} ,$$

unde, si statuitur

$$\text{arc} \cos \frac{g}{f} = \psi ,$$

quatuor ipsius E valores approximati prodibunt sequentes:

$$\tfrac{1}{2}(\zeta + \psi), \quad \tfrac{1}{2}(\zeta + \psi) + 180^\circ, \quad \tfrac{1}{2}(\zeta - \psi), \quad \tfrac{1}{2}(\zeta - \psi) + 180^\circ . \qquad (9)$$

Caeterum haec prima ipsarum E indagatio facili negotio poterit absolvi, quum tantum absit, ut perquam diligenter instituatur, ut logarithmi ad quinque notas decimales extensi abunde sufficiant.

§. 12. Jam vero continuo poterit dijudicari, quinam valorum ipsius E pertineant ad conjunctionem, qui ad oppositionem. Quum enim, ut supra (§. 4) vidimus, in conjunctione latitudines stellae fixae et planetae debeant esse homogeneae, planetae autem latitudo, utrum sit borealis an australis, ex argumento, quod vocant latitudinis ($=$ anomal. ver. $+ \pi - \Omega$), dignoscatur: in locum anomaliae verae substituta excentrica, istud criterium pro seligendis planetae locis ad occultationem facientibus fere semper sufficiet:

Si latitudo fixae est borealis, requiritur ad occultationem, ut sit $E + \pi - \Omega < 180^\circ$, *sin australis, ut sit* $E + \pi - \Omega > 180^\circ$.

Fallere quidem nos potest haec regula si $E + \pi - \Omega$ a 0° vel a 180° parum distat, h. e. si planeta nodi vel ascendentis vel descendentis vicinum locum occupat. Tunc ope formularum (6) terrae quoque anomalia E' obiter eruatur. Quo facto in conjunctione arcus $E' + \pi' - \Omega$, $l + \pi' - \Omega$ ad oppositas diametri partes debent cadere, quod intelligetur ex iis, quae mox (§. 16) eo de casu disserentur, quo fixa in ecliptices plano sita occurrit. Sin vero etiam hi arcus in vicinia nodorum obversantur, id indicio erit, fixam haud procul a nodorum linea distare, quo de casu conferatur infra §. 17.

§. 13. Inventis hoc modo valoribus approximatis primis ipsius E, iisque, qui ad occultationem faciunt, rite electis, ex his quomodo per ulteriorem approximationem veri sint investigandi, nunc ostendamus. Determinentur in hunc finem quantitates m, μ, μ', n, ν, ν', ope aequationum:

$$(10)\qquad \begin{aligned} A &= m\cos\mu\,, & B &= n\cos\nu\,,\\ A' &= m\sin\mu\,, & B' &= n\sin\nu\,,\\ A'' &= m\sin\mu'\,, & B'' &= n\sin\nu'\,, \end{aligned}$$

quo facto aequationes (6) ad calculum logarithmicum formam commodiorem induant hanc:

$$(11)\qquad \begin{aligned} & m\sin(E+\mu) - m\sin\mu' = \\ &\qquad = 2m\sin\tfrac{1}{2}(E+\mu-\mu')\cos\tfrac{1}{2}(E+\mu+\mu') = \cos E',\\ & n\sin(E+\nu) - n\sin\nu' = \\ &\qquad = 2n\sin\tfrac{1}{2}(E+\nu-\nu')\cos\tfrac{1}{2}(E+\nu+\nu') = \sin E'\,. \end{aligned}$$

Substituatur in his aequationibus valor ipsius E approximatus primus, qui audiat e, et qui dehinc ipsius E' diversi valores emergunt, — alias enim aequationibus esset satisfactum, — designentur litteris e' et ε', ita ut habeatur:

$$(12)\qquad \begin{aligned} m\sin(e+\mu) - m\sin\mu' &= \cos e'\,,\\ n\sin(e+\nu) - n\sin\nu' &= \sin\varepsilon'\,. \end{aligned}$$

Incident autem hae anomaliae terrestres, quum a quaesita E' non multum discrepent, in eundem fere semper circuli quadrantem ex datis una sinu et cosinu definiendum.

Subtrahantur jam ab aequationibus (11) hoc modo exhibitis:

$$m\sin(e+\mu+E-e) - m\sin\mu' = \cos(e'+E'-e')\,,$$
$$n\sin(e+\nu+E-e) - n\sin\nu' = \sin(\varepsilon'+E'-\varepsilon')\,,$$

respective aequationes (12), negligantur altiores differentiarum $E-e$, $E'-e'$, $E'-\varepsilon'$ potestates, prodibuntque aequationes differentiales hae:

$$m(E-e)\cos(e+\mu) = -(E'-e')\sin e'\,,$$
$$n(E-e)\cos(e+\nu) = (E'-\varepsilon')\cos\varepsilon'\,,$$

quarum ex conjunctione valor ipsius E approximatus secundus reperietur

$$(13)\qquad E = e + \frac{e'-\varepsilon'}{m\cos(e+\mu)\operatorname{cosec} e' + n\cos(e+\nu)\sec\varepsilon'}\,.$$

Differentia igitur anomaliarum terrae $e' - \varepsilon'$ quantitate

$$m \cos (e + \mu) \operatorname{cosec} e' + n \cos (e + \nu) \sec \varepsilon' = c$$

divisa dabit correctionem valoris approximati primi anomaliae planetae: similique modo secundi, qui dehinc nascitur, tertii etc. valorum correctiones inveniri poterunt, donec earum aliqua nihilo aequalis evaserit, sive anomaliae terrae ex eadem planetae anomalia per aequationes (11) oriundae prodierint aequales.

§. 14. Patet, si quantitas c admodum parva reperiatur, vel adeo evanescat, approximationis negotium vel aegre tantum vel plane non posse succedere. Quod quidem accidit tum, quum fixa vel in limitum zodiaci planetaris vicinia, vel in limitibus ipsis sita occurrit. His enim casibus, quum orbita planetaris projecta terrae orbitam vel in punctis parum inter se distantibus secet, vel eam tangat, quumque tangentes angulorum, quos lineae tangentes orbitae terrestris orbitaeque planetaris projectae cum axi x faciunt, sint respective (§. 25):

$$\frac{n \cos \varphi' \cos (E + \nu)}{m \cos (E + \mu)}, \quad - \cos \varphi' \cot E';$$

erit, si hae orbitarum lineae tangentes coincidunt:

$$\frac{n \cos \varphi' \cos (E + \nu)}{m \cos (E + \mu)} = - \cos \varphi' \cot E'.$$

sive:

$$m \cos (E + \mu) \operatorname{cosec} E' + n \cos (E + \nu) \sec E' = 0 .$$

Quum igitur, si sit $c = 0$, methodus illa plane reddatur inutilis, sin vero c exiguum teneat valorem, modica ejus variatio correctionem anomaliae planetaris vehementer immutare possit, quumque et alias divisor iste pro insequentibus valoribus approximatis bis saltem de novo foret computandus, qui calculus, quamvis per se levis, pluries tamen repetitus aliquam molestiam facesseret: primo et secundo, uti ostensum est, eruto valore approximato ipsius E, ad ulteriorum investigationem sequenti ratione praestabit procedere.

§. 15. Positis anomaliarum terrestrium anomaliae planetari e respondentium differentia $e' - \varepsilon' = \delta$, valore ipsius E approximato secundo $= f$, et quae huic respondet ipsarum E' differentia $= \delta'$, ea quaeratur interpolando planetae anomalia g, pro qua differentia ista evanescit, invenieturque

$$g = f + (f - e) \frac{\delta'}{\delta - \delta'},$$

qui erit tertius ipsius E valor approximatus. Cui porro si respondet

terrae anomaliarum differentia $= \delta''$, quartus valor approximatus prodibit eodem modo

$$h = g + (g-f)\frac{\delta''}{\delta' - \delta''},$$

vel, si prima differentia δ simul in usum vocetur, accuratius adhuc:

$$h = g + (g-f)\left\{\frac{\delta''}{\delta' - \delta''} + \frac{\delta''^2}{(\delta - \delta'')(\delta' - \delta'')}\right\}$$

$$= g + (g-f)\frac{\delta''\delta}{(\delta' - \delta'')(\delta - \delta'')};$$

valor approximatus quintus:

$$i = h + (h-g)\left\{\frac{\delta'''\delta'\delta}{(\delta'' - \delta''')(\delta' - \delta''')(\delta - \delta''')} + \frac{\delta'''\delta''}{(\delta' - \delta''')(\delta - \delta''')}\right\},$$

et sic deinceps*). Rarissime tamen ultra quartum progredi unquam erit necessarium. Quum enim elementa planetarum continuo varientur, neque tempora, quibus occultationes accidant, adhuc sint cognita, anomaliae ex epochae elementis ad singula minuta secunda computatae abunde sufficient. Neque etiam interpolationis formularum coefficientes alii, nisi simplices: $\frac{\delta}{\delta - \delta'}$, $\frac{\delta''}{\delta' - \delta''}$, $\cdots$ adhibeantur necesse erit, excepto forte casu, omnium ad computum difficillimo, quo fixa in zodiaci limitum vicinia versante duo occultationum puncta fere coincidunt. Tunc etiam divisor c majori, quam quae alias requiritur, diligentia erit indagandus; qui vero si nimium parvus vel adeo nihilo aequalis emergit, nihil restat, quam ut pro pluribus anomaliis planetae a primis approximatis parum distantibus terrae anomaliarum ex aequationibus (11) quaeramus differentias, atque ex his vulgari interpolandi methodo duas vel unicam, si fixa in limitibus ipsis occurrit, anomalias terrestres computemus eas, pro quibus differentiae in nihilum abeunt.

§. 16. Sed satis jam dictum putamus de resolutione aequationis biquadraticae, qua loca terrae et planetae ad occultationem necessaria in genere contineri ostensum est. Consideremus adhuc casus duos speciales, in quibus loco aequationis biquadraticae quadratica solum quaesitas anomalias nobis exhibet. Jam enim supra vidimus, fixis in terrestris vel planetaris orbitae plano obversantibus projectiones or-

*) [Conferas commentationem subsequentem intit. *Beitrag zu der Lehre von der Auflösung numerischer Gleichungen.*]

bitae planetaris in planum ecliptices esse lineas rectas, quarum cum ellipsi sectiones quadraticae aequationis solutione inveniri posse constat.

Ponamus igitur primum, fixam in ecliptices plano occurrere, sive ejus latitudinem esse nullam. Hinc, ut occultatio accidat, planeta in eodem plano ideoque in linea nodorum obversari debebit. Locis igitur planetae jam cognitis terrae adhuc loca invenienda restant. Quod quidem fieri posset facillime ope formularum (6) vel (11), nisi earum coefficientes omnes A, A', A'', B, B', B'' cotangente latitudinis fixae hoc loco infinite magna essent affecti eamque ob caussam $\cos E'$ et $\sin E'$ emergerent indefiniti. Ut igitur $\cot b$ ex coordinatae Z valore oriundam evitemus, eliminetur ex aequationibus (1) ipsa Z, eritque

$$y' - x'\frac{Y}{X} = y - x\frac{Y}{X},$$

ubi x', y', $\frac{Y}{X}$, quos prius obtinuerant, etiam nunc retinent valores analyticos. Planetae vero coordinatae x, y ex longitudine $= \Omega - \pi'$, si ipse in nodo ascendente, vel $= \Omega - \pi' + 180^0$, si in descendente versatur, et radiis vectoribus r his locis respondentibus ita determinantur, ut sit

$$x = \pm r\cos(\Omega - \pi'), \qquad y = \pm r\sin(\Omega - \pi').$$

Aequatio igitur praecedens, si coordinatis valores modo indicati substituuntur, in hanc transmutabitur:

$$\cos\varphi'\sin E' - \operatorname{tang} l\cos E' + \sin\varphi'\operatorname{tang} l$$

$$= \pm r\sin(\Omega - \pi') \mp r\cos(\Omega - \pi')\operatorname{tang} l = \pm\frac{r\sin(\Omega - l - \pi')}{\cos l},$$

et quum generaliter sit

$$r = \frac{a\cos\varphi^2}{1 + \sin\varphi\cos v},$$

designante hoc loco $v = \Omega - \pi - 90^0 \pm 90^0$ anomaliam veram planetae; facta substitutione obtinebimus:

$$\sin E'\cos\varphi' - \cos E'\operatorname{tang} l +$$

$$+ \frac{a\cos\varphi^2\sin(l - \Omega + \pi')}{[\sin\varphi\cos(\pi - \Omega) \pm 1]\cos l} + \sin\varphi'\operatorname{tang} l = 0.$$

Hinc ponendo

$$\cos\varphi' = t\cos\tau, \qquad \operatorname{tang} l = t\sin\tau.$$

$$\frac{a\cos\varphi^2\sin(l - \Omega + \pi')}{[\sin\varphi\cos(\pi - \Omega) \pm 1]\cos l} + \sin\varphi'\operatorname{tang} l = u,$$

aequatio ista induet hanc formam:

$$t \sin(E' - \tau) + u = 0 \ ,$$

unde statim fiet

$$E' = \tau - \arcsin \frac{u}{t} \ .$$

Quae vero terrae anomaliarum E' hoc modo inventarum quatuor, — duplici enim gaudet u, duplicique arc. sin. valore, — quae earum ad conjunctionem spectent, quae ad oppositionem, ex eo facile poterit discerni, quod in conjunctione terra et fixa ad diversas, in oppositione ad easdem lineae nodorum partes sitae esse debent. Nam denotatis centris solis, terrae, planetae et fixae per S, T, P, F, trium posteriorum punctorum in recta linea jacentium ordo erit in conjunctione T, P, F, in oppositione P, T, F. Hinc ubicunque assumatur S, in conjunctione lineas ST, SF ad diversas partes, in oppositione ad easdem lineae SP in utrumque prolongatae cadere elucet. Ex quo, quum hoc loco SP sit linea nodorum, praecedens positio vera esse statim intelligitur.

§. 17. Secundo loco, si fixa in planetaris orbitae plano reperitur, terra simili modo, ut antea planeta, in linea nodorum sita esse debebit, eritque ejus anomalia vera $= \Omega - \pi' - 90^\circ \pm 90^\circ$. Iam quum non sit $b = 0$, ad planetae loca invenienda formulae (11) revera nunc in usum possunt vocari. Nihilominus tamen calculus institui poterit similis ei, quem in casu antecedente adhibere fuimus coacti. Fingatur nempe, systema orbitae terrestris, planetaris et stellae fixae volvi circa lineam nodorum tanquam axem, donec orbita planetaris in planum ecliptices inciderit: quo facto patet, orbitam planetae repraesentaturam orbitam terrae et vice versa, nodum, qui antea fuit ascendens aut descendens, in nodum descendentem aut ascendentem fore mutatum, pro longitudine denique fixae in ecliptica substituendam esse longitudinem ejus in orbita planetae, ita ut, si haec posterior denotetur per l', sit

$$l' = \Omega - \pi + \operatorname{arc\,tang} \frac{\operatorname{tang}(l + \pi' - \Omega)}{\cos i} \ .$$

His omnibus rite perpensis facile intelligetur, formulam praecedentem hocce loco abituram in hanc:

$$\sin E \cos\varphi - \cos E \operatorname{tang} l' +$$
$$+ \frac{\cos\varphi'^2 \sin(l' - \Omega + \pi)}{a[\sin\varphi' \cos(\pi' - \Omega) \pm 1] \cos l'} + \sin\varphi \operatorname{tang} l' = 0 \ ,$$

ex qua eodem modo, ut supra planetae, anomaliae excentricae terrae invenientur. Harum vero quae ad occultationem pertineant, quum in

casu praesenti sit ST linea nodorum, ita dijudicabitur, ut planeta et fixa ad easdem lineae nodorum partes siti esse debeant.

Ne denique casum omnium facillimum praetereamus, quo fixa, cujus occultatio quaeritur, in ipsa linea nodorum occurrit, manifestum est, terram et planetam simul in linea nodorum versari debere et quidem, si planeta fuerit inferior, terram in nodo opposito ei, quo fixa sita reperitur; si superior, planetam in eodem cum fixa nodo.

Sectio secunda.

De inveniendis occultationum temporibus.

§. 18. Explicata hucusque methodo, qua ex datis pro certa epocha terrae et planetae elementis fixaeque longitudine et latitudine mutua terrae et planetae in orbitis suis positio occultationi fixae inserviens definiri possit, nunc transeamus ad investigationem temporum, quibus terra et planeta in istis locis simul obversantur. Jam quidem ob incommensurabilitatem numerorum, quibus ratio terrae et planetae revolutionum exprimitur, et a quibus tempora ista pendere facile intelliguntur, si calculum instantem accuratissime absolvere vellemus, tempora prorsus nulla, vel immensis paene intervallis invicem remota nancisceremur. Atenimvero quum propter continuam elementorum variationem loca inventa pro exacte determinatis haberi neutiquam possint, quumque terrae et planetae centrorum loco, quae in praecedentibus simplicitatis caussa adoptavimus, puncta in superficie horum corporum jacentia reapse substitui debeant: ejusmodi temporum momenta ab initio invenisse sufficiet, quorum quovis terra et planeta a locis computatis nonnisi parum distant.

§. 19. Sint in hunc finem anomaliae mediae excentricis E', E respondentes M', M, quas ex illis formula

$$M = E - \sin\varphi \sin E$$

deduci constat. Sint porro anomaliae mediae epocha locum habentes N', N; motus siderei diurni medii m', m; numerus denique dierum ab epocha usque ad momentum temporis, quo terra in loco occupando versatur, $= t'$, idemque numerus pro planeta, $= t$, manifesto erit:

$$t' = \frac{M' - N'}{m'} + \frac{360^\circ}{m'} x',$$

$$t = \frac{M - N}{m} + \frac{360^\circ}{m} x,$$

x', x denotantibus quoscunque numeros integros. Ut igitur haec tempora aequalia reddantur, x' et x ita erunt definiendi, ut satisfaciant aequationi arithmeticae:

$$\frac{360^\circ}{m'} x' - \frac{360^\circ}{m} x = \frac{M - N}{m} - \frac{M' - N'}{m'}.$$

sive positis revolutionum temporibus

$$\frac{360^\circ}{m'} = P', \qquad \frac{360^\circ}{m} = P,$$

et praeterea

$$\frac{M - N}{m} - \frac{M' - N'}{m'} = Q,$$

aequationi:

$$P'x' - Px = Q,$$

cujus resolutionem, postquam relatio ipsorum P', P, Q numeris integris expressa fuerit, a resolutione aequationis:

$$P'\xi' - P\xi = \pm 1$$

pendere constat. Inventis enim ξ', ξ erit

$$x' = \pm \xi' Q, \qquad x = \pm \xi Q.$$

Huic igitur aequationi alteri ut quam proxime satisfiat, quaerantur methodo fractionum continuarum valores rationis incommensurabilis $P' : P$ approximati, qui sint successive:

$$p' : p, \qquad p'_1 : p_1, \qquad p'_2 : p_2, \quad \text{etc.}$$

et qui eam inter se tenent relationem notissimam, ut sit:

$$p'_1 p - p_1 p' = \pm 1, \qquad p'_2 p_1 - p_2 p'_1 = \mp 1, \quad \text{etc.}$$

Harum ergo rationum una, puta $p'_1 : p_1$, loco rationis $P' : P$ substituta, statim habebimus $\xi' = p$, $\xi = p'$, ideoque quum pro Q ponendus jam sit numerus fractionibus $\frac{p'_1}{P'} Q$ vel $\frac{p_1}{P} Q$ maxime contiguus, qui appelletur q, erit

$$x' = \pm pq + np_1, \qquad x = \pm p'q + np'_1,$$

n denotante numerum integrum ita assumendum, ut numeri x', x quam minimi prodeant. Quaerantur ope praecedentium aequationum his ipsis x', x respondentes valores ipsorum t', t, qui quo minus inter se differunt, eo minus planeta a fixa tunc temporis distabit.

§. 20. Jam ut ex his temporibus t', t inveniantur alia, quae, si differentia $t - t'$ non satis parva visa fuerit, minus adhuc inter se differant, facile intelligitur, quum $p' : p$ a ratione $P' : P$ non multum discrepet, ideoque p revolutiones terrae fere sint aequales p' revolutionibus planetae, fieri posse, ut tempus $t' + pP'$ fere aequale evadat tempori $t + p'P$, vel etiam $t' + \alpha pP'$ ipsi $t + \alpha p'P$, α designante numerum integrum non admodum magnum, sive ut sit

$$t - t' + \alpha d = 0 ,$$

posita differentia

$$p'P - pP' = d .$$

Quod vero si perfici non potuerit, adhibeatur ultro ratio magis approximata $p'_1 : p_1$, vocetur differentia praecedenti minor eique opposita

$$p'_1 P - p_1 P' = d_1 ,$$

ponaturque

$$t - t' + \alpha d + \beta d_1 = 0 ,$$

cui aequationi quam proxime satisfaciendae numeri integri α et β tentando facile determinabuntur. Quot autem hoc modis exigi poterit, tot prodibunt tempora

$$t' + (\alpha p + \beta p_1)P' \quad \text{fere aequalia} \quad t + (\alpha p' + \beta p'_1)P ,$$

quibus planeta fixam etiamsi non occultare, parum tamen ab ea distare observabitur. Facilem diximus numerorum α et β determinationem propterea, quod nisi ipsi paucis tantummodo unitatibus continerentur, tempora ab epocha nimium remota emergerent, quam quibus epochae elementa ad occultationum inventionem adhiberi adhuc possent. Eandem igitur ob caussam non opus erit, binomio $\alpha d + \beta d_1$ plures adjungere terminos γd_2, δd_3 etc., qui propter hanc quoque rationem tuto ommittuntur, quod omnes insequentes differentiae d_2, d_3, etc. ad formam $md + nd_1$, m et n designantibus numeros integros reduci possunt. Nam quum haec sit natura fractionum continuarum, ut habeatur:

$$p'_\varkappa = mp' + np'_1 , \qquad p_\varkappa = mp + np_1 ,$$

erit etiam

$$d_\varkappa = p'_\varkappa P - p_\varkappa P' = (mp' + np'_1)P - (mp + np_1)P' = md + nd_1 .$$

§. 21. Singulis conjunctionum temporibus hoc modo approximate erutis restat, ut tempora ipsa, quibus planeta a fixa minime distat, atque hae minimae distantiae adhibitis elementorum variationibus et aberratione lucis accurate determinentur. Cujus vero calculi ope tabularum astronomicarum institutioni quum plane similis in eclipsibus

solaribus et occultationibus fixarum per lunam obveniat, ulterius eam hoc loco explicare nolumus.

Sit jam terrae a sole distantia media pro unitate accepta,

$$\text{semidiameter terrae} = \varrho', \qquad \text{planetae} = \varrho,$$

$$\text{distantia planetae a terra tempore minimae distantiae} = \Delta;$$

elucet futurum fore $\frac{\varrho + \varrho'}{\Delta} = \nabla$ omnium maximam ex centro terrae apparentem centri planetae a fixa distantiam, qua quidem ex terrae superficiei loco planetaris disci contactum observare licet. Hoc igitur maximo distantiae valore si computata distantia minima fuerit minor, certi erimus, occultationem revera locum habituram: sin contra major, ex quovis terrae loco planeta et fixa a se invicem distare videbuntur.

§. 22. Ommissis adhuc elementorum variationibus minima distantia ejusque tempus immediate quoque ex differentia temporum t', t, quibus terra et planeta definita prius loca occupant, inveniri poterunt. Quum enim perinde sit, quicquid momentum temporis pro epocha acceptum fuerit, patet, quaesitas illas quantitates a nulla alia temporum t', t functione, nisi earum differentia pendere posse, ideoque, si distantia minima ejusque tempus inde ab epocha inceptum vocentur δ et τ, esse δ, $\tau - t'$, $\tau - t$ functiones ipsius $t - t'$. Hinc, quia evanescente $t - t'$ evanescant quoque δ, $\tau - t'$, $\tau - t$, et quum praeterea $t - t'$ sit quantitas admodum parva, functionum istarum forma poni poterit: $k(t - t')^m$. Semel igitur coefficientibus k, qui nonnisi ab orbitarum elementis fixaeque loco pendent, erutis pro quovis conjunctionis tempore per duo momenta t', t obiter assignato, minima fixae a planeta apparens distantia ejusque tempus illico poterunt exhiberi. Quae quamvis determinationes ob neglectam elementorum variabilitatem pro exactis haberi neutiquam possint, praeclare tamen praeviae apparitionum cognitioni inservient. Ipsos autem coefficientes differentiae $t - t'$ ex terrae et planetae elementis fixaeque loco hac ratione deduximus.

§. 23. Vocentur

coordinatae terrae tempore $t' \ldots x'$, y',

tempore $\tau \ldots \xi'$, η',

coordinatae planetae tempore $t \ldots x$, y, z,

tempore $\tau \ldots \xi$, η, ζ.

Hinc, quum partes orbitarum terrae et planetae intervallis $\tau - t'$, $\tau - t$ descriptae pro rectilineis omnino haberi possint, statuere licebit:

$$\xi' = x' + (\tau - t')\frac{dx'}{d\tau},$$

$$\eta' = y' + (\tau - t')\frac{dy'}{d\tau},$$

$$\xi = x + (\tau - t)\frac{dx}{d\tau},$$

$$\eta = y + (\tau - t)\frac{dy}{d\tau},$$

$$\zeta = z + (\tau - t)\frac{dz}{d\tau}.$$

Positis igitur

$$\begin{aligned}(\tau - t)\frac{dx}{d\tau} - (\tau - t')\frac{dx'}{d\tau} &= \mathfrak{a},\\ (\tau - t)\frac{dy}{d\tau} - (\tau - t')\frac{dy'}{d\tau} &= \mathfrak{b},\\ (\tau - t)\frac{dz}{d\tau} &= \mathfrak{c},\end{aligned} \tag{1}$$

erit

$$\begin{aligned}\xi - \xi' &= x - x' + \mathfrak{a},\\ \eta - \eta' &= y - y' + \mathfrak{b},\\ \zeta &= z + \mathfrak{c}.\end{aligned} \tag{2}$$

Vocatis jam fixae longitudine a terrae perihelio incepta l, latitudine b, planetae longitudine geocentrica tempore τ ab eodem ecliptices puncto numerata λ, latitudine β, minimaque distantia δ; designata porro distantia terrae tempore t' a planeta tempore t per D, terrae vero a planeta distantia tempore τ per Δ, erit:

$$\begin{aligned}x - x' &= D\cos b\cos l,\\ y - y' &= D\cos b\sin l,\\ z &= D\sin b,\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\xi - \xi' &= \Delta\cos\beta\cos\lambda,\\ \eta - \eta' &= \Delta\cos\beta\sin\lambda,\\ \zeta &= \Delta\sin\beta,\end{aligned} \tag{4}$$

et secundum aequationes (2):

$$\begin{aligned}\Delta\cos\beta\cos\lambda &= D\cos b\cos l + \mathfrak{a},\\ \Delta\cos\beta\sin\lambda &= D\cos b\sin l + \mathfrak{b},\\ \Delta\sin\beta &= D\sin b + \mathfrak{c}.\end{aligned} \tag{5}$$

Multiplicetur harum aequationum prima per $\sin l$, secunda per $\cos l$, eritque facta tunc subtractione:

(6) $$\varDelta \sin(l-\lambda)\cos\beta = \mathfrak{a}\sin l - \mathfrak{b}\cos l \ .$$

Ex tertia autem sequitur:

$$\varDelta(\sin b - \sin\beta) = (\varDelta - D)\sin b - \mathfrak{c} \ .$$

Jam si aequationum (5) quadrata adduntur, neglectis ipsorum $\tau - t$, $\tau - t'$, ideoque $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, sicuti brevi post $l-\lambda$, $b-\beta$, δ, utpote infinite parvorum, prima altioribus potestatibus, et ponendo

(7) $$\mathfrak{a}\cos b\cos l + \mathfrak{b}\cos b\sin l + \mathfrak{c}\sin b = u \ ,$$

erit:

$$\varDelta = D + u \ ,$$

et consequenter:

(8) $$\varDelta(b-\beta)\cos b = u\sin b - \mathfrak{c} \ .$$

Statuatur jam:

(9) $$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} - \frac{dz}{d\tau}\cot b\cos l &= v\cos\psi \ , \\ \frac{dy}{d\tau} - \frac{dz}{d\tau}\cot b\sin l &= v\sin\psi \ , \\ \frac{dx'}{d\tau} &= v'\cos\psi' \ , \\ \frac{dy'}{d\tau} &= v'\sin\psi' \ , \end{aligned}$$

unde fiet ex (1)

$$\mathfrak{a} = (\tau - t)\left\{v\cos\psi + \frac{dz}{d\tau}\cot b\cos l\right\} - (\tau - t')\, v'\cos\psi' \ ,$$

$$\mathfrak{b} = (\tau - t)\left\{v\sin\psi + \frac{dz}{d\tau}\cot b\sin l\right\} - (\tau - t')\, v'\sin\psi' \ ,$$

qui valores in aequationibus (7), (6) et (8) substituti dabunt:

$$u = (\tau - t)\, v\cos b\cos(l-\psi) - (\tau - t')\, v'\cos b\cos(l-\psi') + \frac{\tau - t}{\sin b}\frac{dz}{d\tau} \ ,$$

(10) $$\begin{aligned} \varDelta(l-\lambda)\cos b &= (\tau - t)\, v\sin(l-\psi) - (\tau - t')\, v'\sin(l-\psi') \ , \\ \varDelta(b-\beta) &= \{(\tau - t)\, v\cos(l-\psi) - (\tau - t')\, v'\cos(l-\psi')\}\sin b \ . \end{aligned}$$

Positis igitur:

(11) $$\begin{aligned} \cos\chi &= \cos b\cos(l-\psi) \ , \\ \cos\chi' &= \cos b\cos(l-\psi') \ , \end{aligned}$$

(12) $$\begin{aligned} v\sin\chi &= c \ , \\ v'\sin\chi' &= c' \ . \end{aligned}$$

$$\frac{\cos(\psi-\psi')-\cos\chi\cos\chi'}{\sin\chi\sin\chi'}=\cos\omega\ , \tag{13}$$

omnibus rite reductis obtinebimus:

$$\begin{aligned}\varDelta^2\delta^2&=\varDelta^2\{(l-\lambda)^2\cos b^2+(b-\beta)^2\}\\&=(\tau-t)^2c^2+(\tau-t')^2c'^2-2(\tau-t)(\tau-t')cc'\cos\omega\ .\end{aligned}\tag{14}$$

Hinc ut δ fiat minimum, ejus differentiale secundum τ annihilandum erit, ideoque etiam differentiale ipsius $\varDelta^2\delta^2$, quippe quum altera hujus differentialis pars $2\delta^2\varDelta\frac{d\varDelta}{d\tau}$ ob δ^2 infinite parvum secundi ordinis per se evanescat. Differentiata igitur aequatione (14) prodit:

$$0=(\tau-t)c^2+(\tau-t')c'^2-(2\tau-t-t')cc'\cos\omega\ ,$$

unde sequitur tempus minimae distantiae:

$$\begin{aligned}\tau&=t'+(t-t')\frac{c^2-cc'\cos\omega}{c^2+c'^2-2cc'\cos\omega}\\&=t-(t-t')\frac{c'^2-cc'\cos\omega}{c^2+c'^2-2cc'\cos\omega}\ ,\end{aligned}\tag{15}$$

quod in (14) substitutum dabit minimam distantiam ipsam:

$$\delta=\frac{(t-t')cc'\sin\omega}{D\sqrt{c^2+c'^2-2cc'\cos\omega}}\ . \tag{16}$$

Si denique hi ipsorum $\tau-t'$, et $\tau-t$ valores ex (15) in aequationibus (10) substituuntur, emerget:

$$\begin{aligned}l-\lambda&=(t-t')\frac{vv'\sin b^2\sin(\psi-\psi')[v'\cos(l-\psi')-v\cos(l-\psi)]}{D\cos b\,(c^2+c'^2-2cc'\cos\omega)}\ ,\\b-\beta&=(t-t')\frac{vv'\sin b\,\sin(\psi-\psi')[v\sin(l-\psi)-v'\sin(l-\psi')]}{D\,(c^2+c'^2-2cc'\cos\omega)}\ ,\end{aligned}\tag{17}$$

quae igitur formulae mutuam planetae et fixae apparentem positionem versus eclipticam tempore minimae distantiae determinare valent.

Praeterea combinatione aequationum (11) et (13) non difficile sequens adhuc elicitur formula:

$$\sin\omega=\frac{\sin b\sin(\psi-\psi')}{\sin\chi\sin\chi'}\ , \tag{18}$$

quae quamvis signum ipsius $\cos\omega$ ambiguum relinquat, bene tamen ad confirmandum calculum in usum poterit vocari.

§. 24. Formulae (10) adhiberi etiam poterunt ad inveniendum tempus, quo fixa et planeta eandem habent longitudinem, sive tem-

pus vulgo dictae conjunctionis, et differentiam, quam tunc servant, latitudinum. Ponendo enim $l = \lambda$, sequitur ex aequationum 10) priori:

$$(19)\qquad \begin{aligned} \tau &= t' + \frac{(t-t')\,v\sin(l-\psi)}{v\sin(l-\psi) - v'\sin(l-\psi')} \\ &= t + \frac{(t-t')\,v'\sin(l-\psi')}{v\sin(l-\psi) - v'\sin(l-\psi')}\,, \end{aligned}$$

et ex posteriori, facta substitutione:

$$(20)\qquad b - \beta = \frac{(t-t')\,v\,v'\sin(\psi-\psi')\sin b}{D[v\sin(l-\psi) - v'\sin(l-\psi')]}\,,$$

quos valores, quum anguli, quos circuli latitudinum cum orbitis apparentibus planetarum faciunt, a rectis plerumque perparum differant, simul valores approximatos temporis minimae distantiae distantiaeque ipsius exhibere manifestum est. — Caeterum ex omnibus his quantitatum ad minimam distantiam spectantium: $\tau - t'$, $\tau - t$, $l - \lambda$, $b - \beta$, δ, expressionibus earum cum $t - t'$, quam supra innuimus, proportionalitas ultro cognoscitur.

§. 25. Superest, ut quantitates v', v, ψ', ψ, quae supra (9) per coordinatarum differentialia exhibebantur, nunc,[1] quomodo ex ipsis elementis et anomaliis deducendae sint, ostendamus. Patet autem, v' et v exprimere velocitates terrae et planetae in projecta ad eclipticam orbita se moventium, ψ' et ψ vero angulos, quos directiones harum velocitatum cum abscissarum linea faciunt. Instituta jam collatione formularum (1), (2) et (6) primae sectionis emanat (§. 13):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} - \frac{dz}{d\tau}\cot b\cos l &= \{A\cos E - A'\sin E\}\frac{dE}{d\tau} \\ &= m\cos(E+\mu)\frac{dE}{d\tau}\,, \\ \frac{dy}{d\tau} - \frac{dz}{d\tau}\cot b\sin l &= \{B\cos E - B'\sin E\}\cos\varphi'\frac{dE}{d\tau} \\ &= n\cos(E+\nu)\cos\varphi'\frac{dE}{d\tau}\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{d\tau} &= -\sin E'\frac{dE'}{d\tau}\,, \\ \frac{dy'}{d\tau} &= \cos E'\cos\varphi'\frac{dE'}{d\tau}\,. \end{aligned}$$

Constat autem inter tempus a transitu planetae per perihelium incipiens τ et anomaliam excentricam E haec relatio:

$$\tau = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{k}(E - \sin\varphi \sin E) ,$$

k designante numerum pro omnibus planetis, si massae eorum respectu massae solis negliguntur, constantem, cuius logarithmus $= 8{\cdot}2355814 - 10$ (Gauss, *Theoria motus corp. coelest.* art. 1 et 6). Unde sequitur differentiando:

$$\frac{dE}{d\tau} = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}(1 - \sin\varphi \cos E)} ,$$

et quum terrae a sole distantiam mediam pro unitate sumserimus:

$$\frac{dE'}{d\tau} = \frac{k}{1 - \sin\varphi' \cos E'} .$$

Haec igitur si in antecedentibus (9) substituuntur, fiet:

$$v \cos\psi = \frac{km \cos(E + \mu)}{a^{\frac{3}{2}}(1 - \sin\varphi \cos E)} ,$$

$$v \sin\psi = \frac{kn \cos\varphi' \cos(E + \nu)}{a^{\frac{3}{2}}(1 - \sin\varphi \cos E)} , \quad (21)$$

$$v' \cos\psi' = \frac{-k \sin E'}{1 - \sin\varphi' \cos E'} ,$$

$$v' \sin\psi' = \frac{k \cos\varphi' \cos E'}{1 - \sin\varphi' \cos E'} . \quad (22)$$

§. 26. Quod tandem attinet ad computationem distantiae D planetae a terra, quae ad inveniendam apparentem distantiam δ requiritur, in usum poterit vocari vel una formularum (3), quum coordinatae x, y, z, x', y' ex formulis (2) et (3) primae sectionis inventis anomaliis simul innotescant, vel certius analytica evolutio ipsius

$$D^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2$$

ex iisdem formulis in hanc formam:

$$I + K\cos(E' + \varkappa) + L\cos(E + \lambda) + M\cos(E + E' + \mu)$$
$$+ N\cos(E - E' + \nu) + P\cos 2E' + Q\cos 2E$$

in qua I, K, L, .. $\varkappa$, λ, .. pro eodem planeta constantes tenent valores ita quidem, ut sit:

$$I = 1 + \frac{1}{2}\sin\varphi'^2 + a^2\left(1 + \frac{1}{2}\sin\varphi^2\right) - 2\alpha''\sin\varphi' ,$$

$$K\cos\varkappa = 2\alpha'' - 2\sin\varphi' ,$$

$$K\sin\varkappa = -2\beta''\cos\varphi' ,$$

$$L\cos\lambda = 2\alpha'\sin\varphi' - 2a^2\sin\varphi ,$$

$$L\sin\lambda = -2\alpha\sin\varphi' ,$$

$$M\cos\mu = \beta\cos\varphi' - \alpha' ,$$

$$M\sin\mu = \beta'\cos\varphi' + \alpha ,$$

$$N\cos\nu = -\alpha' - \beta\cos\varphi' ,$$

$$N\sin\nu = \alpha - \beta'\cos\varphi' ,$$

$$P = \frac{1}{2}\sin\varphi'^2 ,$$

$$Q = \frac{1}{2}a^2\sin\varphi^2 .$$

§. 27. Hoc igitur modo distantia planetae a terra inventa, reliquarum formularum ad computandos valores ipsorum τ et δ ordo erit hic:

(21), (22), [(11), (13), (18), (12), (15), (16), vel approximate (19), (20)].

Jam quum sit maximus distantiae apparentis minimae valor (§. 21):

$$\nabla = \frac{\varrho + \varrho'}{\Delta}$$

ut occultatio locum habeat, debebit esse:

$$\pm \frac{(t - t')\,cc'\sin\omega}{\sqrt{c^2 + c'^2 - 2cc'\cos\omega}} < \varrho + \varrho' ,$$

sive

$$(t - t') < \pm\, (\varrho + \varrho')\,\frac{\sqrt{c^2 + c'^2 - 2cc'\cos\omega}}{cc'\sin\omega} ,$$

unde ex temporum differentia ipsa, cujus hac ratione maximum sive limites innotescunt, jam satis certo de occultationum exsistentia poterimus judicare.

§. 28. Apprime autem horum limitum cognitio utilis erit ad obiter aestimandas temporis periodos, quibus eandem occultationem reverti probabile est. Generaliter perspicitur, si elapso tempore T terra post P', planeta post P integras revolutiones in iisdem orbitarum locis A', A iterum inveniantur, quibus initio illius temporis occurrerunt, planetam intra tempus T et iis quidem momentis, quibus terra punctum A' occupat, in aequalibus anomaliae, quam describit, mediae arcubus ob numeros P', P infinite magnos aequalibus vicibus ob-

versaturum esse. Unde porro sequitur, si sint duo arcus anomaliae planetaris mediae α et β in ratione numerorum integrorum a et b, iisdem momentis fore multitudines vicium, quibus planeta in arcus α et β incidit, respective ut $a:b$. Quamobrem si statuitur $\alpha =$ toti peripheriae ideoque $a = P'$, quia intra tempus T terra P'-ties in puncto A' occurrit, erit

$$b = \frac{\beta P'}{360^0}.$$

Haec vero omnia nonnisi probabiliter evenient, si loco temporis infiniti T aliud finitum, eamque ob caussam pro P', P numeri fracti substituantur. Ponendo igitur

$$b = 1, \text{ cum fiat } P' = \frac{360^0}{\beta},$$

et per consequens T aequale $\frac{360^0}{\beta}$ annis, intra spatium $\frac{360^0}{\beta}$ annorum probabile erit, terra in A' commorante, planetam semel intra fines arcus β futurum esse obvium. Jam, quum quaeratur, quoties accidat, ut, dum terra in A' sita sit, planeta a puncto A non plus arcu $\pm (t - t')\, m$ distet ($t - t'$ exhibente valorem illum limitivum et m, uti supra (§. 19), motum planetae diurnum), erit casu praesenti

$$\text{arcus } \beta = 2\,(t - t')\, m\,,$$

et numerus annorum, intra quos probabile est, occultationem denuo locum habituram:

$$= \frac{180^0}{(t - t')\, m}.$$

Occultationes fixarum sex principaliorum per Venerem.

Orbitarum Terrae et Veneris elementa ex Laplace, *Exposition du système du monde*, troisième edit. pag. 116, divisione, quam adhibuit Vir illustr. circuli centesimali in sexagesimalem transversa, desumta sunt haec:

Epocha: 1800 Decbr. 31, 12^h temp. med. Parisin.

	Terrae	Veneris
Revolutio siderea	$365^d 25638350$	$224^d 70082399$
Semiaxis maior	1·0000000	0·7233323
Excentricitas	0·0168532	0·0068530
Longit. med. epoch.	$100^0\ 9'\ 13''0$	$10^0\ 44'\ 34''7$
Longit. perihelii	99 30 5·0	128 37 0·9
Longit. nodi asc.		74 52 39
Inclinatio		3 23 33·

Ex his primum computatus est secundum formulam §. 2 allatam Veneris zodiacus, quem in usum eorum, qui plures per Venerem occultandas fixas ad calculum sibi forte eligere volunt, pro denis longitudinis geocentricae gradibus apponendum curavimus in tabula sequenti, cujus columnae litteris *B* et *A* designatae limites boreales et australes latitudinum geocentricarum exhibent.

Zodiacus Veneris.

Long. geoc.	*B*	*A*	Long. geoc.	*B*	*A*
0°	8°37′	1°34′	180°	1°33′	8°36′
10	8 22	1 47	190	1 47	8 25
20	8 1	2 4	200	2 8	8 9
30	7 35	2 28	210	2 34	7 47
40	7 4	2 57	220	3 5	7 20
50	6 30	3 30	230	3 40	6 49
60	5 54	4 4	240	4 18	6 14
70	5 16	4 40	250	4 58	5 37
80	4 38	5 17	260	5 37	4 58
90	4 1	5 54	270	6 15	4 19
100	3 26	6 30	280	6 51	3 41
110	2 54	7 3	290	7 24	3 6
120	2 26	7 32	300	7 53	2 35
130	2 2	7 57	310	8 16	2 9
140	1 44	8 17	320	8 33	1 49
150	1 32	8 32	330	8 44	1 35
160	1 26	8 40	340	8 48	1 27
170	1 26	8 41	350	8 45	1 27
180	1 33	8 36	360	8 37	1 34

Intra hos zodiaci limites cadunt fixae primae magnitudinis: Regulus, Spica et Antares; secundae: α Librae et β Scorpionis. Atque hae sunt, addita tertiae magnitudinis Alcyone multis minoribus eam circumsistentibus fixis prae ceteris insigni, quibus per Venerem occultandis praecedentem methodum illustrare nobis proposuimus. Fusius autem hunc occultationum calculum in Antare explicabimus, reliquarum fixarum nonnisi calculi summas tradituri.

Ex elementis terrae et Veneris ante propositis quantitatum constantium α, α', ... auxilio formularum (§. 7, 4) valores inveniuntur hi:

$$\alpha = -0{\cdot}3522578$$
$$\frac{\beta}{\cos\varphi'} = +0{\cdot}6313253$$
$$\log\gamma = 8{\cdot}4033952$$
$$\alpha' = +0{\cdot}6315061$$
$$\frac{\beta'}{\cos\varphi'} = +0{\cdot}3510743$$
$$\log\gamma' = 8{\cdot}5379972$$
$$\alpha'' - \sin\varphi' = -0{\cdot}0125255$$
$$\frac{\beta''}{\cos\varphi'} = +0{\cdot}0024059$$
$$\log\gamma'' = 6{\cdot}3738779$$
$$\log\cos\varphi' = 9{\cdot}9999383 .$$

Est autem Antaris longitudo tempore epochae

$$l + \pi' = 246^{0}59'6'', \quad \text{ideoque} \quad l = 147^{0}29'1'' ,$$
$$\text{latitudo } b = -4^{0}32'32'' .$$

Hinc facili secundum formulas (§. 8, 7) instituto calculo emergent:

$$A = -0{\cdot}6209706 , \qquad B = +0{\cdot}8026467 ,$$
$$A' = +0{\cdot}2651611 , \qquad B' = +0{\cdot}5846424 ,$$
$$A'' = -0{\cdot}0150361 , \qquad B'' = +0{\cdot}0040065 .$$

Ex quibus quum sequatur (§. 13, 10):

$$\log m = 9{\cdot}8294418 , \qquad \log n = 9{\cdot}9969491 ,$$
$$\mu = 156^{0}52'37''2 , \qquad \nu = 36^{0}\ 4'\ 9''6 ,$$
$$\mu' = -\ 1\ 16\ 33{\cdot}6 , \qquad \nu' = +\ 0\ 13\ 52{\cdot}2 .$$

aequationes resolvendas (§. 13, 11) obtinebimus has:

$$\text{num}\ \log 0{\cdot}1304718 \sin(\tfrac{1}{2}E + 79^{0}\ 4'35''4) \times \cos(\tfrac{1}{2}E + 77^{0}48'\ 1''8) = \cos E' ,$$

$$\text{num}\ \log 0{\cdot}2979791 \sin(\tfrac{1}{2}E + 17^{0}55'\ 8''7) \times \cos(\tfrac{1}{2}E + 18^{0}\ 9'\ 0''9) = \sin E' .$$

Jam primi valores approximati ipsius E ope formularum (§. 11, 8, 9) eruentur hi:

$$42^{0}43' , \qquad 92^{0}41' , \qquad 222^{0}43' , \qquad 272^{0}41' ,$$

quibus si additur

$$\pi - \Omega = 53^\circ 44' ,$$

duo priores 180 gradibus minores, duo posteriores majores evadent. Hinc, quum sit latitudo Antaris australis, priores ommittendi ad oppositiones pertinebunt, ad conjunctiones posteriores, quorum igitur correctiones nunc ulterius erunt investigandae (§. 12). Statuatur ergo primum (§. 13):

$$e = 222^\circ 43' , \quad \text{ideoque} \quad \frac{1}{2} e = 111^\circ 21' 5 ,$$

quo valore in aequationibus resolvendis substituto prodit:

$$e' = 283^\circ 58' , \qquad \varepsilon' = 282^\circ 1' , \qquad \delta = e' - \varepsilon' = 1^\circ 57' .$$

Invenitur jam divisor corrigens ex (§. 13, 13):

$$c = -1{\cdot}58 ,$$

unde sequitur valor approximatus secundus:

$$f = e + \frac{\delta}{c} = 222^\circ 43' - 1^\circ 13' = 221^\circ 30' ,$$

quo iterum substituto, adhibitis logarithmis ad septem notas decimales, emanant anomaliae terrae:

$$283^\circ 10' 26'' 5 , \qquad 283^\circ 9' 45'' 8 , \quad \text{ideoque} \quad \delta' = +40'' 7 .$$

unde valor ipsius E approximatus tertius:

$$g = f + (f - e) \frac{\delta'}{\delta - \delta'} = 221^\circ 30' - 25'' 6 = 221^\circ 29' 34'' 4 ,$$

cui respondent anomaliae terrae:

$$283^\circ 10' 9'' 7 , \qquad 283^\circ 10' 9'' 8 ,$$

quae quum nonnisi decima parte minuti secundi inter se differant, neglectis secundi decimalibus statuere licebit:

$$E' = 283^\circ 10' 10'' , \qquad E = 221^\circ 29' 34'' .$$

Notasse juvat, quum valor approximatus secundus plerumque paucis tantum minutis primis a vero aberret, calculum paullo commodius absolvi posse, si logarithmorum sinuum et cosinuum incrementa, puta pro uno minuto secundo, ex tabulis simul excerpantur. Ita enim fiet, ut, quae restant, correctiones absque ulteriori tabularum auxilio possint inveniri. Quin imo his solis logarithmorum differentiis approximationis istud negotium peragi poterit. In genere enim perspicitur, si fuerit

$$\log \sin \alpha = A$$

et incrementum ipsius A pro uno minuto secundo $= a$, fore

$$\log\sin(\alpha + x'') = A + ax\ ,$$

et vice versa, si datus fuerit sinus alicujus logarithmus $= A + bx$, arcum ipsi respondentem fore $= \alpha + \frac{bx''}{a}$.

Ponatur igitur, ut hanc methodum alteram eodem exemplo illustremus, correctio anomaliae $222^\circ 43'$ aequalis $2x$ minutis primis, ita ut sit

$$E = 222^\circ 43' + 2x'\ , \qquad \tfrac{1}{2}E = 111^\circ 21'5 + x'\ ,$$

atque calculus orietur hic;

$111^\circ 21'5 + x'$			0·13047
79 4·5	$190^\circ 26' + x'$	log sin	$9{\cdot}25790n + 68x$*)
77 48	$189\ 9{\cdot}5 + x'$	log cos	$9{\cdot}99443n - 2x$
		log cos E'	$9{\cdot}38280 + 66x$
17 55	$129\ 16{\cdot}5 + x'$	log sin	$9{\cdot}88881 - 10x$
18 9	$129\ 30{\cdot}5 + x'$	log cos	$9{\cdot}80359n + 15x$
			0·29798
		log sin E'	$9{\cdot}99038n + 5x$

unde habetur

$$\text{ex}\ \cos E',\ E' = 283^\circ 58' + \left(\frac{66}{+51} = 1{\cdot}29\right)x\ ,$$

$$\text{ex}\ \sin E',\ E' = 282^\circ\ 1' + \left(\frac{5}{-3} = -1{\cdot}67\right)x\ ,$$

qui arcus quum debeant esse aequales, prodit aequatio:

$$1^\circ 57' + 2{\cdot}96x = 0\ ,$$

hinc

$$x = -0^\circ 39'5\ , \qquad \tfrac{1}{2}E = 110^\circ 42'\ .$$

Addita jam huic secundo valori approximato correctione x minutorum secundorum, calculo ope majorum tabularum repetito:

$110^\circ 42' + x''$			0·1304718
79 4 35·4	$189^\circ 46' 35''4 + x''$	log sin	$9{\cdot}2299513n + 122{\cdot}2x$
77 48 1·8	$188\ 30\ 1\ 8 + x''$	log cos	$9{\cdot}9952027n - 3{\cdot}2x$
		log cos E'	$9{\cdot}3556258 + 119{\cdot}0x$
17 55 8·7	$128\ 37\ 8\ 7 + x''$	log sin	$9{\cdot}8928249 - 16{\cdot}8x$
18 9 0·9	$128\ 51\ 0\ 9 + x''$	log cos	$9{\cdot}7974663n + 26{\cdot}1x$
			0·2979791
		log sin E'	$9{\cdot}9882703n + 9{\cdot}3x$

*) n indicante logarithmum numeri negativi.

invenitur:

$$E' = 283^\circ\ 6'29''6 + \frac{1190}{905}x\ .$$

$$E' = 283\ 15\ 23{\cdot}8 - \frac{93}{50}x\ ,$$

$$0 = 8'54''2 - 3{\cdot}19x\ ; \qquad x = 3'47''5\ ;$$

ex quo

$$E' = 283^\circ\ 6'29''6 + 3'40''2 = 283^\circ 10'\ 9''8\ ,$$

$$E\ = 221^\circ 24' \qquad + 5'35''0 = 221\ 29\ 35{\cdot}0\ ,$$

qui valores a prius inventis vix notabiliter discrepant.

Investigandae nunc essent alterius quoque anomaliarum paris correctiones, cui tamen calculo, quum ejus ratio eadem sit, qualem pro primo pari exposuimus, hoc loco diutius inhaerere foret superfluum. Transeamus igitur ad inventionem temporum, quibus terra et Venus in locis modo erutis simul obveniunt.

Ex anomaliis excentricis derivantur mediae (§. 19):

$$M' = 284^\circ 6'35''\ , \qquad M = 221^\circ 45'11''\ .$$

atque ex his ope constantium

$$N' = \ \ 0^\circ 39'\ 8''\ , \quad \log m' = 3{\cdot}5500072\ ,$$

$$N\ = 242\ \ 7\ 34\ , \quad \log m\ = 3{\cdot}7610003\ ,$$

invenientur:

$$\frac{M' - N'}{m'} = 287{\cdot}596\ , \quad \frac{M - N}{m} = 211{\cdot}985\ , \quad Q = -75{\cdot}611\ .$$

Resoluta jam fractione

$$\frac{P'}{P} = \frac{365{\cdot}256\,38350}{224{\cdot}700\,82399}$$

in fractionem continuam, pro duobus ejus valoribus approximatis immediate sese excipientibus assumantur hi:

$$p' : p = 13 : 8\ , \qquad p_1' : p_1 = 382 : 235\ .$$

unde cum sit:

$$p_1'p - p_1p' = +1\ ,$$

pro omnibus a Venere occultandis fixis habebimus:

$$x' = \ \ 8q + n\,.\,235\ ,$$

$$x\ = 13q + n\,.\,382\ ,$$

$$\log\left(\frac{p_1'}{P'} \text{ vel } \frac{p_1}{P}\right) = 0{\cdot}01946\ .$$

$$d\ = p'P - pP' = -0{\cdot}940\ ,$$

$$d_1 = p_1'P - p_1P' = +0{\cdot}465\ ,$$

et dehinc (§. 20):

$$t - t' - 0{\cdot}940\,\alpha + 0{\cdot}465\,\beta = 0\ ;$$

quae generalis omnium per Venerem occultationum aequatio quo commodius pro dato quovis singulo ipsius $t - t'$ valore in usum vocari possit, tabulam construximus sequentem, quae pro pluribus ipsorum α et β (β semper positivi) valoribus in prima columna suppositis, valores quantitatis

$$T = -0{\cdot}940\,\alpha + 0{\cdot}465\,\beta$$

dehinc oriundos in secunda columna exhibet, in tertia autem numeros revolutionum terrae:

$$R = 8\,\alpha + 235\,\beta$$

complectitur.

$\alpha,\ \beta$	T	R	$\alpha,\ \beta$	T	R
+ 1 0	− 0·940	8	+ 3 + 2	− 1·890	494
+ 2 0	− 1·880	16	0 + 3	+ 1·395	705
− 1 + 1	+ 1·405	227	+ 1 + 3	+ 0·455	713
0 + 1	+ 0·465	235	+ 2 + 3	− 0·485	721
+ 1 + 1	− 0·475	243	+ 3 + 3	− 1·425	729
+ 2 + 1	− 1·415	251	0 + 4	+ 1·860	940
− 1 + 2	+ 1·870	462	+ 1 + 4	+ 0·920	948
0 + 2	+ 0·930	470	+ 2 + 4	− 0·020	956
+ 1 + 2	− 0·010	478	+ 3 + 4	− 0·960	964
+ 2 + 2	− 0·950	486	+ 4 + 4	− 1·900	972

Ut jam redeamus ad Antarem nostrum, ex Q invenietur, ommissa fractione decimali 0·075,

$$q = -79\ ,$$

unde, si statuitur $n = 3$, prodibunt:

$$x' = 73\ , \qquad x = 119\ ,$$

$$t' = 287^{d}596 + \ 73 \times 365^{d}256.. = 26951^{d}312\ ,$$

$$t\ = 211{\cdot}985 + 119 \times 224{\cdot}700.. = 26951{\cdot}383\ ,$$

$$t - t' = +\,0^{d}071\ .$$

Ex his igitur temporibus t', t, quorum in vicinia ob parvam eorum differentiam Veneris et Antaris conjunctio locum habebit, ut ejusmodi resultent alia, addantur vel subtrahantur tempori

$$t' = 73^{r}\,287^{d}596$$

(r denotante revolutiones terrae sidereas) revolutionum numeri ex tabulae praecedentis columna tertia, eodemque modo differentiae 0·071 jungantur numeri respondentes ex columna secunda: quo facto priora

aggregata exhibebunt valores ipsius t', posteriora differentias $t - t'$, quae quo inveniuntur minores, eo magis planetam ad fixam accedere generaliter perspicuum est. Hinc obtinentur:

73^r	t'	0·071	$t - t'$
— 478	— 405^r + 287^{d}596	+ 0·010	+ 0·081
— 243	— 170 + 287·596	+ 0·475	+ 0·546
— 235	— 162 + 287·596	— 0·465	— 0·394
+ 235	+ 308 + 287·596	+ 0·465	+ 0·536
+ 243	+ 316 + 287·596	— 0·475	— 0·404
+ 478	+ 551 + 287·596	— 0·010	+ 0·061

Quam parvae autem hae differentiae debeant esse, ut revera accidat occultatio, et quae sint ipsa occultationum tempora, nonnisi ex earum coefficientibus (§. 22) poterit dignosci, quorum ad computationem nunc progredimur. Quaeratur hunc in finem primo ex anomaliis excentricis planetae a terra distantia, secundum formulam paragrapho 26. exhibitam, quae constantibus pro Venere computatis ita se habet:

$$\begin{aligned} D^2 = 1{\cdot}5232181 &+ \text{num log } 0{\cdot}1599511 \cos(E - E' + 209^\circ\ 6'\ 56'') \\ &+ \text{num log } 8{\cdot}4066881 \cos(E' + 190\ 52\ 12) \\ &+ \text{num log } 8{\cdot}2658661 \cos(E + 40\ 4\ 15) \\ &+ \text{num log } 7{\cdot}1247550 \cos(E + E' + 254\ 19\ 18) \\ &+ \text{num log } 6{\cdot}15233 \cos 2E' \\ &+ \text{num log } 5{\cdot}08941 \cos 2E\,. \end{aligned}$$

Hinc invenitur

$$\log D = 9{\cdot}73338\,,$$

et quum sint semidiametri terrae et planetae minutis secundis expressae

$$\varrho' = 8''6\,, \qquad \varrho = 8''0\,,$$

erit maxima ex centro terrae apparens fixae a planetae centro distantia (§. 21):

$$\nabla = 30''7\,.$$

Sunt jam logarithmi constantes ad coefficientium calculum necessarii:

in usum forml. (21):		in usum forml. (22):	
$\log(k\,a^{-\frac{3}{2}})$	$= 8{\cdot}4405747$,	$\log k$	$= 8{\cdot}2355814$,
$\log(k \cos\varphi'\, a^{-\frac{3}{2}})$	$= 8{\cdot}4465130$,	$\log(k\cos\varphi')$	$= 8{\cdot}2355197$,
$\log \sin\varphi$	$= 7{\cdot}8358807$,	$\log \sin\varphi'$	$= 8{\cdot}2266824$.

Hinc pro Antare elicitur:

$$(21)\quad \log v = 8{\cdot}27400\,,\qquad (22)\quad \log v' = 8{\cdot}23725\,,$$
$$\psi = 341^\circ 32' 46''\,,\qquad \psi' = 13^\circ 10'\ 3''\,,$$
$$(11)\quad \chi = 165\ 13\ 10\,,\qquad \chi' = 134\ \ 8\ 26\,,$$
$$(13)\ \text{et}\ (18)\qquad \omega = 13^\circ 7' 24''\,;$$
$$(12)\quad \log c = 7{\cdot}68027\,,\qquad \log c' = 8{\cdot}09315\,,$$

ex quibus tandem prodit secundum formulas (15 et 16):

$$\tau = t' - (t - t')\ 0{\cdot}572\,,\qquad \delta = (t - t')\ 10' 58''.$$

Differentiae autem longitudinum et latitudinum ex formulis (17) sequuntur:

$$l - \lambda = -(t - t')\,41''\,,\qquad b - \beta = -(t - t')\,10' 57''\,.$$

Tempus conjunctionis obtinetur ex formula (19):

$$\tau = t' - (t - t')\ 0{\cdot}586\,,$$

et differentia tunc latitudinum ex (20):

$$b - \beta = -(t - t')\ 10' 59''.$$

Multiplicatis igitur differentiis ante repertis per 10′58″ et 0·572, minimae distantiae eorumque tempora prodibunt haecce:

			τ		δ
-405^r	$+287^d596$	$-0{\cdot}046$	$=-405^r$	$+287^d550$	$-0' 53''$
-170	$+287{\cdot}596$	$-0{\cdot}313$	$=-170$	$+287{\cdot}283$	$-5' 59$
-162	$+287{\cdot}596$	$+0{\cdot}226$	$=-162$	$+287{\cdot}822$	$+4\ 19$
$+73$	$+287{\cdot}596$	$-0{\cdot}041$	$=+73$	$+287{\cdot}555$	$-0\ 47$
$+308$	$+287{\cdot}596$	$-0{\cdot}307$	$=+308$	$+287{\cdot}289$	$-5\ 53$
$+316$	$+287{\cdot}596$	$+0{\cdot}231$	$=+316$	$+287{\cdot}827$	$+4\ 26$
$+551$	$+287{\cdot}596$	$-0{\cdot}035$	$=+551$	$+287{\cdot}561$	$-0\ 40$

Ex quibus perspicitur, quum hi omnes ipsius δ valores maximo ante invento adhuc majores emerserint, intra hoc mille fere annorum spatium, si elementa Veneris invariata retinentur, nullam Antaris per Venerem occultationem locum habere. Pro periodo autem harum occultationum secundum §. 28 inveniuntur circiter 2400 anni.

Jam quum et hujus fixae occultationum, quae eliciumus elementa, et quae ex altero anomaliarum pari evolvenda adhuc restant, tum et reliquarum, quas supra indicavimus, occultandarum elementa una in tabula placuit comprehendere hunc in modum composita.

Fixas in prima serie collocatas sequuntur primum longitudines mediae terrae et Veneris L', L ad fixarum occultationes necessariae, logarithmi deinde distantiae Veneris a terra, posthinc tempora, quibus terra locos assignatos occupat, quibus si adduntur differentiae $t - t'$, tempora Veneris prodeunt. Cuivis autem terrae et Veneris positioni ea tantummodo adjunximus tempora t', t, quae ab epocha quam minime distant et parvam simul inter se tenent differentiam, quippe quum ex his alia tot, quot quisque voluerit, modo in praecedenti exemplo declarato facile derivari possint. Sequuntur jam columnis per $C\delta$ et $C\tau$ designatis coefficientes ipsius $t - t'$, ut quibus differentiae latitudinum $b - \beta$ in conjunctione et differentiae temporum $\tau - t'$, τ exhibente tempus conjunctionis, inveniantur. Computati sunt hi coefficientes ope formularum §. 24, (19), (20), in quibus quum altiores ipsorum $t - t'$ et $b - \beta$ potestates neglectae fuerint, coefficientes isti, quo sunt majores, eo minus pro exactis haberi possunt. Arcus denique et tempora, quae reperiuntur in columnis $M\delta$ et $M(t - t')$, maximos ipsorum δ et $t - t'$ valores (§. 27) produnt, quorum igitur ope ex inventis differentiis $t - t'$, utrum occultatio revera locum habeat, an sola conjunctio, satis certo discernere licebit.

—

	long. et lat. fix.	L'	L	$\log D$	t'	$t-t'$	$C\delta$	$C\tau$	$M\delta$	$M(t-t')$
η ♉	57° 12′ 48″	190° 7′ 44″	155° 37′ 5″	9·77659	— 8ʳ + 91ᵈ289	+ 0ᵈ077	+ 0° 10′ 40″	— 0·343	27″8	0ᵈ043
	+ 4 1 53	227 57 53	225 31 43							
α ♌	147 4 1	7 22 18	87 52 45	0·05973	+ 16 + 271·120	— 0·154	+ 0 1 38	+ 0·437	14·5	0·148
	+ 0 27 35	282 48 44	247 57 49	9·76429	— 77 + 185·326	— 0·121	— 0 9 15	— 0·478	28·6	0·051
α ♍	201 3 57	49 34 15	60 17 12	9·50127	— 18 + 313·935	— 0·019	— 9 34 32	+ 41·131	52·3	0·002
	— 2 2 20	336 32 42	290 20 28	9·84927	+ 161 + 239·843	+ 0·011	— 0 8 5	+ 0·016	23·5	0·048
α ♎	222 18 25	30 39 55	240 9 43	0·21856	— 67 + 294·753	+ 0·283	— 0 1 4	+ 0·531	10·0	0·157
	+ 0 21 34	68 11 55	78 3 44	9·48480	+ 153 + 332·835	+ 0·163	— 4 37 56	+ 21·962	54·4	0·003
β ♏	240 24 39	80 33 12	212 31 23	0·19621	+ 283 + 345·370	+ 0·099	— 0 1 14	+ 0·522	10·6	0·143
	+ 1 2 7	76 32 13	82 13 44	9·44165	+ 105 + 341·295	— 0·054	— 1 56 47	+ 9·187	59·6	0·009
α ♏	246 59 6	51 13 57	43 49 45	9·45470	+ 121 + 315·621	— 0·229	— 1 28 37	+ 10·044	58·3	0·011
	— 4 32 32	23 56 40	350 22 12	9·73338	+ 73 + 287·596	+ 0·071	— 0 10 59	— 0·586	30·7	0·047

Altero longitudinum pari terrae et Veneris pro η tauri nonnisi 2° 26′ inter se differente, Veneris a sole distantia apparens minor est, quam ut fixae ab ea occultandae observari possint. Quamobrem reliqua harum occultationum elementa ommisimus.

Quum η ♉ magna stellarum minorum ordinum copia circumdata sit, planeta in ejus vicinia versante fere semper plures accident occultationes observatu dignissimae. Licet igitur maximam h. l. distantiam apparentem multo majorem assumere, puta ± 30′, quo facto maximum $t - t'$ pro priori longitudinum pari ad tres circiter dies assurget.

Quum pro Regulo tempore apposito + 16ʳ 271ᵈ120 differentia $t - t' = -$ 0ᵈ154 paullulum tantum maximum istius differentiae 0ᵈ148 excedat, hanc Reguli et Veneris conjunctionem diligentius computavi ratione habita perturbationum et aberrationis lucis ex tabb. sol. recentissimis Clr. de Zach et tabb. Veneris Clr. de Lindenau, atque inveni minimam distantiam 18″8, ejusque tempus pro meridiano Seebergensi: 1817 Sept. 29, 4ʰ 4′ 6″ ante meridiem. Ex ipsa autem hac tabula inveniuntur numeri: 15″1; 1817 Sept. 29, 4ʰ 17.



Beitrag zu der Lehre von der Auflösung numerischer Gleichungen.

[Berichte über die Verhandlungen der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathem.-physische Classe, Bd. 4: S. 1—4. Sitzung am 21. Februar 1852.]



Bezeichnet X eine gegebene reelle Function von x, und soll für x ein reeller Werth gefunden werden, welcher der Gleichung

$$X = 0$$

Genüge thut, so weiss man, dass, wenn für x bereits zwei nur wenig von einander verschiedene Werthe a und b bekannt sind, für welche X zwei wenig von Null abweichende Werthe A und B erhält, die Differenzen zwischen a, b und dem gesuchten Werthe von x, welcher c heisse, den entsprechenden Differenzen zwischen A, B und 0 sehr nahe proportional sind, dass also sehr nahe

$$a - c : b - c : a - b = A : B : A - B \;,$$

und damit

$$c = b + (b - a)\frac{B}{A - B} \qquad (1)$$

sein wird.

Findet sich für den solchergestalt berechneten Werth c von x, X nicht gleich Null, sondern gleich C, so ist auf dieselbe Weise ein dem gesuchten bedeutend näher liegender Werth von x,

$$d = c + (c - b)\frac{C}{B - C} \;; \qquad (2)$$

und auf gleiche Art, wenn für $x = d$, $X = D$ wird, ein abermals um einen Grad genauerer Werth von x,

$$e = d + (d - c)\frac{D}{C - D} \;; \qquad (3)$$

u. s. w. Es lassen sich aber der vierte Näherungswerth d und die folgenden e, u. s. w. noch um ein Beträchtliches genauer, als durch die Formeln (2), (3) u. s. w., ermitteln. Denn da man, wenn d berechnet werden soll, bereits drei Paare zusammengehöriger Werthe von x und X, nämlich a und A, b und B, c und C, kennt, so wird man d noch um einen guten Theil schärfer finden, wenn man bei seiner Berechnung nicht bloss das zweite und das dritte Paar, wie vorhin, sondern auch noch das erste mit berücksichtigt. Eben so

wird man den fünften Näherungswerth e ungleich genauer, als durch (3) erhalten, wenn man, ausser d und D, c und C, auch noch das Paar b und B, oder selbst noch das Paar a und A, mit in Rechnung zieht, u. s. w.

Bemerkenswerth ist hierbei die sehr einfache Gestalt, auf welche sich die zu dieser schärferen Rechnung nöthigen Formeln bringen lassen. Bereits in der von mir im Jahre 1815 herausgegebenen Gelegenheitsschrift: *De computandis occultationibus fixarum per planetas*, §. 15,*) habe ich diese einfachen Formeln zusammengestellt, und wenn ich mir jetzt erlaube auf dieselben zurückzukommen, so geschieht dieses besonders deshalb, weil sie an jenem Orte, wenigstens auf den ersten Blick, nicht die allgemeine Anwendbarkeit zu haben scheinen, deren sie doch fähig sind, und weil sie dort ohne ihre Entwickelung mitgetheilt sind, die ich aber jetzt beifügen werde.

Man betrachte, um zunächst den schärferen Werth von d zu ermitteln, umgekehrt x als eine Function von X, welche für $X = A$, B, C resp. die Werthe a, b, c annimmt. Der irgend einem anderen Werthe von X zukommende Werth von x ist alsdann nach der bekannten von Lagrange gegebenen Interpolationsformel:

$$x = a\frac{(X-B)(X-C)}{(A-B)(A-C)} + b\frac{(X-A)(X-C)}{(B-A)(B-C)} + c\frac{(X-A)(X-B)}{(C-A)(C-B)};$$

und daher, wenn man $X = 0$ setzt, als wofür $x = d$ werden soll:

$$(4)\qquad d = a\frac{BC}{(A-B)(A-C)} + b\frac{AC}{(B-A)(B-C)} + c\frac{AB}{(C-A)(C-B)}.$$

Es hat aber zwischen A, B, C die identische Gleichung statt:

$$(5)\qquad 1 = \frac{BC}{(A-B)(A-C)} + \frac{AC}{(B-A)(B-C)} + \frac{AB}{(C-A)(C-B)}.$$

Diese Gleichung, mit c multiplicirt und von (4) abgezogen, giebt die für die Berechnung von d etwas einfachere Formel:

$$(6)\qquad d = c + (a-c)\frac{BC}{(A-B)(A-C)} + (b-c)\frac{AC}{(B-A)(B-C)},$$

die sich aber noch mehr vereinfachen lässt, wenn man die zwischen a, b, c und A, B bereits obwaltende Relation (1) berücksichtigt. In der That reducirt sich mit dieser Gleichung, die sich auch also schreiben lässt:

---

*) [Seite 355 dieses Bandes.]

$$a - c = (b - c)\frac{A}{B}, \tag{7}$$

die Gleichung (6) auf

$$d = c + (b - c)AC\left[\frac{1}{(A-B)(A-C)} + \frac{1}{(B-A)(B-C)}\right],$$

d. i.

$$d = c + (c - b)\frac{C}{B - C}\cdot\frac{A}{A - C}, \tag{2*}$$

wegen der identischen Gleichung

$$\frac{1}{(A-B)(A-C)} + \frac{1}{(B-A)(B-C)} + \frac{1}{(C-A)(C-B)} = 0 .$$

Wie man sieht, entsteht dieser genauere Werth von d aus dem früheren (2), wenn man das dortige zweite Glied von d noch mit dem Bruche $\frac{A}{A-C}$ multiplicirt, — einem Bruche, der, wegen der Kleinheit von C gegen A, von der Einheit nur wenig verschieden sein wird.

Aehnlicherweise erhält man als fünften Näherungswerth, wenn man dabei nächst den Paaren d und D, c und C noch das Paar b und B in Rechnung zieht:

$$e = d + (d - c)\frac{D}{C - D}\cdot\frac{B}{B - D}. \tag{3*}$$

Indessen wird dieser sich noch verschärfen lassen, wenn man auch noch das erste Paar a und A mit berücksichtigt, und es dürfte, wenn auch nicht um der Praxis willen, doch in theoretischer Hinsicht der Mühe nicht unwerth sein, die deshalb erforderliche Rechnung noch anzustellen.

Zuerst folgt nach Lagrange aus den vier Paaren zusammengehöriger Werthe a und A, ..., d und D, für irgend ein fünftes Paar x und X:

$$x = a\frac{(X-B)(X-C)(X-D)}{(A-B)(A-C)(A-D)} + \ldots + d\frac{(X-A)(X-B)(X-C)}{(D-A)(D-B)(D-C)};$$

mithin für $X = 0$:

$$e = -a\frac{BCD}{(A-B)(A-C)(A-D)} - \ldots - d\frac{ABC}{(D-A)(D-B)(D-C)}. \tag{8}$$

Setzt man hierin $a = b = c = d = e = 1$, so erhält man eine identische Gleichung zwischen A, B, C, D, und es kommt, wenn man dieselbe mit d multiplicirt und von (8) abzieht:

$$(9) \qquad e = d - (a-d)\frac{BCD}{(A-B)(A-C)(A-D)}$$

$$-(b-d)\frac{ACD}{(B-A)(B-C)(B-D)} - (c-d)\frac{ABD}{(C-A)(C-B)(C-D)}\,.$$

Auf ähnliche Art, wie vorhin, wollen wir nun hieraus mittelst der zwischen a, b, c, d bereits stattfindenden Relationen (4) und (2*) die Differenzen $a - d$ und $b - d$ eliminiren.

Von der Gleichung (4) die mit d multiplicirte Gleichung (5) abgezogen bleibt:

$$0 = (a-d)\frac{BC}{(A-B)(A-C)} + (b-d)\frac{AC}{(B-A)(B-C)} + (c-d)\frac{AB}{(C-A)(C-B)}\,.$$

und hiermit reducirt sich (9) auf

$$(10) \qquad e = d + (b-d)\frac{ACD}{(B-C)(A-D)(B-D)} - (c-d)\frac{ABD}{(B-C)(A-D)(C-D)}\,.$$

Ferner ist nach (2*)

$$b - d = b - c + c - d = (c-d)\frac{(B-C)(A-C)}{CA} + (c-d)$$

$$= (c-d)\left[\frac{B}{C} - \frac{B-C}{A}\right],$$

und mit diesem Werthe von $b - d$ verwandelt sich (10) nach leichter Reduction in

$$(3^{**}) \quad e = d + (d-c)\left[\frac{D}{C-D}\cdot\frac{B}{B-D}\cdot\frac{A}{A-D} + \frac{DC}{(B-D)(A-D)}\right],$$

welches die gesuchte Formel ist.

De peculiaribus quibusdam aequationum trigonometricarum affectionibus disquisitio analytica.

Lipsiae, 1815.

Mit handschriftlichem Zusatz aus dem Nachlasse des Verfassers.

Dissertatio quam auctoritate amplissimi Philosophorum Lipsiensium ordinis die XIX. m. aprilis a. MDCCCXV publice defendet Augustus Ferdinandus Moebius, Philos. Dr. Aa. ll. Mag. Socio Augusto Langio, Collmena Fribergae propinqua oriundo jur. stud.

Theses.

I. Nulla datur alia generalis et absoluta potentiarum definitio, nisi quae innititur evolutioni analyticae quantitatis e^x in seriem, e designante basin logarithmorum naturalium.

II. Errant, qui contendunt, logarithmos quantitatum formae a^m aequales esse m-tuplis logarithmis ipsius a.

III. Anguli contactus licet cum angulis rectilineis comparari nequeant, eorumque respectu omnino evanescant, inter se tamen rationes quascunque assignabiles habere possunt.

IV. Doctrina de motu corporum mathesi purae jure annumeratur.

V. False definitur axioma, quod sit enunciatio, quam, simulac perceperis, etiam pro vera agnoscere debeas.

VI. Definitionum divisio in verbales et reales omni caret sensu.

VII. Jurisprudentiae hodie magis prodest solida matheseos quam profunda antiquitatum Romanarum cognitio.

VIII. Haud destituitur argumentis sententia celeber. Jacobi Bernoullii, omnes disciplinas Mathesi indigere, Mathesin nulla, sed per se solam sibi sufficere.

De aequationibus trigonometricis in genere.

§. 1. Mirari aliquis possit, qui acciderit, ut, quum Algebram definierint scientiam, quae valores quantitatum incognitarum ex relationibus inter has aliasque cognitas quantitates intercedentibus generaliter invenire doceat, functionem contra algebraicam quantitatis variabilis vocaverint eam, quae si nihilo aequalis posita fuerit, nonnisi limitatum numerum valorum illius quantitatis admittat. Orta autem est haecce in definitionibus repugnantia ex imbecillitate Algebrae ipsius, quae, dum omnium aequationum solutionem ab initio gloriose promittit, tantummodo ad proprietates sese extendit inquirendas earum, quae finitum radicum habent numerum, atque ne harum quidem generalem solutionis methodum nobis suppeditare valet. Nam etiamsi aequationes, quae ex infinita radicum multitudine sunt constructae, iisdem gaudeant necesse est proprietatibus, quibus illae, quas Algebra tractare solet: verum tamen si leges certae assumuntur locum habere inter radices numero infinitas, — alias enim aequatio ex infinita terminorum multitudine conflata neque concipi neque solvi ullo modo posset, — quantitas incognita necessario involuta obtinebitur transcendentibus functionibus, quae, etiamsi plures earum sublimioris Analyseos ope accuratius sint investigatae, tanta tamen varietate inter se connexae atque complicatae esse possunt, ut de ejusmodi aequationum natura generalius quiddam proponere, Algebrae vires eo, quo nunc versatur, statu longe superare videatur.

Si tamen nihilominus visum fuerit facere periculum, transcendentes simul functiones Algebrae imperio subjiciendi, initium capiendum esse ducimus ab aequationibus trigonometricis, quippe quae tum, quum radices numero quidem infinitae certis tamen legibus obstrictae assumuntur, sponte se nobis offerunt.

Ponendo enim generalem seriei cujusdam terminum $= y = f(x)$, ex quo deducantur singulae aequationis radices, si loco ipsius x

numeri integri successive substituuntur, aequatio inde proditura erit:

(1) $\ldots[y-f(-2)][y-f(-1)][y-f(0)][y-f(1)][y-f(2)]\ldots=0.$

Introducendo jam loco functionis f ejus inversam, quam littera F designabimus, ita ut aequationes

$$y=f(x),\quad F(y)=x$$

pro identicis haberi queant, aequationem (1) sic exhibere licebit:

(2) $\ldots[F(y)+2][F(y)+1]F(y)[F(y)-1][F(y)-2]\ldots=0,$

vel etiam sub hac forma:

$$\pi F(y)\left(1-\frac{\pi F(y)}{\pi}\right)\left(1+\frac{\pi F(y)}{\pi}\right)\left(1-\frac{\pi F(y)}{2\pi}\right)\left(1+\frac{\pi F(y)}{2\pi}\right)\ldots=0,$$

π denotante semiperipheriam circuli, cujus radius unitati aequalis est. Hoc vero productum quum exprimat sinum arcus $\pi F(y)$, aequatio in hanc formam brevissimam redigi poterit:

$$\sin[\pi F(y)]=0.$$

Jam si aequationis radices sunt termini plurium serierum, quarum termini generales vocentur $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ...; fingantur eodem modo, ut antea, singulae aequationes:

$$\sin[\pi F(y)]=0,\quad \sin[\pi F'(y)]=0,\quad \sin[\pi F''(y)]=0,\ \text{etc.}$$

Datas igitur radices omnes singularum aequationum complectitur productum:

$$\sin[\pi F(y)]\sin[\pi F'(y)]\sin[\pi F''(y)]\ldots=0,$$

quod secundum notissima trigonometriae praecepta in hanc tandem formam redigi poterit:

(3) $a\sin Y+b\sin Y'+c\sin Y''+\ldots=0,$

Y, Y', Y'', ... designantibus functiones quantitatis incognitae y, ex prioribus $F(y)$, $F'(y)$, $F''(y)$, ... facile derivandas.

§. 2. Haud abs re erit ad praecedentium illustrationem exempla nonnulla adjecisse.

1) Sit invenienda aequatio, cujus radices constituant seriem arithmeticam hanc:

$$\ldots,\ a-2b,\ a-b,\ a,\ a+b,\ a+2b,\ldots$$

Cujus quum sit terminus generalis

$$y=a+bx,\ \text{habetur illico}\ x=\frac{y-a}{b},$$

ideoque

$$\sin\left(\pi \frac{y-a}{b}\right) = 0$$

quaesita erit aequatio.

2) Sit $y = x^2$; aequationis

$$\sin(\pi \sqrt{y}) = 0$$

radices erunt omnes numeri quadrati: 0, 1, 4, 9, 16, ...

3) Si aequatio esset construenda, cujus radices essent numeri trigonales omnes, haberetur:

$$y = \frac{x \cdot x - 1}{2}, \quad \text{et consequenter} \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8y}}{2} .$$

Hinc aequatio ipsa:

$$\sin \frac{\pi}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + 8y}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{1 + 8y}\right) = 0 .$$

4) Aequatio, cujus radices sunt termini progressionis geometricae, cujus terminus generalis $y = a^x$, erit haec:

$$\sin\left(\pi \frac{ly}{la}\right) = 0 .$$

5) Si propositi sunt radicum termini generales:

$$\frac{x+2}{x}, \quad \frac{x+3}{x}, \quad \frac{x+5}{x},$$

singulae ex iis formabuntur aequationes hae:

$$\sin \frac{2\pi}{1-y} = 0, \quad \sin \frac{3\pi}{1-y} = 0, \quad \sin \frac{5\pi}{1-y} = 0,$$

quarum productum:

$$\sin \frac{10\pi}{1-y} + \sin \frac{6\pi}{1-y} + \sin \frac{4\pi}{1-y} = 0,$$

vel

$$\sin \frac{10\pi y}{1-y} + \sin \frac{6\pi y}{1-y} + \sin \frac{4\pi y}{1-y} = 0,$$

quaesitam nobis exhibebit aequationem.

§. 3. Omnium, quae in forma (3) art. 1 comprehendi possunt, aequationum simplicissimae sane sunt, quarum radices series constituunt arithmeticas. Quum enim ejusmodi aequationes oriantur multiplicatione factorum:

$$\sin \frac{\pi(y-a)}{b}, \quad \sin \frac{\pi(y-a')}{b'}, \quad \sin \frac{\pi(y-a'')}{b''}, \quad \text{etc.}$$

functiones, quas supra litteris Y, Y', Y'', .. designavimus, omnes formam habebunt: $my + A$, ubi m erit quantitas numerica ex combinatione fractionum $\frac{\pi}{b}$, $\frac{\pi}{b'}$, $\frac{\pi}{b''}$, ... per additionem et subtractionem orta, et similiter A ex fractionum $\frac{a\pi}{b}$, $\frac{a'\pi}{b'}$, $\frac{a''\pi}{b''}$, ... combinatione. Ponendo igitur, ut summam adipiscatur aequatio simplicitatem, quantitatum b, b', b'', .. sive exponentium serierum arithmeticarum esse singulum quemvis toti circuli peripheriae aequalem, numerus m vel integer evadet, vel integer unitatis dimidio auctus, prout factorum multitudo est vel par vel impar. Factores autem singuli nanciscentur formas:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \alpha), \quad \sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \beta), \ \ldots$$

si loco ipsius y litteram φ ad arcus circulares designandos magis usitatam introducimus. Generales tandem serierum termini exhiberi poterunt expressionibus:

$$\alpha + 2\varkappa\pi, \quad \beta + 2\varkappa\pi, \quad \ldots$$

in quibus si pro littera $\varkappa$ numeri omnes integri substituuntur, omnes, quae insunt aequationi radices, successive prodibunt.

Atque hae sunt aequationes, quarum proprietates sequentibus hujus libelli paginis accuratius investigare nobis proposuimus. Ut a reliquis distinguantur aequationibus trigonometricis, tribuimus iis nomen periodicarum petitum ex natura radicum, quas intra quosvis numeros aequalibus intervallis $= 2\pi$ a se dissitos eodem semper ordine reverti, ex prioribus facile intelligitur.

De relationibus inter coefficientes atque radices aequationum periodicarum locum tenentibus.

§. 4. Problema. *Evolutionem instituere aequationis periodicae, cujus radices sint:* $\alpha + 2\varkappa\pi$, $\beta + 2\varkappa\pi$, $\gamma + 2\varkappa\pi$, ... $\mu + 2\varkappa\pi$.

Ex antea dictis patet, fore eam productum ex singulis aequationibus

$$\sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \alpha) = 0, \quad \sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \beta) = 0, \quad \ldots \quad \sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \mu) = 0.$$

Restabit igitur, ut evolvatur productum

$$\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\beta)\ldots\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\mu)$$

in seriem secundum sinus vel cosinus multiplorum ipsius $\frac{1}{2}\varphi$ progredientem. Fieri quidem hoc posset successiva applicatione regularum notissimarum de multiplicatione sinuum et cosinuum. Multo tamen commodius et generalius rem ad finem perducendam censuimus in subsidium vocatis quantitatibus imaginariis. Est nimirum, si brevitatis gratia $\sqrt{-1}$ designatur littera i:

$$2i\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\alpha)=\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\alpha)+i\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\alpha)-\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\varphi)-i\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\varphi)$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi+i\sin\frac{1}{2}\varphi}{\cos\frac{1}{2}\alpha+i\sin\frac{1}{2}\alpha}-\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha+i\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\varphi+i\sin\frac{1}{2}\varphi}.$$

Ponendo igitur:

$$\cos\tfrac{1}{2}\varphi+i\sin\tfrac{1}{2}\varphi=x,\qquad \cos\tfrac{1}{2}\alpha+i\sin\tfrac{1}{2}\alpha=\mathfrak{a},$$

eodemque modo

$$\cos\tfrac{1}{2}\beta+i\sin\tfrac{1}{2}\beta=\mathfrak{b},\ \cos\tfrac{1}{2}\gamma+i\sin\tfrac{1}{2}\gamma=\mathfrak{c},\ldots\ \cos\tfrac{1}{2}\mu+i\sin\tfrac{1}{2}\mu=\mathfrak{m},$$

et numerum quantitatum α, β, γ, ... μ aequalem m, erit

$$2^m i^m\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\beta)\ldots\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\mu)=\left(\frac{x}{\mathfrak{a}}-\frac{\mathfrak{a}}{x}\right)\left(\frac{x}{\mathfrak{b}}-\frac{\mathfrak{b}}{x}\right)\cdots\left(\frac{x}{\mathfrak{m}}-\frac{\mathfrak{m}}{x}\right)$$

$$=\frac{x^{2m}-(\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2+\mathfrak{c}^2+..)x^{2m-2}+(\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2+\mathfrak{a}^2\mathfrak{c}^2+\mathfrak{b}^2\mathfrak{c}^2+..)x^{2m-4}-(\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2\mathfrak{c}^2+..)x^{2m-6}+..\pm\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2\mathfrak{c}^2..\mathfrak{m}^2}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}..\mathfrak{m}\,x^m}$$

$$=\frac{x^m}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}..\mathfrak{m}}$$

$$-x^{m-2}\left[\frac{1}{\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}\mathfrak{c}..\mathfrak{m}}+\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c}..\mathfrak{m}}+\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{d}..\mathfrak{m}}+\ldots\right]$$

$$+x^{m-4}\left[\frac{1}{\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c}..\mathfrak{m}}+\frac{1}{\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{d}..\mathfrak{m}}+\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{d}..\mathfrak{m}}+\ldots\right]$$

$$-x^{m-6}\left[\frac{1}{\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{d}..\mathfrak{m}}+\ldots\right]$$

etc. etc.

$$\mp\frac{1}{x^{m-6}}\left[\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{d}..\mathfrak{m}+\ldots\right]$$

$$\pm\frac{1}{x^{m-4}}\left[\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c}..\mathfrak{m}+\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{d}..\mathfrak{m}+\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{d}..\mathfrak{m}+\ldots\right]$$

$$\mp\frac{1}{x^{m-2}}\left[\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}\mathfrak{c}..\mathfrak{m}+\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c}..\mathfrak{m}+\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{d}..\mathfrak{m}+\ldots\right]$$

$$\pm\frac{1}{x^m}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}..\mathfrak{m}$$

$$= \frac{x^m}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}..\mathfrak{m}} \pm \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}..\mathfrak{m}}{x^m}$$

$$- \left[\frac{x^{m-2}}{\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}\mathfrak{c}..\mathfrak{m}} \pm \frac{\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}\mathfrak{c}..\mathfrak{m}}{x^{m-2}}\right] - \left[\frac{x^{m-2}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c}..\mathfrak{m}} \pm \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c}..\mathfrak{m}}{x^{m-2}}\right] - \dots$$

$$+ \left[\frac{x^{m-4}}{\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c}..\mathfrak{m}} \pm \frac{\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c}..\mathfrak{m}}{x^{m-4}}\right] + \left[\frac{x^{m-4}}{\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{d}..\mathfrak{m}} \pm \frac{\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{d}..\mathfrak{m}}{x^{m-4}}\right] + \dots$$

$$- \left[\frac{x^{m-6}}{\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{d}..\mathfrak{m}} \pm \frac{\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{d}..\mathfrak{m}}{x^{m-6}}\right] - \dots$$

$+$ etc.

ubi signa valent superiora, si m est numerus par, inferiora si impar.

Introducendo jam loco ipsorum x, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... $\mathfrak{m}$, quantitates φ, α, β, γ, ... μ, reperietur:

$$2^m i^m \sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \beta)\dots\sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \mu) =$$

$$= \left\{\begin{matrix} \cos\tfrac{1}{2}[m\varphi - (\alpha + \beta + ..\mu)] + i\sin\tfrac{1}{2}[m\varphi - (\alpha + \beta + ..\mu)] \\ \pm\cos\tfrac{1}{2}[\alpha + \beta + .. + \mu - m\varphi] \pm i\sin\tfrac{1}{2}[\alpha + \beta + .. + \mu - m\varphi] \end{matrix}\right\}$$

$$- \left\{\begin{matrix} \cos\tfrac{1}{2}[(m-2)\varphi - (-\alpha + \beta + ..\mu)] + i\sin\tfrac{1}{2}[(m-2)\varphi - (-\alpha + \beta + ..\mu)] \\ \pm\cos\tfrac{1}{2}[-\alpha + \beta + .. + \mu - (m-2)\varphi] \pm i\sin\tfrac{1}{2}[-\alpha + \beta + .. + \mu - (m-2)\varphi] \end{matrix}\right\} - \dots$$

$$+ \left\{\begin{matrix} \cos\tfrac{1}{2}[(m-4)\varphi - (-\alpha - \beta + \gamma + ..\mu)] + i\sin\tfrac{1}{2}[(m-4)\varphi - (-\alpha - \beta + \gamma + ..\mu)] \\ \pm\cos\tfrac{1}{2}[-\alpha - \beta + \gamma + .. + \mu - (m-4)\varphi] \pm i\sin\tfrac{1}{2}[-\alpha - \beta + \gamma + .. + \mu - (m-4)\varphi] \end{matrix}\right\} + \dots$$

$-$ etc. etc.

Hinc ponendo primum m numerum parem $= 2n$, resultabit:

$$\pm 2^{2n-1}\sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \beta)\dots\sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \mu) =$$

$$= \cos[n\varphi - \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + .. + \mu)]$$

$$- \cos[(n-1)\varphi - \tfrac{1}{2}(-\alpha + \beta + .. + \mu)] - \cos[(n-1)\varphi - \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta + .. + \mu)] - \dots$$

$$+ \cos[(n-2)\varphi - \tfrac{1}{2}(-\alpha - \beta + \gamma + .. + \mu)] + \cos[(n-2)\varphi - \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta - \gamma + .. + \mu)] + \dots$$

$$- \cos[(n-3)\varphi - \tfrac{1}{2}(-\alpha - \beta - \gamma + .. + \mu)] - \dots$$

$+$ etc.

$$\mp \cos[\varphi - \tfrac{1}{2}(-\alpha - \beta - .. - \varepsilon + \zeta + .. + \mu)] \mp \dots$$

$$\pm \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}[-\alpha - \beta - .. - \zeta + .. + \mu] \pm \dots \pm \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}[\alpha + \beta + .. + \zeta - .. - \mu].$$

si quantitatum α, β, ... μ $(n-1)^{\text{ta}}$ et n^{ta} vocentur ε, ζ.

Secundo si m assumatur esse numerus impar, et quantitatum α, β, γ, ... μ $\frac{m-1}{2}$ priores sint α, β, ... ε, ζ: simili modo invenietur:

$$\pm 2^{m-1} \sin \tfrac{1}{2}(\varphi - \alpha) \sin \tfrac{1}{2}(\varphi - \beta) \ldots \sin \tfrac{1}{2}(\varphi - \mu) =$$
$$= \sin \tfrac{1}{2}[m\varphi - (\alpha + \beta + \gamma + .. + \mu)]$$
$$- \sin \tfrac{1}{2}[(m-2)\varphi - (-\alpha + \beta + .. + \mu)] - \sin \tfrac{1}{2}[(m-2)\varphi - (\alpha - \beta + .. + \mu)] - \ldots$$
$$+ \sin \tfrac{1}{2}[(m-4)\varphi - (-\alpha - \beta + \gamma + .. + \mu)] + \sin \tfrac{1}{2}[(m-4)\varphi - (-\alpha + \beta - \gamma + .. + \mu)] + \ldots$$
$$- \text{etc.}$$
$$\mp \sin \tfrac{1}{2}[3\varphi - (-\alpha - \beta - .. - \varepsilon + \zeta + .. + \mu)] \mp \ldots$$
$$\pm \sin \tfrac{1}{2}[\varphi - (-\alpha - \beta - .. - \zeta + .. + \mu)] \pm \ldots \pm \sin \tfrac{1}{2}[\varphi - (\alpha + \beta + .. + \zeta + \eta - .. - \mu)].$$

Ponendo igitur

$$\sin \Sigma = \sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + .. + \mu)$$
$$\cos \Sigma = \cos \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + .. + \mu)$$
$$a \sin A = \sin \tfrac{1}{2}(-\alpha + \beta + \gamma + .. + \mu) + \sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma + .. + \mu)$$
$$+ \sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma + .. + \mu) + \ldots$$
$$a \cos A = \cos \tfrac{1}{2}(-\alpha + \beta + \gamma + .. + \mu) + \cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma + .. + \mu)$$
$$+ \cos \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma + .. + \mu) + \ldots$$
$$b \sin B = \sin \tfrac{1}{2}(-\alpha - \beta + \gamma + .. + \mu) + \sin \tfrac{1}{2}(-\alpha + \beta - \gamma + .. + \mu)$$
$$+ \sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta - \gamma + .. + \mu) + \ldots$$
$$b \cos B = \cos \tfrac{1}{2}(-\alpha - \beta + \gamma + .. + \mu) + \cos \tfrac{1}{2}(-\alpha + \beta - \gamma + .. + \mu)$$
$$+ \cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta - \gamma + .. + \mu) + \ldots$$
$$c \sin C = \sin \tfrac{1}{2}(-\alpha - \beta - \gamma + .. + \mu) + \ldots$$
$$c \cos C = \cos \tfrac{1}{2}(-\alpha - \beta - \gamma + .. + \mu) + \ldots$$

vel, quod eodem redit:

$$a \sin(\Sigma - A) = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \ldots + \sin\mu$$
$$a \cos(\Sigma - A) = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \ldots + \cos\mu$$
$$b \sin(\Sigma - B) = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + \gamma) + \sin(\beta + \gamma) + \ldots$$
$$b \cos(\Sigma - B) = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \gamma) + \cos(\beta + \gamma) + \ldots$$
$$c \sin(\Sigma - C) = \sin(\alpha + \beta + \gamma) + \ldots$$
$$c \cos(\Sigma - C) = \cos(\alpha + \beta + \gamma) + \ldots$$

etc. etc.

$$e \sin(\Sigma - E) = \sin(\alpha + \beta + \gamma + .. + \varepsilon) + \ldots$$
$$e \cos(\Sigma - E) = \cos(\alpha + \beta + \gamma + .. + \varepsilon) + \ldots$$

eoque in casu, quo m est numerus impar:

$$f\sin(\Sigma - F) = \sin(\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\zeta)+\cdots,$$

$$f\cos(\Sigma - F) = \cos(\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\zeta)+\cdots,$$

quo vero m est numerus par:

$$f\sin\Sigma = \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\zeta)+\cdots+\frac{1}{2}\sin(\eta+\cdots+\mu),$$

$$f\cos\Sigma = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\zeta)+\cdots+\frac{1}{2}\cos(\eta+\cdots+\mu),$$

aequatio quaesita alterutra harum formarum exhiberi poterit:

$$(\odot)\quad \cos[n\varphi-\Sigma] - a\cos[(n-1)\varphi - A] + b\cos[(n-2)\varphi - B] - \cdots \mp e\cos[\varphi - E] \pm f = 0\,.$$

$$(☾)\quad \sin[\tfrac{1}{2}m\varphi-\Sigma] - a\sin[\tfrac{1}{2}(m-2)\varphi - A] + b\sin[\tfrac{1}{2}(m-4)\varphi - B] - \cdots \mp e\sin[\tfrac{3}{2}\varphi - E] \pm f\sin[\tfrac{1}{2}\varphi - F] = 0\,,$$

prouti m est vel numerus par $= 2n$, vel impar.

§. 5. Theorema. *Quaevis functio ipsius φ sub una vel altera formarum* ($\odot$), (☾) *contenta resolvi potest, et unico quidem modo, in tot factores formae* $\sin\frac{1}{2}(\varphi-\alpha)$, $\sin\frac{1}{2}(\varphi-\beta)$, ... *quot summus ipsius φ coefficiens duplicatus continet unitates.*

Posito enim, uti antea:

$$\cos\tfrac{1}{2}\varphi + i\sin\tfrac{1}{2}\varphi = x,\ \cos\tfrac{1}{2}\alpha + i\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \mathfrak{a},\ \cos\tfrac{1}{2}\beta + i\sin\tfrac{1}{2}\beta = \mathfrak{b},\ldots$$

et praeterea

$$\cos\Sigma + i\sin\Sigma = \mathfrak{S},\quad \cos A + i\sin A = \mathfrak{A},\quad \cos B + i\sin B = \mathfrak{B},\ldots$$

$$\cos E + i\sin E = \mathfrak{E}\,,$$

ut a priori forma ($\odot$) faciamus initium, demonstrandum erit, functionem ipsius x

$$\frac{x^{2n}}{\mathfrak{S}} + \frac{\mathfrak{S}}{x^{2n}} - a\left(\frac{x^{2n-2}}{\mathfrak{A}} + \frac{\mathfrak{A}}{x^{2n-2}}\right) + b\left(\frac{x^{2n-4}}{\mathfrak{B}} + \frac{\mathfrak{B}}{x^{2n-4}}\right) - \cdots$$

$$\mp e\left(\frac{x^2}{\mathfrak{E}} + \frac{\mathfrak{E}}{x^2}\right) \pm 2f$$

spectari posse tanquam productum ex $2n$ factoribus

$$\pm\left(\frac{x}{\mathfrak{a}} - \frac{\mathfrak{a}}{x}\right)\left(\frac{x}{\mathfrak{b}} - \frac{\mathfrak{b}}{x}\right)\cdots\left(\frac{x}{\mathfrak{m}} - \frac{\mathfrak{m}}{x}\right),$$

sive multiplicata utraque expressione per x^{2n}, esse

$$\frac{1}{\mathfrak{S}}x^{4n} - \frac{a}{\mathfrak{A}}x^{4n-2} + \frac{b}{\mathfrak{B}}x^{4n-4} - \ldots + b\mathfrak{B}x^4 - a\mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{S} =$$
$$= \pm\frac{(x^2-\mathfrak{a}^2)(x^2-\mathfrak{b}^2)\ldots(x^2-\mathfrak{m}^2)}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\ldots\mathfrak{m}},$$

seu, cum exinde sequatur $\mathfrak{S} = \pm\mathfrak{a}\mathfrak{b}\ldots\mathfrak{m}$, seriem

$$x^{4n} - \mathfrak{S}\frac{a}{\mathfrak{A}}x^{4n-2} + \mathfrak{S}\frac{b}{\mathfrak{B}}x^{4n-4} - \ldots + \mathfrak{S}b\mathfrak{B}x^4 - \mathfrak{S}a\mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{S}^2$$

unico tantum modo resolvi posse in $2n$ factores:

$$(x^2-\mathfrak{a}^2)(x^2-\mathfrak{b}^2)\ldots(x^2-\mathfrak{m}^2).$$

Hoc vero ex elementis Algebrae certissime constat.

Similibus plane ratiociniis alterius quoque formae ($\mathfrak{C}$) in factores resolutio demonstrabitur.

§. 6. Theorema. *Si positis* $\sin\Sigma$, $\cos\Sigma$, $a\sin A$, $a\cos A,\ldots,f$, $\sin\Sigma'$, $\cos\Sigma'$, $a'\sin A'$, $a'\cos A',\ldots f'$ *invariabilibus, pro quovis ipsius* φ *valore habeatur*:

$$\cos[n\varphi-\Sigma] - a\cos[(n-1)\varphi - A] + \ldots \pm f =$$
$$= \cos[n\varphi-\Sigma'] - a'\cos[(n-1)\varphi - A'] + \ldots \pm f',$$

erit:

$$\sin\Sigma = \sin\Sigma', \quad \cos\Sigma = \cos\Sigma', \quad a\sin A = a'\sin A',$$
$$a\cos A = a'\cos A', \quad \ldots \quad f = f'.$$

Ponendo iterum

$$\cos\tfrac{1}{2}\varphi + i\sin\tfrac{1}{2}\varphi = x, \quad \cos\Sigma + i\sin\Sigma = \mathfrak{S}, \quad \cos A + i\sin A = \mathfrak{A},\ldots$$
$$\cos\Sigma' + i\sin\Sigma' = \mathfrak{S}', \quad \cos A' + i\sin A' = \mathfrak{A}', \ldots$$

substitutione rite peracta aequatio periodica in propositione occurrens mutabitur in sequentem:

$$\frac{x^{4n}}{\mathfrak{S}} - \frac{a}{\mathfrak{A}}x^{4n-2} + \ldots - a\mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{S} = \frac{x^{4n}}{\mathfrak{S}'} - \frac{a'}{\mathfrak{A}'}x^{4n-2} + \ldots - a'\mathfrak{A}'x^2 + \mathfrak{S}',$$

unde secundum notissimum Analyseos ratiocinium concluditur fore:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}', \quad \frac{a}{\mathfrak{A}} = \frac{a'}{\mathfrak{A}'}, \quad a\mathfrak{A} = a'\mathfrak{A}', \ldots$$

ideoque aut

$$a = a' \quad \text{et} \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}',$$

aut

$$a = -a' \quad \text{et} \quad \mathfrak{A} = -\mathfrak{A}'.$$

Ex aequalitate vero ipsorum $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ colligitur

$$\cos\Sigma - \cos\Sigma' = i(\sin\Sigma' - \sin\Sigma),$$

et utraque parte aequationis elevata ad quadratum levique adhibita transpositione:

$$1 = \cos(\Sigma' - \Sigma)\,; \quad \text{ergo} \quad \Sigma' = \Sigma + 2\varkappa\pi\,.$$

et dehinc

$$\sin\Sigma = \sin\Sigma', \quad \cos\Sigma = \cos\Sigma'\,.$$

Simili modo aequationes

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \quad \text{vel} \quad \mathfrak{A} = -\mathfrak{A}'$$

dabunt

$$\cos A = \cos A', \qquad \sin A = \sin A'$$

vel

$$\cos A = -\cos A', \quad \sin A = -\sin A'\,.$$

et consequenter

$$a\sin A = a'\sin A', \quad a\cos A = a'\cos A',$$

etc. Id ipsum theorema etiam valere, si loco formae (☉) ponatur altera (☾), iisdem prorsus argumentis evincetur.

§. 7. Praestructis his de aequationibus periodicis theorematis, eodem modo ut in theoria aequationum algebraicarum demonstrari etiam poterunt sequentia:

Si α est una radicum aequationis periodicae, ea per $\sin\frac{1}{2}(\varphi - \alpha)$ *divisibilis sit, necesse est;*

et vice versa:

Si una vel altera expressionum (☉), (☾) *divisibilis est per* $\sin\frac{1}{2}(\varphi - \alpha)$, *ea ad nihilum redigetur, si loco ipsius φ ponitur α.*

Horum igitur ulteriorem hoc loco attulisse explicationem superfluum omnino judicavimus.

Divisio autem ipsa aequationis periodicae per $\sin\frac{1}{2}(\varphi - \alpha)$, si α una radicum supponitur, quomodo commodissime possit institui, pluribus jamjam videamus. Et primum quidem manifestum est, quum numerus seriërum $\alpha + 2\varkappa\pi$, $\beta + 2\varkappa\pi$, ... $\mu + 2\varkappa\pi$ per divisionem evadat una minor, eamque ob caussam ex impari reddatur par, ex pari vero impar, aequationem ex una formarum (☉), (☾) in alteram peracta divisione abituram. Quodsi igitur quantitates Σ', $a'\sin A'$, $a'\cos A'$, $b'\sin B'$, $b'\cos B'$, ... eadem ratione ex radicibus β, γ, δ, ... derivatae ponuntur, qua supra Σ, $a\sin A$, $a\cos A$, $b\sin B$, $b\cos B$, ... ex radicibus α, β, γ, δ, ... componendas esse docuimus, aequatio

$$\cos[n\varphi - \Sigma] - a\cos[(n-1)\varphi - A] + b\cos[(n-2)\varphi - B] - \ldots = 0 \quad (1)$$

divisa per $\sin\frac{1}{2}(\varphi - \alpha)$ formam adipiscetur sequentem:

$$\sin[\tfrac{1}{2}(2n-1)\varphi - \Sigma'] - a'\sin[\tfrac{1}{2}(2n-3)\varphi - A'] + b'\sin[\tfrac{1}{2}(2n-5)\varphi - B'] - \ldots = 0. \quad (2)$$

et eodem modo aequatio, ubi m est numerus impar,

$$\sin[\tfrac{1}{2}m\varphi - \Sigma] - a\sin[\tfrac{1}{2}(m-2)\varphi - A] + b\sin[\tfrac{1}{2}(m-4)\varphi - B] - \ldots = 0, \quad (3)$$

si dividatur per $\sin\frac{1}{2}(\varphi - \alpha)$ transibit in hanc:

$$\cos[\tfrac{1}{2}(m-1)\varphi - \Sigma'] - a'\cos[\tfrac{1}{2}(m-3)\varphi - A'] + b'\cos[\tfrac{1}{2}(m-5)\varphi - B'] - \ldots = 0. \quad (4)$$

Jam ut relationes detegantur, quibus incognitae adhuc quantitates Σ', $a'\sin A'$, $a'\cos A'$, ... ex datis α, Σ, $a\sin A$, $a\cos A$, ... possint determinari, multiplicetur quotiens forma datus per divisorem. Quo facto erit

$$\begin{aligned} -2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \alpha)\Big[\sin[\tfrac{1}{2}(2n-1)\varphi - \Sigma'] - a'\sin[\tfrac{1}{2}(2n-3)\varphi - A'] + \\ + b'\sin[\tfrac{1}{2}(2n-5)\varphi - B'] - \ldots\Big] = \\ = \cos[n\varphi - \Sigma' - \tfrac{1}{2}\alpha] - \cos[(n-1)\varphi - \Sigma' + \tfrac{1}{2}\alpha] \\ - a'\cos[(n-1)\varphi - A' - \tfrac{1}{2}\alpha] + a'\cos[(n-2)\varphi - A' + \tfrac{1}{2}\alpha] \\ + b'\cos[(n-2)\varphi - B' - \tfrac{1}{2}\alpha] - \ldots, \end{aligned}$$

quod quum congruere debeat cum aequatione prius supposita:

$$\cos[n\varphi - \Sigma] - a\cos[(n-1)\varphi - A] + b\cos[(n-2)\varphi - B] - \ldots = 0,$$

instituta comparatione secundum art. 6, sequentes prodibunt relationes:

$$\begin{aligned} \sin\Sigma &= \sin(\Sigma' + \tfrac{1}{2}\alpha) \\ \cos\Sigma &= \cos(\Sigma' + \tfrac{1}{2}\alpha) \\ a\sin A &= \sin(\Sigma' - \tfrac{1}{2}\alpha) + a'\sin(A' + \tfrac{1}{2}\alpha) \\ a\cos A &= \cos(\Sigma' - \tfrac{1}{2}\alpha) + a'\cos(A' + \tfrac{1}{2}\alpha) \\ b\sin B &= a'\sin(A' - \tfrac{1}{2}\alpha) + b'\sin(B' + \tfrac{1}{2}\alpha) \\ b\cos B &= a'\cos(A' - \tfrac{1}{2}\alpha) + b'\cos(B' + \tfrac{1}{2}\alpha) \end{aligned} \quad (5)$$

eademque ratione

$$\begin{aligned} c\sin C &= b'\sin(B' - \tfrac{1}{2}\alpha) + c'\sin(C' + \tfrac{1}{2}\alpha) \\ c\cos C &= b'\cos(B' - \tfrac{1}{2}\alpha) + c'\cos(C' + \tfrac{1}{2}\alpha) \\ \text{etc.} & \qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Ex his vero, ope lemmatis ex primis trigonometriae elementis petiti, si fuerit:

$$o = p \sin P + q \sin Q + \ldots + z \sin Z\,,$$

et simul

$$o = p \cos P + q \cos Q + \ldots + z \cos Z\,.$$

quod in posterum hoc modo breviter indicasse licebit:

$$o = p \operatorname{sc} P + q \operatorname{sc} Q + \ldots + z \operatorname{sc} Z\,,$$

fore tunc etiam

$$o = p \operatorname{sc}(P + \omega) + q \operatorname{sc}(Q + \omega) + \ldots + z \operatorname{sc}(Z + \omega)\,.$$

quemcunque ω teneat valorem; hoc, inquam, lemmate facili negotio deducentur determinationes sequentes:

$$\operatorname{sc}\Sigma' = \operatorname{sc}(\Sigma - \tfrac{1}{2}\alpha)$$

$$(6)\quad \begin{aligned} a' \operatorname{sc} A' &= a \operatorname{sc}(A - \tfrac{1}{2}\alpha) - \operatorname{sc}(\Sigma - \tfrac{3}{2}\alpha) \\ b' \operatorname{sc} B' &= b \operatorname{sc}(B - \tfrac{1}{2}\alpha) - a \operatorname{sc}(A - \tfrac{3}{2}\alpha) + \operatorname{sc}(\Sigma - \tfrac{5}{2}\alpha) \\ c' \operatorname{sc} C' &= c \operatorname{sc}(C - \tfrac{1}{2}\alpha) - b \operatorname{sc}(B - \tfrac{3}{2}\alpha) + a \operatorname{sc}(A - \tfrac{5}{2}\alpha) - \operatorname{sc}(\Sigma - \tfrac{7}{2}\alpha) \end{aligned}$$

etc. etc.

His igitur valoribus in aequationibus (2) vel (4) substitutis, quaesiti quotientes illico obtinebuntur. Caeterum easdem prodituras fuisse relationes, si aequationem (4) per $2 \sin\frac{1}{2}(\varphi - \alpha)$ multiplicatam comparassemus aequationi (3), et rei ratio suadet et calculi probabunt.

De singularibus quibusdam formis aequationum periodicarum.

§. 8. Problema. *Invenire formam aequationis periodicae, cujus radicum binae sibi sint aequales et oppositae.*

Posita una radicum $= \alpha$, altera erit $= -\alpha$, eodemque modo caeterae per $\beta, -\beta, \gamma, -\gamma \ldots$ exprimi poterunt. Quaesita igitur aequatio orietur multiplicatione factorum numero parium:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \alpha) \sin\tfrac{1}{2}(\varphi + \alpha) \sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \beta) \sin\tfrac{1}{2}(\varphi + \beta) \sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \gamma) \sin\tfrac{1}{2}(\varphi + \gamma) \ldots$$

Cujus producti quum valor non mutetur, si ubique loco $+\varphi$ scribatur $-\varphi$, ejus evolutio eadem proprietate gaudeat, necesse est. Evolutio igitur ipsius posita

$$= \cos[n\varphi - \Sigma] - a\cos[(n-1)\varphi - A] + b\cos[(n-2)\varphi - B] - \ldots \pm f$$

etiam debebit esse

$$= \cos[n\varphi + \Sigma] - a\cos[(n-1)\varphi + A] + b\cos[(n-2)\varphi + B] - \ldots \pm f,$$

unde secundum art. 6 concluditur fore:

$$\sin\Sigma = -\sin\Sigma, \quad a\sin A = -a\sin A, \quad b\sin B = -b\sin B, \ \ldots$$

ideoque

$$\sin\Sigma = 0, \quad a = 0 \text{ vel } \sin A = 0, \quad b = 0 \text{ vel } \sin B = 0, \quad \text{etc.}$$

Aequationis igitur quaesitae forma erit:

$$\cos n\varphi - a\cos(n-1)\varphi + b\cos(n-2)\varphi - \ldots \pm f = 0 .$$

§. 9. Problema. *Invenire aequationem periodicam, cujus radices sint:*

$$\alpha + 2\varkappa\pi, \ \alpha + \frac{2\pi}{p} + 2\varkappa\pi, \ \alpha + \frac{4\pi}{p} + 2\varkappa\pi, \ldots \alpha + \frac{2(p-1)\pi}{p} + 2\varkappa\pi,$$

p designante datum numerum integrum.

Manifestum est, radices omnes unicam constituere seriem arithmeticam, cujus terminus generalis $= \alpha + \frac{2\varkappa\pi}{p}$; hinc secundum art. 2, (1) quaesita aequatio erit:

$$\sin\frac{1}{2}p(\varphi - \alpha) = 0 .$$

Corollarium. Quia radices

$$\alpha + 2\varkappa\pi, \quad \alpha + \frac{2\pi}{p} + 2\varkappa\pi, \ldots, \quad \alpha + \frac{2(p-1)\pi}{p} + 2\varkappa\pi,$$

quas omnes inter se diversas esse facile apparet, suppeditant respective aequationes:

$$\sin\frac{1}{2}(\varphi - \alpha) = 0, \ \sin\frac{1}{2}\left(\varphi - \alpha - \frac{2\pi}{p}\right) = 0, \ldots, \ \sin\frac{1}{2}\left(\varphi - \alpha - \frac{2(p-1)\pi}{p}\right) = 0,$$

sequitur, $\sin\frac{1}{2}p(\varphi - \alpha)$ per singulum quemvis sinuum: $\sin\frac{1}{2}(\varphi - \alpha), \ldots$ $\sin\frac{1}{2}\left(\varphi - \alpha - \frac{2(p-1)\pi}{p}\right)$ dividi posse et simul per eorum productum, ita ut ponere liceat:

$$\sin\tfrac{1}{2}p(\varphi-\alpha) =$$

$$A\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}\left(\varphi-\alpha-\frac{2\pi}{p}\right)\ldots\sin\tfrac{1}{2}\left(\varphi-\alpha-\frac{2(p-1)\pi}{p}\right),$$

A denotante factorem numericum, qui ex art. 4 invenitur

$$= \pm 2^{p-1}\text{*)}.$$

§. 10. Problema. *Investigare naturam radicum, quae continentur aequationibus hujus formae:*

(1) $a - b\cos(p\varphi - B) + c\cos(2p\varphi - C) - d\cos(3p\varphi - D) \pm \ldots = 0$,

(2) $\sin(\tfrac{1}{2}p\varphi - A) - b\sin(\tfrac{3}{2}p\varphi - B) + c\sin(\tfrac{5}{2}p\varphi - C) \mp \ldots = 0$,

p designante datum numerum integrum.

Ex art. 5 perspicitur, utramvis earum resolvi posse in factores formae:

$$\sin\tfrac{1}{2}(p\varphi-\alpha) = \sin\tfrac{1}{2}p\left(\varphi-\frac{\alpha}{p}\right).$$

Quum vero aequationis $\sin\tfrac{1}{2}p\left(\varphi-\frac{\alpha}{p}\right)=0$ radices, uti articulo praecedenti vidimus, seriem efficiant arithmeticam, cujus exponens $=\frac{2\pi}{p}$, sequitur, radices omnes aequationis (1) vel (2) fore terminos tot ejusmodi serierum, quot summus ipsius $p\varphi$ coefficiens duplicatus continet unitates.

§. 11. Problema. *Ex datis coefficientibus aequationis periodicae, cujus radices sint:*

$$\alpha+2\varkappa\pi,\quad \beta+2\varkappa\pi,\ \ldots,\quad \mu+2\varkappa\pi,$$

invenire coefficientes alius, cujus radices habeantur:

$$p\alpha+2\varkappa\pi,\quad p\beta+2\varkappa\pi,\ \ldots,\quad p\mu+2\varkappa\pi,$$

p designante datum numerum integrum.

Data igitur aequatio producetur multiplicatione sinuum:

(1) $$\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\beta)\ldots\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\mu),$$

quaesita vero, sinuum

*) Eadem formula legitur in Euleri *Introd. in anal. infin.* Tom. I. cap. 14. §. 240, quo in capite et multae aliae relationes maxime memorabiles et nostram in caussam trahendae occurrunt.

$$\sin\tfrac{1}{2}(\psi - p\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\psi - p\beta)\ldots\sin\tfrac{1}{2}(\psi - p\mu)\,. \tag{2}$$

Liquet autem ex art. 9, $\sin\frac{1}{2}(\psi - p\alpha)$ resolvi posse in factores:

$$\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\psi}{p} - \alpha\right)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\psi}{p} - \alpha - \frac{2\pi}{p}\right)\ldots\sin\frac{1}{2}\left(\psi - \alpha - \frac{2(p-1)\pi}{p}\right).$$

Reliquis igitur factoribus $\sin\frac{1}{2}(\psi - p\beta)$, ... $\sin\frac{1}{2}(\psi - p\mu)$ similiter resolutis, productum (2) in hunc modum poterit transformari:

$$\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\psi}{p} - \alpha\right)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\psi}{p} - \beta\right)\ldots\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\psi}{p} - \mu\right)$$

$$\times\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\psi}{p} - \alpha - \frac{2\pi}{p}\right)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\psi}{p} - \beta - \frac{2\pi}{p}\right)\ldots\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\psi}{p} - \mu - \frac{2\pi}{p}\right)$$

etc. etc.

$$\times\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\psi}{p} - \alpha - \frac{2(p-1)\pi}{p}\right)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\psi}{p} - \beta - \frac{2(p-1)\pi}{p}\right)\cdots\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\psi}{p} - \mu - \frac{2(p-1)\pi}{p}\right),$$

cujus producti quum qui in singulis lineis horizontalibus occurrunt factores obtineantur, si in (1) loco ipsius φ successive substituantur $\frac{\psi}{p}$, $\frac{\psi}{p} - \frac{2\pi}{p}$, ... $\frac{\psi}{p} - \frac{2(p-1)\pi}{p}$, iisdem valoribus pro φ in aequatione data substitutis, omnium aequationum hoc modo confectarum productum quaesitam aequationem exhibebit.

Ut rem exemplis illustremus, sit

1) ex datis coefficientibus aequationis

$$\cos(\varphi - \Sigma) - a = 0\,,$$

cujus radices $\alpha + 2\varkappa\pi$, $\beta + 2\varkappa\pi$ incognitae adhuc supponuntur, derivanda aequatio, cujus radices: $3\alpha + 2\varkappa\pi$, $3\beta + 2\varkappa\pi$.

Habebitur ergo aequatio

$$0 = \sin\tfrac{1}{2}(\psi - 3\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\psi - 3\beta)\,,$$

sive

$$0 = \sin\frac{1}{2}\left(\frac{\psi}{3} - \alpha\right)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\psi}{3} - \beta\right)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\psi}{3} - \alpha - \frac{2\pi}{3}\right)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\psi}{3} - \beta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\times\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\psi}{3} - \alpha - \frac{4\pi}{3}\right)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\psi}{3} - \beta - \frac{4\pi}{3}\right),$$

et quum aequatio $\cos(\varphi - \Sigma) - a = 0$ aequivaleat isti:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \beta) = 0\,,$$

quaesita formula erit productum ex factoribus:

$$\left[\cos\left(\frac{\psi}{3}-\Sigma\right)-a\right]\left[\cos\left(\frac{\psi}{3}-\frac{2}{3}\pi-\Sigma\right)-a\right]\left[\cos\left(\frac{\psi}{3}-\frac{4}{3}\pi-\Sigma\right)-a\right] ,$$

quod reapse evolutum sequentem nobis suppeditat aequationem:

$$\cos(\psi-3\Sigma)-4a^3+3a=0 .$$

2) Aequatio, cujus radices $2\alpha+2\varkappa\pi$, $2\beta+2\varkappa\pi$, $2\gamma+2\varkappa\pi$, $2\delta+2\varkappa\pi$, positis $\alpha+2\varkappa\pi$, $\beta+2\varkappa\pi$, $\gamma+2\varkappa\pi$, $\delta+2\varkappa\pi$ radicibus aequationis

$$\cos(2\varphi-\Sigma)-a\cos(\varphi-A)+b=0 ,$$

invenietur haec:

$$[\cos(\psi-\Sigma)-a\cos(\tfrac{1}{2}\psi-A)+b][\cos(\psi-\Sigma)+a\cos(\tfrac{1}{2}\psi-A)+b]=0 ,$$

sive multiplicatione revera peracta:

$$\cos(2\psi-2\Sigma)-a^2\cos(\psi-2A)+4b\cos(\psi-\Sigma)+2b^2-a^2+1=0 .$$

§. 12. Coefficientes aequationis, cui insunt radices $p\alpha+2\varkappa\pi$, $p\beta+2\varkappa\pi,\ldots$ designentur per

$$\sin\Sigma_{,},\ \cos\Sigma_{,},\ a_{,}\sin A_{,},\ a_{,}\cos A_{,},\ b_{,}\sin B_{,},\ b_{,}\cos B_{,},\ldots$$

qui quomodo ex datis coefficientibus

$$\sin\Sigma,\ \cos\Sigma,\ a\sin A,\ a\cos A,\ b\sin B,\ b\cos B,\ldots$$

aequationis, cujus radices sunt $\alpha+2\varkappa\pi$, $\beta+2\varkappa\pi,\ldots$ inveniri possint, articulo praecedenti clare ostendimus. Jam quum sit (art. 4):

$$a\,\mathrm{sc}(\Sigma-A)=\mathrm{sc}\,\alpha+\mathrm{sc}\,\beta+\mathrm{sc}\,\gamma+\ldots ,$$

$$b\,\mathrm{sc}(\Sigma-B)=\mathrm{sc}(\alpha+\beta)+\mathrm{sc}(\alpha+\gamma)+\ldots ,$$

etc. etc.

eademque ratione

$$a_{,}\mathrm{sc}(\Sigma_{,}-A_{,})=\mathrm{sc}\,p\alpha+\mathrm{sc}\,p\beta+\mathrm{sc}\,p\gamma+\ldots ,$$

$$b_{,}\mathrm{sc}(\Sigma_{,}-B_{,})=\mathrm{sc}\,p(\alpha+\beta)+\mathrm{sc}\,p(\alpha+\gamma)+\ldots ,$$

etc. etc.

solutione problematis praecedentis simul nacti sumus methodum, ex datis summis, qui conficiuntur sinubus et cosinubus plurium quantitatum earumque binionum, ternionum etc., easdem summas pro aequimultiplis istarum quantitatum derivandi.

Instituta v. g. comparatione aequationum

$$\cos(2\psi - 2\Sigma) - a^2\cos(\psi - 2A) + 4b\cos(\psi - \Sigma) + 2b^2 - a^2 + 1 = 0,$$

$$\cos(2\psi - \Sigma_{,}) - a_{,}\cos(\psi - A_{,}) + b_{,} = 0\ ,$$

resultabunt relationes sequentes:

$$\sin\Sigma_{,} = \sin 2\Sigma\ ,\quad \cos\Sigma_{,} = \cos 2\Sigma\ ,$$

$$a_{,}\sin A_{,} = a^2\sin 2A - 4b\sin\Sigma\ ,$$

$$a_{,}\cos A_{,} = a^2\cos 2A - 4b\cos\Sigma\ ,$$

$$b_{,} = 2b^2 - a^2 + 1\ ,$$

quas ope lemmatis art. 7 commemorati sic transformare licebit:

$$a_{,}\sin(\Sigma_{,} - A_{,}) = a^2\sin 2(\Sigma - A) - 4b\sin\Sigma$$

$$= 2\,.\,a\sin(\Sigma - A)\,.\,a\cos(\Sigma - A) - 4b\sin\Sigma\ ,$$

$$a_{,}\cos(\Sigma_{,} - A_{,}) = a^2\cos 2(\Sigma - A) - 4b\cos\Sigma$$

$$= [a\cos(\Sigma - A)]^2 - [a\sin(\Sigma - A)]^2 - 4b\cos\Sigma\ ,$$

$$b_{,}\sin\Sigma_{,} = 2b^2\sin 2\Sigma + (1 - a^2)\sin 2\Sigma$$

$$= 4\,.\,b\sin\Sigma\,.\,b\cos\Sigma + \left(1 - [a\sin(\Sigma - A)]^2 - [a\cos(\Sigma - A)]^2\right)\sin 2\Sigma,$$

$$b_{,}\cos\Sigma_{,} = 2b^2\cos 2\Sigma + (1 - a^2)\cos 2\Sigma$$

$$= 2(b\cos\Sigma)^2 - 2(b\sin\Sigma)^2 + \left(1 - [a\sin(\Sigma - A)]^2 - [a\cos(\Sigma - A)]^2\right)\cos 2\Sigma.$$

Hinc introductis quantitatibus α, β, γ, δ obtinebimus tandem:

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma + \sin 2\delta =$$

$$= 2[\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta][\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta]$$

$$- 2[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+\gamma) + \sin(\alpha+\delta) + \sin(\beta+\gamma) + \sin(\beta+\delta) + \sin(\gamma+\delta)],$$

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma + \cos 2\delta =$$

$$= [\cos\alpha + \cos\beta + ..]^2 - [\sin\alpha + \sin\beta + ..]^2 - 2[\cos(\alpha + \beta) + ..]\ ,$$

$$\sin 2(\alpha + \beta) + \ldots = 2[\sin(\alpha + \beta) + ..][\cos(\alpha + \beta) + ..]$$

$$+ 2[1 - (\sin\alpha + \sin\beta + ..)^2 - (\cos\alpha + \cos\beta + ..)^2]\sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta),$$

$$\cos 2(\alpha + \beta) + \ldots = [\cos(\alpha + \beta) + ..]^2 - [\sin(\alpha + \beta) + ..]^2$$

$$+ 2[1 - (\sin\alpha + \sin\beta + ..)^2 - (\cos\alpha + \cos\beta + ..)^2]\cos(\alpha + \beta + \gamma + \delta)\ .$$

§. 13. Ponendo, ut jam supra factum est:

$$\cos\tfrac{1}{2}\varphi + i\sin\tfrac{1}{2}\varphi = x, \quad \cos\tfrac{1}{2}\alpha + i\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \mathfrak{a}.$$

et praeterea

$$\cos\tfrac{1}{2}\psi + i\sin\tfrac{1}{2}\psi = y,$$

habemus

$$2i\sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \alpha = \frac{x}{\mathfrak{a}} - \frac{\mathfrak{a}}{x}, \quad 2i\sin\tfrac{1}{2}(\psi - p\alpha) = \frac{y}{\mathfrak{a}^p} - \frac{\mathfrak{a}^p}{y}:$$

unde facile colligitur, problema art. 11 tractatum nonnisi forma differre a problemate illo notissimo in algebraicarum aequationum theoria, quod aequationem invenire postulat pro p-tis datae alius aequationis radicum potentiis. Aderit ergo etiam methodus hujus problematis solutioni inserviens similis plane illi, quam exposuimus art. 11 pro aequationibus periodicis. Nimirum si sint aequationis algebraicae datae radices $a, b, c, \ldots$, quaesitae vero $a^p, b^p, c^p, \ldots$, illa multiplicatione factorum $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots$, haec factorum $(y-a^p)(y-b^p)(y-c^p)\ldots$ orietur. Jam vero quum sit $y - a^p$ resolubilis in p factores

$$y^{\frac{1}{p}} - a, \quad y^{\frac{1}{p}} - a\left(\cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p}\right), \quad y^{\frac{1}{p}} - a\left(\cos\frac{4\pi}{p} + i\sin\frac{4\pi}{p}\right) \ldots$$

$$y^{\frac{1}{p}} - a\left(\cos\frac{2(p-1)\pi}{p} + i\sin\frac{2(p-1)\pi}{p}\right),$$

ponantur successive in aequatione data

$$y^{\frac{1}{p}}, \quad \frac{y^{\frac{1}{p}}}{\cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p}} = y^{\frac{1}{p}}\left(\cos\frac{2\pi}{p} - i\sin\frac{2\pi}{p}\right), \ldots$$

$$y^{\frac{1}{p}}\left(\cos\frac{2(p-1)\pi}{p} - i\sin\frac{2(p-1)\pi}{p}\right),$$

loco ipsius x; quo facto omnium, quae sic prodierunt, aequationum productum quaesita erit aequatio.

Idcirco etiam hoc modo poterunt ex summa quotvis datarum quantitatum earumque binionum, ternionum, etc. summis independenter derivari summae earundem combinationum pro p-tis illarum quantitatum potentiis. Quum vero, si tantummodo potentiarum summae requiruntur, eae, quae hucusque ab analystis adhiberi solitae sunt methodi, multo facilius celeriusque ad optatum finem perducere nobis videantur, neque spatium his pagellis circumscriptum copiosiorem illam disquisitionem dilucide exponere permittat, ex his notio-

ribus methodis unam in praesenti seligere, eamque aequationibus periodicis pro inveniendis summis sinuum et cosinuum arcuum multiplorum accommodare juvabit.

§. 14. Ex formulis (6) articuli 7, divisioni aequationis per $\sin \frac{1}{2}(\varphi - \alpha)$ inservientibus, levi adhibita mutatione deducuntur sequentes:

$$\mathrm{sc}\,(\Sigma' - \tfrac{1}{2}\alpha) = \mathrm{sc}\,(\Sigma - \alpha)$$

$$a'\,\mathrm{sc}\,(A' - \tfrac{1}{2}\alpha) = a\,\mathrm{sc}\,(A - \alpha) - \mathrm{sc}\,(\Sigma - 2\alpha)$$

$$b'\,\mathrm{sc}\,(B' - \tfrac{1}{2}\alpha) = b\,\mathrm{sc}\,(B - \alpha) - a\,\mathrm{sc}\,(A - 2\alpha) + \mathrm{sc}\,(\Sigma - 3\alpha)$$

etc. etc.

Eodem modo divisione successive instituta per $\sin \frac{1}{2}(\varphi - \beta)$, $\sin \frac{1}{2}(\varphi - \gamma)$, ... $\sin \frac{1}{2}(\varphi - \mu)$ prodibunt relationes:

$$\mathrm{sc}\,(\Sigma'' - \tfrac{1}{2}\beta) = \mathrm{sc}\,(\Sigma - \beta)$$

$$a''\,\mathrm{sc}\,(A'' - \tfrac{1}{2}\beta) = a\,\mathrm{sc}\,(A - \beta) - \mathrm{sc}\,(\Sigma - 2\beta)$$

etc. etc.

$$\mathrm{sc}\,(\Sigma''' - \tfrac{1}{2}\gamma) = \mathrm{sc}\,(\Sigma - \gamma)$$

$$a'''\,\mathrm{sc}\,(A''' - \tfrac{1}{2}\gamma) = a\,\mathrm{sc}\,(A - \gamma) - \mathrm{sc}\,(\Sigma - 2\gamma)$$

etc. etc.

$\mathrm{sc}\,\Sigma''$, $a''\,\mathrm{sc}\,A''$, $b''\,\mathrm{sc}\,B''$, ...; $\mathrm{sc}\,\Sigma'''$, $a'''\,\mathrm{sc}\,A'''$, $b'''\,\mathrm{sc}\,B'''$, ...; etc. respective eadem ratione ex $\alpha, \gamma, \delta, \ldots \mu$; $\alpha, \beta, \delta, \ldots \mu$; etc. compositis, qua $\mathrm{sc}\,\Sigma'$, $a'\,\mathrm{sc}\,A'$, $b'\,\mathrm{sc}\,B'$, ... ex $\beta, \gamma, \delta, \ldots \mu$. Additione igitur facta erit:

$$\mathrm{sc}\,(\Sigma' - \tfrac{1}{2}\alpha) + \mathrm{sc}\,(\Sigma'' - \tfrac{1}{2}\beta) + \mathrm{sc}\,(\Sigma''' - \tfrac{1}{2}\gamma) + \ldots =$$

$$= \mathrm{sc}\,(\Sigma - \alpha) + \mathrm{sc}\,(\Sigma - \beta) + \mathrm{sc}\,(\Sigma - \gamma) + \ldots,$$

$$a'\,\mathrm{sc}\,(A' - \tfrac{1}{2}\alpha) + a''\,\mathrm{sc}\,(A'' - \tfrac{1}{2}\beta) + \ldots =$$

$$= a[\mathrm{sc}\,(A - \alpha) + \mathrm{sc}\,(A - \beta) + \ldots] - \mathrm{sc}\,(\Sigma - 2\alpha) - \mathrm{sc}\,(\Sigma - 2\beta) - \ldots,$$

etc. etc.

quas formulas brevitatis gratia sic exhibebimus:

$$\mathbf{S}\, \mathrm{sc}(\Sigma' - \tfrac{1}{2}\alpha) = \mathbf{S}\, \mathrm{sc}(\Sigma - \alpha)$$

$$\mathbf{S}\, a' \mathrm{sc}(A' - \tfrac{1}{2}\alpha) = a\mathbf{S}\, \mathrm{sc}(A - \alpha) - \mathbf{S}\, \mathrm{sc}(\Sigma - 2\alpha)$$

$$\mathbf{S}\, b' \mathrm{sc}(B' - \tfrac{1}{2}\alpha) = b\mathbf{S}\, \mathrm{sc}(B - \alpha) - a\mathbf{S}\, \mathrm{sc}(A - 2\alpha) + \mathbf{S}\, \mathrm{sc}(\Sigma - 3\alpha)$$

etc. etc.

Jam vero reapse instituta evolutione summarum

$$\mathbf{S}\, \mathrm{sc}(\Sigma' - \tfrac{1}{2}\alpha)\,, \quad \mathbf{S}\, a' \mathrm{sc}(A' - \tfrac{1}{2}\alpha)\,, \quad \mathbf{S}\, b' \mathrm{sc}(B' - \tfrac{1}{2}\alpha)\,, \ldots$$

in singulos terminos formae $\mathrm{sc}\tfrac{1}{2}(\pm\alpha \pm \beta \pm \gamma \pm \ldots)$, facile est intelligere:

1) in summis istis nullos alios occurrere terminos, nisi qui respective in $a\,\mathrm{sc}\,A$, $b\,\mathrm{sc}\,B$, $c\,\mathrm{sc}\,C$ inveniantur;

2) terminos summae $\mathbf{S}\,\mathrm{sc}(\Sigma' - \tfrac{1}{2}\alpha)$ omnes inter se esse diversos; terminorum summam $a'\mathbf{S}\,\mathrm{sc}(A' - \tfrac{1}{2}\alpha)$ ingredientium quemvis occurrere bis, uti v. g. terminus $\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha + \beta - \gamma + \delta + \ldots)$, qui tam evolutioni ipsius $a'\sin(A' - \tfrac{1}{2}\alpha)$ quam $a'''\sin(A''' - \tfrac{1}{2}\gamma)$ inest; eadem ratione quemvis terminum summae $\mathbf{S}\, b'\,\mathrm{sc}(B' - \tfrac{1}{2}\alpha)$, v. g. $\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha - \beta - \gamma + \delta + \ldots)$, occurrere ter, quia trium terminorum $b'\sin(B' - \tfrac{1}{2}\alpha)$, $b''\sin(B'' - \tfrac{1}{2}\beta)$, $b'''\sin(B''' - \tfrac{1}{2}\gamma)$ partem facit; et sic porro.

Habemus idcirco:

$$\mathbf{S}\, \mathrm{sc}(\Sigma' - \tfrac{1}{2}\alpha) = a\,\mathrm{sc}\,A, \quad \mathbf{S}\, a'\,\mathrm{sc}(A' - \tfrac{1}{2}\alpha) = 2b\,\mathrm{sc}\,B,$$

$$\mathbf{S}\, b'\,\mathrm{sc}(B' - \tfrac{1}{2}\alpha) = 3c\,\mathrm{sc}\,C, \quad \text{etc.}$$

His igitur in prioribus formulis substitutis, erit:

$$a\,\mathrm{sc}\,A = \mathbf{S}\,\mathrm{sc}(\Sigma - \alpha)$$

$$2b\,\mathrm{sc}\,B = a\mathbf{S}\,\mathrm{sc}(A - \alpha) - \mathbf{S}\,\mathrm{sc}(\Sigma - 2\alpha)$$

$$3c\,\mathrm{sc}\,C = b\mathbf{S}\,\mathrm{sc}(B - \alpha) - a\mathbf{S}\,\mathrm{sc}(A - 2\alpha) + \mathbf{S}\,\mathrm{sc}(\Sigma - 3\alpha)$$

etc. etc.

unde recurrentes relationes inter summas sinuum cosinuumque multiplorum arcuum prodibunt hae:

$$\mathbf{S}\,\mathrm{sc}\,\alpha = a\,\mathrm{sc}\,(\Sigma - A)$$

$$\mathbf{S}\,\mathrm{sc}\,2\alpha = a\,\mathrm{sc}\,(\Sigma - A)\,\mathbf{S}\cos\alpha + a\,\mathrm{sc}\,(A - \Sigma)\,\mathbf{S}\sin\alpha - 2b\,\mathrm{sc}(\Sigma - B)$$

$$\mathbf{S}\,\mathrm{sc}\,3\alpha = a\,\mathrm{sc}\,(\Sigma - A)\,\mathbf{S}\cos 2\alpha + a\,\mathrm{sc}\,(A - \Sigma)\,\mathbf{S}\sin 2\alpha$$
$$- b\,\mathrm{sc}\,(\Sigma - B)\,\mathbf{S}\cos\alpha - b\,\mathrm{sc}\,(B - \Sigma)\,\mathbf{S}\sin\alpha + 3c\,\mathrm{sc}\,(\Sigma - C)$$

$$\mathbf{S}\,\mathrm{sc}\,4\alpha = a\,\mathrm{sc}\,(\Sigma - A)\,\mathbf{S}\cos 3\alpha + a\,\mathrm{sc}\,(A - \Sigma)\,\mathbf{S}\sin 3\alpha$$
$$- b\,\mathrm{sc}(\Sigma - B)\,\mathbf{S}\cos 2\alpha - b\,\mathrm{sc}\,(B - \Sigma)\,\mathbf{S}\sin 2\alpha$$
$$+ c\,\mathrm{sc}\,(\Sigma - C)\,\mathbf{S}\cos\alpha + c\,\mathrm{sc}(C - \Sigma)\,\mathbf{S}\sin\alpha - 4d\,\mathrm{sc}\,(\Sigma - D)$$

etc. etc.

Independentes vero ex his derivantur formulae sequentes:

$$\mathbf{S}\,\mathrm{sc}\,\alpha = a\,\mathrm{sc}\,(\Sigma - A)$$

$$\mathbf{S}\,\mathrm{sc}\,2\alpha = a^2\,\mathrm{sc}\,(2\Sigma - 2A) - 2b\,\mathrm{sc}\,(\Sigma - B)$$

$$\mathbf{S}\,\mathrm{sc}\,3\alpha = a^3\,\mathrm{sc}\,(3\Sigma - 3A) - 3ab\,\mathrm{sc}\,(2\Sigma - A - B) + 3c\,\mathrm{sc}\,(\Sigma - C)$$

$$\mathbf{S}\,\mathrm{sc}\,4\alpha = a^4\,\mathrm{sc}\,(4\Sigma - 4A) - 4a^2b\,\mathrm{sc}\,(3\Sigma - 2A - B)$$
$$+ 2b^2\,\mathrm{sc}\,(2\Sigma - 2B) + 4ac\,\mathrm{sc}\,(2\Sigma - A - C) - 4d\,\mathrm{sc}\,(\Sigma - D)$$

etc. etc.

Similitudo harum formularum cum iis, quibus summae potentiarum in aequationibus algebraicis exhibentur, primo patet adspectu. Ommissis enim sinubus et cosinubus, quae restant expressiones a, $a^2 - 2b$, $a^3 - 3ab + 3c$, etc. summas dabunt radicum earumque quadratorum, cuborum, etc. aequationis:

$$x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - \ldots = 0.$$

Sinuum autem et cosinuum has expressiones ingredientium ea lex est, ut generaliter termino $a^p\,b^q\,c^r\ldots$ adjiciatur:

$$\mathrm{sc}\,\{(p + q + r + \ldots)\,\Sigma - pA - qB - rC - \ldots\}\,.$$

§. 15. Interea tamen cavendum est, ne latiorem his formulis tribuamus usum, quam quem ipsa earum natura iis permisit. Primum enim in aequationibus formae (☉) loco termini ultimi f (art. 4), duplex ejus valor in formulis istis est substituendus. Deinde si nu-

merus serierum $\alpha + 2\varkappa\pi$, $\beta + 2\varkappa\pi$, ... est vel $= 2n$, vel $= 2n + 1$, formulae usque ad evolutionem summae $\mathbf{S}$ sc $n\alpha$ in usum vocari possunt. Si vero ulterius exhibendae sunt $\mathbf{S}$ sc$(n+1)\alpha$, $\mathbf{S}$ sc$(n+2)\alpha$, etc., ob defectum terminorum aequationis, qui tamen in formulis requiruntur, rem paullo aliter aggrediamur necesse est.

Multiplicetur aequatio formae (☉)

$$\cos[n\varphi - \Sigma] - a\cos[(n-1)\varphi - A] + b\cos[(n-2)\varphi - B] - \ldots = 0$$

per sc $(p\varphi + \Sigma)$. Quo facto habetur:

$$\begin{aligned} 0 = \;& \text{sc}\,(p+n)\varphi + \text{sc}\,[(p-n)\varphi + 2\Sigma] \\ & - a\,\text{sc}\,[(p+n-1)\varphi + \Sigma - A] - a\,\text{sc}\,[(p-n+1)\varphi + \Sigma + A] \\ & + b\,\text{sc}\,[(p+n-2)\varphi + \Sigma - B] + b\,\text{sc}\,[(p-n+2)\varphi + \Sigma + B] \\ & \quad\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

et dehinc, si loco ipsius φ successive substituuntur $\alpha, \beta, \gamma \ldots \mu$, facta additione,

$$\mathbf{S}\,\text{sc}\,(p+n)\alpha =$$

$$= a\,\text{sc}(\Sigma - A)\,\mathbf{S}\cos(p+n-1)\alpha + a\,\text{sc}(A-\Sigma)\,\mathbf{S}\sin(p+n-1)\alpha - \ldots$$

$$- \text{sc}\,2\Sigma\,\mathbf{S}\cos(p-n)\alpha - \text{sc}\,(-2\Sigma)\,\mathbf{S}\sin(p-n)\alpha + \ldots$$

Ponentes igitur successive $p = 1, 2, 3, \ldots$, formulas recurrentes pro $\mathbf{S}$ sc$(n+1)\alpha$, $\mathbf{S}$ sc$(n+2)\alpha$, ... illico obtinebimus, ex quibus ope praecedentium formularum totidem relationes independentes produci poterunt.

Si aequatio data sit formae (☾), multiplicetur ea per sc$[(p-\frac{1}{2})\varphi + \Sigma]$, unde simili modo, ut antea, recurrentes formulae et independentes poterunt derivari.

§. 16. Juvabit hoc loco attentos fecisse lectores in casum singularem jam supra commemoratum, quo datae aequationis radicum binae sibi sunt aequales et oppositae. Tunc enim, quum $\sin\Sigma$, $a\sin A$, $b\sin B$, ... evanescant, erit:

$$\mathbf{S}\cos\alpha = a,\quad \mathbf{S}\cos 2\alpha = a^2 - 2b,\quad \mathbf{S}\cos 3\alpha = a^3 - 3ab + 3c,\ \text{etc.}$$

$$\mathbf{S}\sin\alpha = \mathbf{S}\sin 2\alpha = \mathbf{S}\sin 3\alpha = \text{etc.} = 0.$$

Suppositis igitur duabus aequationibus periodica et algebraica:

$$\cos n\varphi - a\cos(n-1)\varphi + b\cos(n-2)\varphi - \ldots \pm f = 0\ ,$$

$$x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} - \ldots \pm 2f = 0\ ,$$

quarum prioris cosinus iisdem sint affecti coefficientibus, quibus in posteriori potentiae ipsius x, ultimis terminis f et $2f$ exceptis; positis praeterea $2n$ radicibus periodicae: $\pm\alpha$, $\pm\beta$, ... $\pm\nu$; n vero radicibus algebraicae α', β', ... ν'; habebimus:

$$2(\cos\alpha + \cos\beta + .. + \cos\nu) = \alpha' + \beta' + .. + \nu'$$

$$2(\cos 2\alpha + \cos 2\beta + .. + \cos 2\nu) = \alpha'^2 + \beta'^2 + .. + \nu'^2$$

$$2(\cos 3\alpha + \cos 3\beta + .. + \cos 3\nu) = \alpha'^3 + \beta'^3 + .. + \nu'^3$$

etc. etc.

$$2(\cos n\alpha + \cos n\beta + .. + \cos n\nu) = \alpha'^n + \beta'^n + .. + \nu'^n.$$

Sed jam finem imponamus disquisitionibus nostris. Quamvis enim plura adhuc de ejusmodi aequationibus fuerimus perscrutati et magna formularum, quibus goniometria haud mediocriter locupletari videtur, restiterit copia, urgente tamen tempore consultius duximus brevitati studere et in aliam potius occasionem, si qua forte sese praebuerit, ista rejicere.*)

De relationibus inter variationes differentiales radicum et coefficientium aequationis periodicae.

§. 17. Problema. *Ex datis radicum differentialibus invenire differentialia coefficientium.*

Differentiatione formularum art. 7, (5) secundum radices $\alpha + 2\varkappa\pi$ illico habetur:

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial\alpha} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial . a \operatorname{sc} A}{\partial\alpha} = -\frac{1}{2}\operatorname{cs}\left(\frac{1}{2}\alpha - \Sigma'\right) + \frac{1}{2}a'\operatorname{cs}\left(-\frac{1}{2}\alpha - A'\right),$$

$$\frac{\partial . b \operatorname{sc} B}{\partial\alpha} = -\frac{1}{2}a'\operatorname{cs}\left(\frac{1}{2}\alpha - A'\right) + \frac{1}{2}b'\operatorname{cs}\left(-\frac{1}{2}\alpha - B'\right), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial . c \operatorname{sc} C}{\partial\alpha} = -\frac{1}{2}b'\operatorname{cs}\left(\frac{1}{2}\alpha - B'\right) + \frac{1}{2}c'\operatorname{cs}\left(-\frac{1}{2}\alpha - C'\right),$$

etc. etc.

*) In Möbius' hinterlassenen Papieren hat sich noch das Originalmanuscript seiner Habilitationsschrift aus dem Jahre 1815 vorgefunden. Dasselbe enthält im Anschlusse an den damals gedruckten Theil einen weiteren Abschnitt über die zugehörigen Differentialausdrücke (als Artt. 17 — 19), welcher hier zuerst veröffentlicht wird. A. d. H.

et dehinc, eliminatis $\operatorname{cs}\Sigma'$, $a'\operatorname{cs}A'$, $b'\operatorname{cs}B'$, $c'\operatorname{cs}C'$, etc. ope formularum art. 7, (6),

$$\frac{\partial . a\operatorname{sc}A}{\partial\alpha} = \frac{1}{2}a\operatorname{cs}(-A) - \operatorname{cs}(\alpha-\Sigma),$$

$$(2)\quad \frac{\partial . b\operatorname{sc}B}{\partial\alpha} = \frac{1}{2}b\operatorname{cs}(-B) - a\operatorname{cs}(\alpha-A) + \operatorname{cs}(2\alpha-\Sigma),$$

$$\frac{\partial . c\operatorname{sc}C}{\partial\alpha} = \frac{1}{2}c\operatorname{cs}(-C) - b\operatorname{cs}(\alpha-B) + a\operatorname{cs}(2\alpha-A) - \operatorname{sc}(3\alpha-\Sigma),$$

etc. etc.

Patet autem, easdem formulas non minus valituras esse, si pro α substituantur successive β, γ, ... μ.

Hinc facta earum omnium collectione obtinebimus:

$$d\Sigma = \frac{1}{2}(d\alpha + d\beta + d\gamma + \ldots + d\mu),$$

$$d.a\operatorname{sc}A = \{\tfrac{1}{2}a\operatorname{cs}(-A) - \operatorname{cs}(\alpha-\Sigma)\}d\alpha + \{\tfrac{1}{2}a\operatorname{cs}(-A) - \operatorname{cs}(\beta-\Sigma)\}d\beta + \ldots$$

$$(3)\quad d.b\operatorname{sc}B = \{\tfrac{1}{2}b\operatorname{cs}(-B) - a\operatorname{cs}(\alpha-A) + \operatorname{cs}(2\alpha-\Sigma)\}d\alpha$$

$$+ \{\tfrac{1}{2}b\operatorname{cs}(-B) - a\operatorname{cs}(\beta-A) + \operatorname{cs}(2\beta-\Sigma)\}d\beta + \ldots$$

etc. etc.

§. 18. **Problema.** *Datis differentialibus coefficientium invenire differentialia radicum.*

Aequationem formae (⊙) (art. 4)

$$\cos(n\varphi-\Sigma) - a[\cos(n-1)\varphi - A] + b\cos[(n-2)\varphi - B] - \ldots$$

$$\mp e\cos(\varphi-E) \pm f = \pm 2^{2n-1}\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\beta)\ldots\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\mu)$$

secundum omnes ejus coefficientes atque radices differentiando ac deinde pro φ successive substituendo α, β, ... μ, resultabit:

$$\sin(n\alpha-\Sigma)\,d\Sigma - \cos(n-1)\alpha\,d.a\cos A - \sin(n-1)\alpha\,d.a\sin A + \ldots \pm df$$

$$(1)\quad = \mp 2^{2n-2}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\gamma)\ldots\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\mu)\,d\alpha,$$

$$\sin(n\beta-\Sigma)\,d\Sigma - \cos(n-1)\beta\,d.a\cos A - \sin(n-1)\beta\,d.a\sin A + \ldots \pm df$$

$$= \mp 2^{2n-2}\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\ldots\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\mu)\,d\beta,$$

etc. etc.

Quum vero $\mp 2^{2n-2}\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)\ldots\sin\frac{1}{2}(\alpha-\mu)$ etiam obtineatur, si proposita aequatio differentietur secundum φ, et deinde loco ipsius φ substituatur α, prodibit tandem

$$d\alpha = \frac{\sin(n\alpha - \Sigma)\, d\Sigma - \cos(n-1)\alpha\, d.a\cos A - \sin(n-1)\alpha\, d.a\sin A + \ldots \pm df}{n\sin(n\alpha - \Sigma) - (n-1)a\sin[(n-1)\alpha - A] + (n-2)b\sin[(n-2)\alpha - B] - \ldots \mp e\sin(\alpha - E)}, \quad (2)$$

qua in formula, si pro α reliquae ponuntur radices $\beta, \gamma, \ldots \mu$, reliquarum valores differentiales eliciuntur.

Aequationem ($\mathfrak{C}$) simili modo tractantes habebimus:

$$\pm 2^{m-2} \sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \gamma)\ldots \sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \mu)\, d\alpha =$$
$$= \cos(\tfrac{1}{2}m\alpha - \Sigma)\, d\Sigma + \sin\tfrac{1}{2}(m-2)\alpha\, d.a\cos A - \cos\tfrac{1}{2}(m-2)\alpha\, d.a\sin A \quad (3)$$
$$- \ldots \mp \sin\tfrac{1}{2}\alpha\, d.f\cos F \pm \cos\tfrac{1}{2}\alpha\, d.f\sin F,$$

sive

$$d\alpha = \frac{\cos(\tfrac{1}{2}m\alpha - \Sigma)\, d\Sigma + \ldots \pm \cos\tfrac{1}{2}\alpha\, d.f\sin F}{\tfrac{1}{2}m\cos(\tfrac{1}{2}m\alpha - \Sigma) - \tfrac{1}{2}(m-2)\cos[\tfrac{1}{2}(m-2)\alpha - A] + \ldots \pm \tfrac{1}{2}f\cos(\tfrac{1}{2}\alpha - F)}, \quad (4)$$

et similiter $d\beta$, $d\gamma, \ldots d\mu$ exhibentur, pro α substituendo successive $\beta, \gamma, \ldots \mu$.

§. 19. Apta combinatione relationum, quas inter differentialia radicum et coefficientium aequationis periodicae exsistere praecedentibus problematis (art. 17, 18) ostendimus, magna sane ac paene miranda novarum formularum trigonometricarum profluit multitudo. Quamvis enim silentio praeterire non possumus, alias jamjam ab Eulero detectas esse formulas, quae a sequentibus nonnisi eo differunt, quod sint destitutae functionibus trigonometricis; tamen non solum eam ipsam ad has functiones translationem, verum etiam modum, quo eas derivandas statim docebimus, et qui non minori facilitate Eulerianis quoque formulis potest adaptari, nobis vindicare nos posse, parum abest quin credamus.

Ex formulis art. 18, (1) prodeunt quotientes differentiales partiales:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial f} = \frac{1}{-2^{2n-2}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \gamma)\ldots\sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \mu)}$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial f} = \frac{1}{-2^{2n-2}\sin\tfrac{1}{2}(\beta - \alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)\ldots\sin\tfrac{1}{2}(\beta - \mu)}$$

etc. etc.

$$\frac{\partial\mu}{\partial f} = \frac{1}{-2^{2n-2}\sin\tfrac{1}{2}(\mu - \alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\mu - \beta)\ldots\sin\tfrac{1}{2}(\mu - \lambda)}.$$

His aequationibus additis, quum sit secundum art. 17, (3):

$$\frac{\partial\alpha}{\partial f} + \frac{\partial\beta}{\partial f} + \ldots + \frac{\partial\mu}{\partial f} = \frac{2\,\partial\Sigma}{\partial f} \quad \text{et} \quad d\Sigma = 0,$$

quia in differentiatione radicum $\alpha, \beta, \ldots \mu$ nonnisi coefficiens f, non ergo Σ, variabilis spectabatur, habetur pro pari numero quarumvis quantitatum $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \mu$:

$$\frac{1}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)\ldots\sin\frac{1}{2}(\alpha-\mu)}+\frac{1}{\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\ldots\sin\frac{1}{2}(\beta-\mu)}$$

$$+\ldots+\frac{1}{\sin\frac{1}{2}(\mu-\alpha)\sin\frac{1}{2}(\mu-\beta)\ldots\sin\frac{1}{2}(\mu-\lambda)}=0\,.$$

Similiter additione aequationum

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\,.\,e\,\mathrm{sc}\,E}=\frac{\mathrm{sc}\,\alpha}{2^{2n-2}\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)\ldots\sin\frac{1}{2}(\alpha-\mu)}$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial\,.\,e\,\mathrm{sc}\,E}=\frac{\mathrm{sc}\,\beta}{2^{2n-2}\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\ldots\sin\frac{1}{2}(\beta-\mu)}$$

etc. etc.

$$\frac{\partial\mu}{\partial\,.\,e\,\mathrm{sc}\,E}=\frac{\mathrm{sc}\,\mu}{2^{2n-2}\sin\frac{1}{2}(\mu-\alpha)\sin\frac{1}{2}(\mu-\beta)\ldots\sin\frac{1}{2}(\mu-\lambda)}\,,$$

quum iterum habeatur:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\,.\,e\,\mathrm{sc}\,E}+\frac{\partial\beta}{\partial\,.\,e\,\mathrm{sc}\,E}+\ldots+\frac{\partial\mu}{\partial\,.\,e\,\mathrm{sc}\,E}=\frac{2\,\partial\Sigma}{\partial\,.\,e\,\mathrm{sc}\,E}=0\,.$$

prodit

$$\frac{\mathrm{sc}\,\alpha}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\ldots\sin\frac{1}{2}(\alpha-\mu)}+\frac{\mathrm{sc}\,\beta}{\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\ldots\sin\frac{1}{2}(\beta-\mu)}$$

$$+\ldots+\frac{\mathrm{sc}\,\mu}{\sin\frac{1}{2}(\mu-\alpha)\ldots\sin\frac{1}{2}(\mu-\lambda)}=0\,,$$

ideoque etiam

$$\frac{\cos(\alpha-A)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\ldots\sin\frac{1}{2}(\alpha-\mu)}+\frac{\cos(\beta-A)}{\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\ldots\sin\frac{1}{2}(\beta-\mu)}$$

$$+\ldots+\frac{\cos(\mu-A)}{\sin\frac{1}{2}(\mu-\alpha)\ldots\sin\frac{1}{2}(\mu-\lambda)}=0\,.$$

A denotante quantitatem pro lubitu determinandam.

Ulterius autem hac via progrediendo generatim invenietur esse:

$$\frac{\cos(p\alpha-P)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\ldots\sin\frac{1}{2}(\alpha-\mu)}+\frac{\cos(p\beta-P)}{\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\ldots\sin\frac{1}{2}(\beta-\mu)}$$

$$+\ldots+\frac{\cos(p\mu-P)}{\sin\frac{1}{2}(\mu-\alpha)\ldots\sin\frac{1}{2}(\mu-\lambda)}=0\,,$$

dummodo sit p numerus integer ipso n minor.

Omnes vero has formulas si addendo conjungimus, multiplicatas antea respective per factores arbitrarios z, a, b, ..., formulam multo adhuc generaliorem consequimur hanc:

$$\frac{z + a\cos(\alpha - A) + b\cos(2\alpha - B) + \ldots + \cos(p\alpha - P)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha - \gamma)\ldots\sin\frac{1}{2}(\alpha - \mu)}$$

$$+ \frac{z + a\cos(\beta - A) + b\cos(2\beta - B) + \ldots + \cos(p\beta - P)}{\sin\frac{1}{2}(\beta - \alpha)\sin\frac{1}{2}(\beta - \gamma)\ldots\sin\frac{1}{2}(\beta - \mu)}$$

etc. etc.

$$+ \frac{z + a\cos(\mu - A) + b\cos(2\mu - B) + \ldots + \cos(p\mu - P)}{\sin\frac{1}{2}(\mu - \alpha)\sin\frac{1}{2}(\mu - \beta)\ldots\sin\frac{1}{2}(\mu - \lambda)} = o,$$

vel resolutis harum fractionum numeratoribus singulis in $2p$ factores formae $\sin\frac{1}{2}(\alpha - a)$ (art. 5), ac dein quovis arcu duplicato:

$$\frac{\sin(\alpha - a)\sin(\alpha - b)\sin(\alpha - c)\ldots\sin(\alpha - q)}{\sin(\alpha - \beta)\sin(\alpha - \gamma)\sin(\alpha - \delta)\ldots\sin(\alpha - \mu)}$$

$$+ \frac{\sin(\beta - a)\sin(\beta - b)\sin(\beta - c)\ldots\sin(\beta - q)}{\sin(\beta - \alpha)\sin(\beta - \gamma)\sin(\beta - \delta)\ldots\sin(\beta - \mu)}$$

etc. etc.

$$+ \frac{\sin(\mu - a)\sin(\mu - b)\sin(\mu - c)\ldots\sin(\mu - q)}{\sin(\mu - \alpha)\sin(\mu - \beta)\sin(\mu - \gamma)\ldots\sin(\mu - \lambda)} = o.$$

dummodo elementorum $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \mu$ et $a, b, c, \ldots q$ numeri sint pares et prior major posteriori.

Eandem vero formulam non minus valituram, si uterque elementorum numerus sit impar et prior posteriori major, intelligitur ope aequationis differentialis art. 18, (3) eodem modo in usum vocatae, quo supra tractabantur aequationes art. 18, (1).



De minima variatione azimuthi stellarum circulos parallelos uniformiter describentium commentatio.

Lipsiae, 1816.

Nebst der Selbstanzeige des Verfassers im dritten Bande der Lindenau-Bohnenberger'schen Zeitschrift für Astronomie, Tübingen 1817 S. 82—87.

Commentatio qua ad audiendam orationem munus Professoris Astronomiae extraordinarii adeundi caussa *de incrementis Analyseos per Astronomiam subortis* habendam cal. majis a. MDCCCXVI observantissime invitat

M. Augustus Ferdinandus Moebius Astr. Prof. extraord. design.

§. 1. Inter varias, quae recentiori tempore ad accuratiorem terrae dimensionem in usum vocatae sunt, operationes haud ultimum sibi locum vindicat determinatio azimuthi objecti terrestris ex observata ejus a sole vel stella aliqua distantia. Cognito enim simul observationis hujus tempore et dehinc computatis stellae a zenitho apparenti distantia et azimutho, observata denique objecti zenithali distantia, in triangulo sphaerico inter zenithum, stellae locum apparentem et objectum concepto tria innotescunt latera, ex quibus angulus ad zenithum inventus et stellae azimutho additus vel ab eo subtractus quaesitum objecti terrestris azimuthum nobis exhibet. Momentum autem his observationibus inprimis opportunum generaliter id esse intelligitur, quo stellae azimuthum minimas variationes subit. Ita enim fiet, ut etiam objecti azimuthum minoribus, quam, quibus alias, erroribus sit obnoxium.

Satis fuse de stellae loco ad determinationem azimuthi objecti terrestris aptissime eligendo disseruit celeb. Delambre in *Base du Système métrique* pag. 151 — 156. Designatis polo, zenitho, stellae loco vero et objecto terrestri respective per P, Z, S, G, azimuthum objecti a meridiani parte boreali inceptum erit

$$PZG = PZS \pm SZG\,.$$

Jam errores, quibus azimuthum stellae PZS adfectum esse potest, Delambre invenit differentiatione aequationis:

$$\sin ZS\,.\,\sin PZS = \sin ZPS\,.\,\sin PS\,,$$

$$dPZS = dZPS\,.\,\cot ZPS\,.\,\text{tang}\,PZS \qquad \text{(A)}$$
$$-\,dZS\,.\,\cot ZS\,.\,\text{tang}\,PZS + dPS\,.\,\cot PS\,.\,\text{tang}\,PZS\,.$$

His, et erroribus, qui in angulum SZG redundant, in summam collectis ita deinde argumentatur:

Le terme le plus important est celui qui dépend de l'angle horaire P: or, la seule inspection du terme $dP\,.\,\cot P\,.\,\text{tang}\,Z$ fait voir qu'il

faut éviter les observations aux environs du premier vertical; car alors Z différant peu de 90° le facteur tang Z seroit très-considérable et la moindre erreur dP deviendroit très sensible; . . . Quand l'angle P diffère peu de 90°, ce terme doit être fort petit, et comme il change de signe à 6^h, on voit que dans les observations voisines du cercle de 6^h, les erreurs de la pendule sont très-petites et de signes contraires avant et après, en sorte qu'elles doivent se compenser et s'anéantir.

At non animadvertisse videtur Vir celeb., quum distantia zenithalis ZS ex horario ZPS computetur, etiam harum quantitatum differentialia a se invicem pendeant, necesse esse. Quae quidem mutua relatio invenitur differentiatione aequationis:

$$\cos ZS = \cos ZPS \,.\, \sin ZP \,.\, \sin SP + \cos ZP \,.\, \cos SP,$$

$$dZS \,.\, \sin ZS = dZPS \,.\, \sin ZPS \,.\, \sin ZP \,.\, \sin SP,$$

$$dZS = dZPS \,.\, \sin ZP \,.\, \sin PZS,$$

et facta in (A) substitutione:

$$dPZS = dZPS \,.\, \operatorname{tang} PZS \{\cot ZPS - \cot ZS \,.\, \sin PZS \,.\, \sin ZP\} + \cdots$$

Hic autem ipsius $dZPS$ coefficiens, qui relationem variationis azimuthi ad variationem anguli horarii exprimit, neque pro $PZS = 90°$ infinitus fieri, — hoc enim casu expressio uncis inclusa ad nihilum reducitur, — neque pro $ZPS = 90°$ minimum semper valorem, ut ex sequentibus patebit, tenere dici potest.

Simile quiddam contendit etiam celeb. Biot in *Astronomie physique*, Tom. I, pag. 318. Ibi enim operationem illam geodaeticam explicans addit, momentum, quo stellae angulus horarius sit $= 90°$, observandae objecti a stella distantiae maxime opportunum esse. Tunc enim azimuthum stellae parum variari, propterea quod hoc loco stella a plano meridiani sit remotissima. Cui vero hujus argumentationis tenuitas non cadit in oculos? Verum quidem est, nostris regionibus angulum horarium, cui minima azimuthi variatio respondet, pro stellis non ultra quadraginta circiter gradus ab aequatore dissitis, paucis tantum gradibus quadrante majorem vel minorem esse. Quod tamen non idem valet pro terrae locis in vicinia aequatoris vel polorum sitis. Praeterea si declinatio stellae ab elevatione poli nonnisi parum superatur, angulus iste horarius admodum parvus evadit adeoque in nihilum abit, si declinatio elevationi aequalis fit.

De minima igitur azimuthi variatione quum non satis omnibus constare animadvertissem, in hanc rem paullo accuratius inquirere apud me constitui, eoque minus has disquisitiones publici juris facere

dubitavi, quo majorem elegantium relationum et formularum copiam id ipsum argumentum subministrabat.

§. 2. Problema. *Data elevatione poli dataque circuli paralleli declinatione, ea in parallelo invenire loca, in quibus stellae parallelum uniformiter describentis azimuthum tardissime variatur sive aequalibus temporis elementis minima incrementa capit.*

Vocentur

elevatio poli . . . . φ
stellae declinatio . . . . δ
» altitudo . . . . η
» angulus horarius . . . . τ
» azimuthum a meridie directione motus diurni numeratum . . . . α
» angulus parallacticus . . . . π

erit in triangulo sphaerico, cujus latera

$$90^0 - \varphi\,, \qquad 90^0 - \delta\,, \qquad 90^0 - \eta\,,$$

et anguli his lateribus respective oppositi

$$\pi\,, \qquad 180^0 - \alpha\,, \qquad \tau\,:$$

$$\sin\varphi\cos\tau = \operatorname{tang}\delta\cos\varphi + \cot\alpha\sin\tau\,, \tag{I}$$

$$\cos\pi = \sin\varphi\sin\alpha\sin\tau + \cos\alpha\cos\tau\,, \tag{II}$$

$$\sin\alpha\cos\eta = \cos\delta\sin\tau\,, \tag{III}$$

$$\sin\varphi = \cos\pi\cos\eta\cos\delta + \sin\eta\sin\delta\,, \tag{IV}$$

$$\sin\eta = \cos\tau\cos\varphi\cos\delta + \sin\varphi\sin\delta\,. \tag{V}$$

Assumtis jam δ et φ constantibus, τ variabili, et α, η, π a variabili τ, cujus differentiale primum constans ponendum est, dependentibus, erit differentiata formula (I) et in usum vocatis (II), (III), (IV):

$$\begin{aligned} d\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\sin\tau}(\sin\varphi\sin\alpha\sin\tau + \cos\alpha\cos\tau)\,d\tau \\ &= \frac{\sin\alpha}{\sin\tau}\cos\pi\,d\tau \\ &= \frac{\cos\delta}{\cos\eta}\cos\pi\,d\tau \\ &= \frac{\sin\varphi - \sin\delta\sin\eta}{\cos\eta^2}\,d\tau \end{aligned}$$

et reiterata differentiatione:

$$d^2\alpha = \frac{2\sin\varphi\sin r_{\prime} - \sin\delta - \sin\delta\sin r_{\prime}^2}{\cos r_{\prime}^4}\cos r_{\prime}\, dr_{\prime}\, d\tau\ .$$

Invenitur autem differentiata formula (V):

$$\cos r_{\prime}\, dr_{\prime} = -\sin\tau\cos\varphi\cos\delta\, d\tau\,,$$

quo in praecedenti substituto prodit tandem quotiens differentialis secundus:

$$\frac{d^2\alpha}{d\tau^2} = \frac{\sin\delta\sin r_{\prime}^2 - 2\sin\varphi\sin r_{\prime} + \sin\delta}{\cos r_{\prime}^4}\sin\tau\cos\varphi\cos\delta\,,$$

quem si variatio azimuthalis $d\alpha$ maximum vel minimum valorem obtinet, nihilo aequalem fieri constat. Hunc igitur quotientem annullando erit vel $\sin\tau = 0$, vel

$$(1)\qquad \sin\delta\sin r_{\prime}^2 - 2\sin\varphi\sin r_{\prime} + \sin\delta = 0\,,$$

quarum aequationum prior stellam in meridiano positam exhibet, ubi variationem azimuthalem maximam esse, omnibus notum. Altera suppeditat sinum altitudinis, quae minimae variationi respondet:

$$(2)\qquad \sin r_{\prime} = \frac{\sin\varphi}{\sin\delta}\left\{1 \pm \sqrt{1 - \frac{\sin\delta^2}{\sin\varphi^2}}\right\}.$$

§. 3. Jam vero ut valor ipsius $\sin r_{\prime}$ ex hac formula realis emergat, debebit esse absolute

$$\sin\varphi > \sin\delta,\quad \text{sive}\quad \varphi > \delta\,.$$

Ex quo porro sequitur, ne $\sin r_{\prime}$ limites ± 1 superet, signorum quantitati radicali praefixorum nonnisi negativum accipi posse. Neutiquam vero limites isti hoc loco sufficiunt. Arctioribus $\sin r_{\prime}$ continetur, iis scilicet, quos in meridiano valores assequitur:

$\sin(\delta + 90^0 - \varphi) = \cos(\varphi - \delta)$ et $\sin[\delta - (90^0 - \varphi)] = -\cos(\varphi + \delta)$;*)

ita ut habeatur:

$$\sin r_{\prime} < \cos(\varphi - \delta)\,,\qquad \sin r_{\prime} > -\cos(\varphi + \delta)\,.$$

Videamus igitur, quae novae exinde inter φ et δ relationes intercedere debeant, ne $\sin r_{\prime}$ hos terminos transgredi possit. Quum differentiae

$$\sin r_{\prime} - \cos(\varphi - \delta)\,,\qquad \sin r_{\prime} + \cos(\varphi + \delta)$$

---

*) Idem ex eo quoque deduci potest, quod trium trianguli laterum, $90^0 - \varphi$, $90^0 - \delta$, $90^0 - r_{\prime}$, binorum summa tertio major esse debet.

oppositis signis adfectae esse debeant, earum productum erit:

$$\{\sin\eta - \cos(\varphi - \delta)\}\{\sin\eta + \cos(\varphi + \delta)\} < 0,$$

et multiplicatione peracta:

$$\sin\eta^2 - 2\sin\varphi\sin\delta\sin\eta - \cos\varphi^2 + \sin\delta^2 < 0.$$

Atqui liquet ex §. 2, (1):

$$\sin\delta^2\sin\eta^2 - 2\sin\varphi\sin\delta\sin\eta + \sin\delta^2 = 0,$$

qua aequatione a praecedenti subtracta reperitur:

$$\cos\delta^2\sin\eta^2 - \cos\varphi^2 < 0.$$

Hinc duos alias ipsius $\sin\eta$ limites cognoscimus:

$$\sin\eta < \frac{\cos\varphi}{\cos\delta}, \qquad \sin\eta > -\frac{\cos\varphi}{\cos\delta},$$

quibus comparatis cum limitibus prioribus, prodit:

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\delta} > -\cos(\varphi + \delta), \qquad -\frac{\cos\varphi}{\cos\delta} < \cos(\varphi - \delta),$$

vel

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\delta} + \cos(\varphi + \delta) > 0, \qquad \frac{\cos\varphi}{\cos\delta} + \cos(\varphi - \delta) > 0,$$

et dividendo per $\cos\varphi\cos\delta$:

$$\operatorname{tang}\delta^2 + 2 - \operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\delta > 0, \quad \operatorname{tang}\delta^2 + 2 + \operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\delta > 0,$$

ergo:

$$(\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\delta - 2 - \operatorname{tang}\delta^2)(\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\delta + 2 + \operatorname{tang}\delta^2) < 0,$$

et dividendo utrumque factorem per $\operatorname{tang}\delta$:

$$(\operatorname{tang}\varphi - 2\cot\delta - \operatorname{tang}\delta)(\operatorname{tang}\varphi + 2\cot\delta + \operatorname{tang}\delta) < 0.$$

Unde concludimus, si η intra limites $\delta \pm (90^0 - \varphi)$ occurrat, $\operatorname{tang}\varphi$ intra limites $\pm(2\cot\delta + \operatorname{tang}\delta)$ contineri. Simili autem ratiocinandi modo evincitur, si η limites illos superet, ideoque sit $\sin\eta$ cosinuum $-\cos(\varphi + \delta)$, $\cos(\varphi - \delta)$ utroque vel major vel minor, fore tunc

$$(\operatorname{tang}\varphi - 2\cot\delta - \operatorname{tang}\delta)(\operatorname{tang}\varphi + 2\cot\delta + \operatorname{tang}\delta) > 0,$$

et hanc ob rem $\operatorname{tang}\varphi$ extra limites $\pm(2\cot\delta + \operatorname{tang}\delta)$ obversaturam. Quibus tandem conficitur, quo pro datis φ et δ minima azimuthi variatio locum habeat, requiri, ut sit absolute:

$$\varphi > \delta \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}\varphi < 2\cot\delta + \operatorname{tang}\delta.$$

§. 4. Ponendo

$$2 \cot \delta + \operatorname{tang} \delta = \operatorname{tang} \psi ,$$

patet, ψ pro positivo δ eosdem positivos valores nancisci, quos pro negativo δ negativos accipit, nunquam autem ad nihilum reduci posse. Habet igitur tang ψ valores duos minimos sibi aequales et oppositos, qui inveniuntur resolutione aequationis

$$\operatorname{tang} \delta^2 - \operatorname{tang} \delta \operatorname{tang} \psi + 2 = 0 .$$

Hinc enim cum prodeat

$$2 \operatorname{tang} \delta = \operatorname{tang} \psi \pm \sqrt{\operatorname{tang} \psi^2 - 8} ,$$

sequitur minimus valor ipsius

$$\operatorname{tang} \psi = \sqrt{8} , \quad \text{unde} \quad \psi = 70^\circ\, 31'\, 44'',$$

cui respondet

$$\operatorname{tang} \delta = \sqrt{2} , \quad \delta = 54^\circ\, 44'\, 8'' .$$

Quum igitur generaliter debeat esse

$$\operatorname{tang} \varphi < \operatorname{tang} \psi ,$$

elucet, si φ minimo isto ipsius ψ valore minor sit, pro quavis stella, quae ipso φ minorem declinationem habet, minimam azimuthi variationem revera adfore.

Sin vero est $\varphi > 70^\circ\, 31'\, 44''$, resolvatur primum expressio:

$$\operatorname{tang} \delta^2 - \operatorname{tang} \delta \operatorname{tang} \varphi + 2$$

in factores

$$(\operatorname{tang} \delta - \operatorname{tang} \delta')\,(\operatorname{tang} \delta - \operatorname{tang} \delta'') .$$

Quo facto pro declinationibus, quae extra δ' et δ'' cadunt, modo elevationem poli non superent, minima azimuthi variatio locum tenebit, neutiquam vero pro iis, quae intra hos limites obversantur. Sit enim primum declinatio D utraque δ', δ'' vel major vel minor, differentiae

$$\operatorname{tang} D - \operatorname{tang} \delta', \quad \operatorname{tang} D - \operatorname{tang} \delta''$$

iisdem gaudebunt signis eamque ob caussam earum productum

$$\operatorname{tang} D^2 - \operatorname{tang} D \operatorname{tang} \varphi + 2 > 0 ,$$

ergo

$$\operatorname{tang} \varphi < 2 \cot D + \operatorname{tang} D .$$

At si D intra δ' et δ'' cadit, differentiae istae diversis signis adfectae erunt, itaque productum

$$\operatorname{tang} D^2 - \operatorname{tang} D \operatorname{tang} \varphi + 2 < 0 ,$$

ex quo conficitur

$$\operatorname{tang} \varphi > \operatorname{tang} D + 2 \cot D .$$

Caeterum haec ratiocinia absolutos ipsorum φ, δ', δ'', D valores spectare, vix opus est, ut moneatur.

Ad numerice resolvendam aequationem

$$\operatorname{tang}\delta^2 - \operatorname{tang}\delta \operatorname{tang}\varphi + 2 = 0\,,$$

praestat, eam in hanc formam redigere calculo logarithmico magis adaptatam:

$$3\cos\varphi = -\cos(\varphi + 2\delta) = \cos[180^0 - (\varphi + 2\delta)] = \cos(\varphi + 2\delta - 180^0)\,.$$

Ponendo enim

$$3\cos\varphi = \cos\chi\,,$$

duo valores ipsius δ statim eliciuntur:

$$\delta' = 90^0 - \tfrac{1}{2}(\varphi + \chi)\,,\quad \delta'' = 90^0 - \tfrac{1}{2}(\varphi - \chi)\,.\text{*)}$$

Ope hujus formulae adjectam tabulam computavimus, quae pro φ a $70^0\,32'$ usque ad 90^0 binis gradibus accrescente, valores declinationum δ', δ'', intra quas nulla datur minima azimuthi variatio, exhibet.

φ	δ'	δ''
$70^0\,32'$	$54^0\,44'$	$54^0\,44'$
72 0	43 0	65 0
74 0	35 54	70 6
76 0	30 16	73 44
78 0	25 18	76 42
80 0	20 42	79 18
82 0	16 21	81 39
84 0	12 9	83 51
86 0	8 3	85 57
88 0	4 1	87 59
90 0	0 0	90 0

§. 5. Postquam, quomodo altitudo, cui minima azimuthi variatio respondet, inveniri possit, ostensum est, transeamus jam ad reliquarum trianguli partium, puta, anguli horarii, azimuthi et anguli parallactici determinationes. Quamvis enim inventa ista altitudine tria latera cognita sint, ex quibus anguli solitis trigonometriae praeceptis computari possint, tamen relatio ipsa ex natura minimae azimuthi

---

*) Prodit exinde horum valorum summa: $\delta' + \delta'' = 180^0 - \varphi$. Idem et hoc modo intelligitur, quod ex natura aequationis quadraticae sit:

$$\operatorname{tang}\delta' + \operatorname{tang}\delta'' = \operatorname{tang}\varphi\,,\qquad \operatorname{tang}\delta' \operatorname{tang}\delta'' = 2\,.$$

Ergo

$$\operatorname{tang}(\delta' + \delta'') = \frac{\operatorname{tang}\delta' + \operatorname{tang}\delta''}{1 - \operatorname{tang}\delta' \operatorname{tang}\delta''} = -\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}(180^0 - \varphi)\,.$$

variationis inter trianguli partes intercedens formulas ad hanc ejus solutionem multo concinniores nobis suppeditat.

Introducantur in hunc finem altitudo stellae in primo verticali, quae audiat H, et angulus tunc temporis horarius T. Quae quidem quantitates per φ et δ solutione trianguli rectanguli inter polum, zenithum et stellam in primo verticali positam hunc in modum definiuntur:

$$\text{(I)} \qquad \sin H = \frac{\sin\delta}{\sin\varphi}\,,$$

$$\text{(II)} \qquad \cos T = \operatorname{tang}\delta \cot\varphi\,,$$

nec non praeterea habetur:

$$\text{(III)} \qquad \cos H = \cos\delta \sin T\,,$$

$$\text{(IV)} \qquad \sin H = \frac{\cos\delta}{\cos\varphi}\cos T\,.$$

§. 6. Hinc primum pro $\sin\eta$ ex §. 2, (2) accipiemus simplicissimam omnium relationem:

$$\text{(1)} \qquad \sin\eta = \frac{1-\cos H}{\sin H} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}H\,.$$

Est igitur sinus altitudinis, cui minima azimuthi variatio respondet, aequalis tangenti altitudinis dimidiae in primo verticali.

Deinde pro τ haberi constat:

$$\cos\tau = \frac{\sin\eta - \sin\varphi\sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta}\,,$$

et si expressiones

$$\sin\eta = \frac{1-\cos H}{\sin H}\,, \qquad \sin\varphi\sin\delta = \frac{\sin\delta^2}{\sin H}\,,$$

substituuntur ac dein loco $\cos H$, $\sin H$ valores eorum ex §. 5, (III), (IV) ponuntur:

$$\text{(2)} \quad \cos\tau = \frac{\cos\delta - \sin T}{\cos\delta\cos T} = \frac{\cos\delta - \sin T}{\sin\delta}\operatorname{tang}\varphi$$

$$= \frac{2\sin[45^\circ - \tfrac{1}{2}(T-\delta)]\sin[45^\circ - \tfrac{1}{2}(T+\delta)]\operatorname{tang}\varphi}{\sin\delta}\,.$$

Porro invenitur azimuthi cosinus:

$$\cos\alpha = \frac{\sin\varphi\sin\eta - \sin\delta}{\cos\varphi\cos\eta} = \frac{\sin\eta - \sin H}{\cos\eta}\operatorname{tang}\varphi \qquad (3)$$

$$= \frac{\cos H(\cos H - 1)}{\sin H\cos\eta}\operatorname{tang}\varphi = -\cos H\operatorname{tang}\eta\operatorname{tang}\varphi$$

$$= \frac{-\operatorname{tang}\eta\operatorname{tang}\varphi}{1 + 2\operatorname{tang}\eta^2} = -\sin\tfrac{1}{2}H\sqrt{\cos H}\operatorname{tang}\varphi,$$

ac denique cosinus anguli parallactici:

$$\cos\pi = \frac{\sin\varphi - \sin\eta\sin\delta}{\cos\eta\cos\delta} = \frac{1 - \sin\eta\sin H}{\cos\eta\sin H}\operatorname{tang}\delta \qquad (4)$$

$$= \frac{\operatorname{tang}\delta}{\cos\eta\operatorname{tang}H} = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\delta\cot\eta = \frac{\sqrt{\cos H}}{2\sin\frac{1}{2}H}\operatorname{tang}\delta.$$

§. 7. Eadem fere concinnitate η, τ, α, π auxiliari angulo parallactico primi verticalis exprimi possunt. Sed omissa harum expressionum evolutione, omnino nullis difficultatibus laborante, in praesenti sufficiat, nonnullas adhuc formulas ex prioribus derivare, quae tum per se inprimis dignae memoratu videbantur, tum etiam examini calculi prioribus superstructi commode inservire possunt.

E formula (3) habetur:

$$\cot\alpha = -\frac{\cos H\sin\eta\operatorname{tang}\varphi}{\sin\alpha\cos\eta} = -\frac{\cos H\sin\eta\operatorname{tang}\varphi}{\cos\delta\sin\tau} \qquad (5)$$

$$= -\frac{\sin T}{\sin\tau}\sin\eta\operatorname{tang}\varphi,$$

[§. 5, (III)], nec non e formula (4):

$$\cot\pi = \frac{\operatorname{tang}\delta}{\sin\pi\cos\eta\operatorname{tang}H} = \frac{\operatorname{tang}\delta}{\sin\tau\cos\varphi\operatorname{tang}H} \qquad (6)$$

$$= \frac{\sin T}{\sin\tau}\operatorname{tang}\varphi$$

[§. 5, (I), (III)], unde dividendo (5) per (6):

$$\operatorname{tang}\pi\cot\alpha = -\sin\eta. \qquad (7)$$

Aliam pro $\cot\alpha$ expressionem nanciscimur ex §. 2, (I):

$$\cot\alpha = (\cos\tau - \operatorname{tang}\delta\cot\varphi)\frac{\sin\varphi}{\sin\tau} = \frac{\cos\tau - \cos T}{\sin\tau}\sin\varphi, \qquad (8)$$

cui simillima pro $\sin\eta$ ex (5) obtinetur haec:

$$(9) \qquad \sin \eta = \frac{\cos T - \cos \tau}{\sin T} \cos \varphi .$$

§. 8. Ad majorem eorum, quae hucusque de minimae variationis azimuthi locis exposita sunt, dilucidationem visum est, paucis adhuc de curva disserere, quae pro data poli elevatione per ista parallelorum puncta ducitur. Aptissime autem in locum coordinatarum curvae eliguntur azimuthum et altitudo, quippe inter quas hanc aequationem locum habere vidimus:

$$(1) \qquad \cos \alpha = \frac{-\operatorname{tang} \eta}{1 + 2 \operatorname{tang} \eta^2} \operatorname{tang} \varphi = \frac{-\operatorname{tang} \varphi}{\cot \eta + 2 \operatorname{tang} \eta},$$

qua resoluta

$$(2) \qquad \operatorname{tang} \eta = -\frac{\operatorname{tang} \varphi}{4 \cos \alpha} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{8 \cos \alpha^2}{\operatorname{tang} \varphi^2}} \right\}.$$

Differentiata deinde aequatione (1) habetur pro angulo ω, quo circulus verticalis curvam incidit:

$$(3) \qquad \operatorname{tang} \omega = \cos \eta \frac{d\alpha}{d\eta} = \frac{1 - 2 \operatorname{tang} \eta^2}{(1 + 2 \operatorname{tang} \eta^2)^2} \cdot \frac{\operatorname{tang} \varphi}{\sin \alpha \cos \eta}$$

$$= \frac{3 \cos \eta^2 - 2}{(2 - \cos \eta^2)^2} \cdot \frac{\cos \eta \operatorname{tang} \varphi}{\sin \alpha}.$$

Jam primum ope aequationis (1) facile est intelligere, curvam a singulis circulis horizonte, meridiano et verticali primo in duas partes aequales et similes dividi. Deinde patet, si elevationem poli borealem statuimus, pro altitudine positiva azimuthum in horizontis quadrantes boreales, pro negativa in australes incidere, curvam igitur hemisphaerii superioris nonnisi partem borealem, inferioris nonnisi australem occupare. Designatis porro horizontis punctis orientali, boreali et occidentali per O, N, W, zenitho per Z, quum pro $\eta = 0$ et $\eta = 90^0$ fiat $\cos \alpha = 0$, curvae pars supra horizontem posita, quam solam hic considerare sufficiet, transibit puncta O. Z. W. Atqui pro $\eta = 0$ et $\alpha = \pm 90^0$ emergit ex (3):

$$\operatorname{tang} \omega = \pm \operatorname{tang} \varphi ,$$

et pro $\eta = 90^0$ et $\alpha = \pm 90^0$ fit

$$\operatorname{tang} \omega = 0 ;$$

ergo primus verticalis OZW curvam in punctis O et W sub angulo poli elevationi aequali secat, et in puncto Z eam tangit.

His de curva in genere demonstratis, ad ejus formam penitius

cognoscendam necessarium erit, quinque casus distinguere, prouti scilicet

$$\tang\varphi = 0\,, \quad < \sqrt{8}\,, \quad = \sqrt{8}\,, \quad > \sqrt{8}\,, \quad = \infty\,.$$

A) Si $\tang\varphi = 0$, h. e. sub aequatore, pro quovis η fit $\cos\alpha = 0$, ergo curva cum verticali OZW coincidit.

B) Si

$$\tang\varphi < \sqrt{8}\,, \quad \text{sive} \quad \varphi < 70^0\ 31'\ 44''\,,$$

maximus negativus valor ipsius $\cos\alpha$ ex (2) apparet esse

$$= -\frac{\tang\varphi}{\sqrt{8}}\,,$$

cui azimutho unicus ipsius $\tang\eta$ valor respondet a poli elevatione independens:

$$\tang\eta = \sqrt{\frac{1}{2}}\,, \qquad \eta = 35^0\ 15'\ 52''.$$

Substituto hoc valore in (3) prodit $\tang\omega = 0$; ergo curva in duobus punctis designatis per M, M', quorum utriusque altitudo $= 35^0\ 15'\ 52''$, et quae a circulo ZN ad utramque partem aequaliter distant, a circulis verticalibus per M, M' ductis tangetur. Hanc vero punctorum M, M' a ZN distantiam, quoniam pro ea sit

$$\cos\alpha = -\frac{\tang\varphi}{\sqrt{8}}\,,$$

eo minorem esse patet, quo magis φ ad limitem $70^0\ 31'\ 44''$ adpropinquat. Pro quovis alio negativo ipsius $\cos\alpha$ valore, qui maximo isto $-\frac{\tang\varphi}{\sqrt{8}}$ minor est, aequatio (2) duos ipsius $\tang\eta$ valores positivos exhibet, alterum $< \sqrt{\frac{1}{2}}$, alterum $> \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Curva igitur, postquam horizontem in puncto O sub angulo aequatoris altitudini aequali transgressa est, primum versus boream tendere incipit. Maximam deinde a primo verticali distantiam in puncto M nacta, cursum versus zenithum dirigit, ad primum verticalem iterum adpropinquat, eumque in zenitho ipso tangendo assequitur. Quo facto inversa ratione per punctum M' ad horizontis punctum W revertitur.

C) Si

$$\tang\varphi = \sqrt{8}\,,$$

maximus ipsius $\cos\alpha$ negativus valor hoc casu est $= -1$, cui, ut supra, respondet

$$\operatorname{tang} \eta = \sqrt{\frac{1}{2}} \,.$$

His vero valoribus in (3) substitutis, expressio pro $\operatorname{tang} \omega$, quia ejus numeratori inest factor $1 - 2 \operatorname{tang} \eta^2$, denominatori factor $\sin \alpha$, hinc indeterminata redditur. Ut igitur verus valor quantitatis

$$\frac{1 - 2 \operatorname{tang} \eta^2}{\sin \alpha} \,,$$

quam z vocabimus, eruatur, eliminetur $\operatorname{tang} \eta$ combinatione aequationum:

$$\frac{1 - 2 \operatorname{tang} \eta^2}{\sin \alpha} = z \,, \qquad \cos \alpha = \frac{-\operatorname{tang} \eta}{1 + 2 \operatorname{tang} \eta^2} \sqrt{8} \,,$$

invenieturque omnibus rite reductis et dividendo denique per $\sin \alpha^2$,

$$z^2 \cos \alpha^2 + 4 z \sin \alpha - 4 = 0 \,,$$

unde pro $\alpha = 180^0$ demanat

$$z = \pm 2 \,,$$

et facta in (3) substitutione:

$$\operatorname{tang} \omega = \pm \sqrt{3} \,, \qquad \omega = 60^0 \text{ et } 120^0 \,.$$

Liquet exinde, curvae puncta M, M' hoc casu in verticali ZN in unum coire, cujus altitudo itidem $= 35^0\, 15'\, 52''$; in hoc autem puncto curvam cuspides nancisci, ita ut ejus rami, ZM, OM, ZM', WM' inter se et cum meridiano ZN sex angulos aequales circum hoc punctum faciant.

D) Poli elevatione jam ultra $70^0\, 31'\, 44''$ accrescente, η pro $\alpha = 180^0$ duos valores sortitur:

$$\eta' < 35^0\, 15'\, 52'' < \eta'' .$$

Valorum autem, quos η pro quovis alio azimutho induit, alter erit $> \eta''$, alter $< \eta'$. Punctis igitur meridiani, quae his altitudinibus respondent, denotatis per m, m', ita ut sit

$$Nm = \eta' , \qquad Nm' = \eta'' ,$$

curva, quae praecedenti casu etiam ex partibus una OMW et altera in se ipsam redeunte ZMZ constans spectari poterat, nunc separatis his partibus antea in M contiguis, in partes OmW, et $Zm'Z$ discessit. Deinde pro $\alpha = 180^0$, quum hoc casu non sit simul $\operatorname{tang} \eta^2 = \frac{1}{2}$, fit

$$\operatorname{tang} \omega = \infty \,.$$

eaque de re meridianus NZ curvam in punctis m, m' sub rectis angulis secat. Omnes igitur paralleli intra puncta m, m' obvii minima azimuthi variatione destituti sunt.

Congruunt haec cum iis, quae supra (§. 4) de hoc casu disseruimus, minimam azimuthi variationem non pertinere ad parallelos, quorum declinatio $> \delta'$ et $< \delta''$. Deberet igitur esse:

$$\eta' = \delta' + \varphi - 90^0, \quad \eta'' = \delta'' + \varphi - 90^0,$$

ergo

$$\eta' + \delta'' = \eta'' + \delta' = \delta' + \delta'' + \varphi - 90^0 = 90^0$$

(vide notam ad §. 4), et dehinc

$$\cot \eta' = \operatorname{tang} \delta'' \quad \text{et} \quad \cot \eta'' = \operatorname{tang} \delta' .$$

Haec autem revera ita se habere, illico demonstrant, quae hic locum tenent, aequationes:

$$\operatorname{tang} \delta^2 - \operatorname{tang} \delta \operatorname{tang} \varphi + 2 = 0 ,$$

$$\cot \eta^2 - \cot \eta \operatorname{tang} \varphi + 2 = 0 .$$

Jam quo magis elevatio poli ad 90^0 accedit, eo magis punctum m' ad zenithum et punctum m ad horizontem adpropinquat, donec

E) sub polo ipso curvae pars circularis $Zm'Z$ in zenithum seu polum contrahatur, altera pars OmW cum horizonte coincidat.

§. 9. Superest, ut minimae azimuthi variationis, cujus de loco in sphaera determinando satis dictum arbitramur, nunc quantitatem ipsam, puta intra minutum secundum temporis, investigemus.

Generaliter autem variationem azimuthi intra elementum temporis $d\tau$ (§. 2) vidimus esse

$$da = \frac{\cos \delta \cos \pi}{\cos \eta} d\tau .$$

Hinc ut eruatur variatio minima et maxima, cujus hoc loco simul rationem habebimus, pro π et η valores harum variationum loca spectantes in formula ista substituendi erunt. Et primum quidem pro maxima variatione, quae in meridiano locum habet, erit

$$\pi = 0 , \quad \eta = \delta \pm (90^0 - \varphi) ,$$

unde

(1) in culminatione superiori: $da = \frac{\cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)} d\tau$,

(2) in culminatione inferiori: $da = \frac{\cos\delta}{\sin(\varphi + \delta)} d\tau$.

Pro minima contra variatione quum sit §. 6, (4):

$$\cos\pi = \frac{1}{2} \operatorname{tang}\delta \cot\eta ,$$

prodibit:

$$(3) \qquad da = \frac{\sin\delta}{2\sin\eta} d\tau = \frac{\sin\delta}{2 \operatorname{tang}\frac{1}{2}H} d\tau .$$

Maximum jam functio

$$\frac{\sin\delta}{\sin\eta} = \sin\varphi \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\sin\delta^2}{\sin\varphi^2}}\right),$$

constante poli elevatione, valorem assequitur pro $\delta = 0$, quo casu fit:

$$\frac{\sin\delta}{\sin\eta} = 2\sin\varphi \quad \text{et} \quad da = \sin\varphi\, d\tau .$$

Notari autem meretur hanc azimuthi variationem, quae in punctis horizontis orientali et occidentali locum tenet, eandem esse pro cujusvis alius stellae ortu et occasu. Statuendo enim $\eta = 0$ emergit (§. 2, (IV))

$$\cos\pi = \frac{\sin\varphi}{\cos\delta} .$$

et dehinc variatio azimuthi

$$da = \cos\delta \cos\pi \sec\eta\, d\tau = \sin\varphi\, d\tau$$

a declinatione independens.

Minimus ipsius $\frac{\sin\delta}{\sin\eta}$ valor intelligitur esse

$$= \sin\varphi \quad \text{pro} \quad \delta = \varphi \quad \text{et} \quad \eta = 90^\circ .$$

Minima igitur minimarum variationum est

$$da = \frac{1}{2}\sin\varphi\, d\tau ,$$

zenithum occupat, ideoque eundem locum, quem variatio azimuthi ejusdem paralleli maxima. Haec vero e formula (1) reperitur $= \infty\, d\tau$. Cujus quidem dissensus ratio in eo consistit, quod, si de

maxima variatione quaeritur, zenithum pro meridiani puncto habendum est, ideoque ejus azimuthum $= 0$, vel $= 180^\circ$ ponendum. Pro minima contra variatione zenithum primi verticalis punctum esse vidimus (§. 8), et dehinc ejus azimuthum $= 90^\circ$ vel $= 270^\circ$. Ex quo consequitur maximam hoc loco variationem et minimam toto quadrante inter se differre, verum igitur ipsius $\infty\, d\tau$ valorem esse:

$$= 90^\circ \pm \frac{1}{2} \sin \varphi\, d\tau\ .$$

§. 10. Finem huic commentationi tabula imponat, exhibens pro elevatione poli Lipsiensi $\varphi = 51^\circ\ 19'\ 14''$, et quinis declinationum gradibus, maximas et minimas azimuthi intra temporis minutum secundum variationes. Divisimus hanc tabulam in tres partes, quarum prima pro australibus sive negativis declinationibus complectitur maximas variationes, minimis infra horizontem obversantibus. Secunda pars pro declinationibus positivis et altitudine poli minoribus maximas et minimas variationes continet una cum angulis $\tau_{,}$, τ, α, π, qui variationum minimarum in parallelis loca definiunt. Tertia denique exhibet variationes maximas azimuthi stellarum, quarum declinationes elevationem poli superant, et quibus minimas variationes deesse supra ostensum est.

Maximae variationes in culminatione superiori ab iis, quae in inferiori obveniunt, distinctae sunt litteris S, I. Hinc inde a maxima negativa, quae Lipsiae adhuc observari potest, declinatione usque ad positivam illi aequalem inferiores transitus, quandoquidem infra horizontem locum tenent, in tabula omissae sunt. Facillime tamen supplentur, quum pro $\pm\delta$ variatio in transitu superiori aequalis sit variationi pro $\mp\delta$ in transitu inferiori. Sic paralleli 10° ab aequatore distantis maximae variationes sunt $22''4$, $16''8$, minima $11''6$.

Caeterum variationibus pro $\delta > \varphi$ maximis in superiori culminatione signum negativum tributum est, quoniam his in locis azimuthum decrescit. Ad parallelum enim, qui intra polum et zenithum transit, duo circuli verticales tangentes duci possunt, eritque in paralleli parte ab his tangentibus intercepta inferiori azimuthi variatio positiva, in superiori negativa. In ipsis igitur tactionis punctis variatio nihilo aequalis est, et quamvis absolute, non tamen algebraice pro minima habenda. Algebraice enim minima horum parallelorum variatio est maxima negativa in culminatione superiori.

Tabula pro $\varphi = 51^\circ\ 19'\ 14''$.

δ	Maximum S.	Maximum I.	Min.	τ	η	α	π
-35°	$+12''3$	+ infra horizontem					
30	13·1						
25	14·0						
20	14·9						
15	15·8						
10	16·8						
5	18·0						
0	19·2						
$+0^\circ$	$+19''2$	infra horizontem	$+11''7$	$90^\circ\ 0'$	$0^\circ\ 0'$	$90^\circ\ 0'$	$38^\circ\ 41'$
5	20·7		11·7	91 6	3 13	94 0	38 44
10	22·4		11·6	92 8	6 28	97 56	38 56
15	24·5		11·4	92 52	9 49	101 46	39 18
20	27·1		11·1	93 32	13 20	105 26	39 52
25	30·7		10·8	93 38	17 6	108 51	40 44
30	35·7		10·4	92 58	21 14	111 53	42 2
35	43·7		9·8	91 7	25 58	114 22	44 1
40	58·5	$+11''5$	9·2	87 11	31 41	115 57	47 11
45	96·4	10·7	8·3	79 1	39 30	115 53	52 40
50	418·4	9·8	7·0	55 58	55 22	110 23	65 42
φ		9·6	5·8	0 0	90 0	90 0	90 0
$+55^\circ$	$-134''1$	$+9''0$					
60	49·7	8·1					
65	26·8	7·1					
70	16·0	6·0					
75	9·7	4·8					
80	5·4	3·5					
85	2·4	1·9					
90	0·0	0·0					

Selbstanzeige der vorstehenden Abhandlung von A. F. Möbius über die kleinsten Azimuthsänderungen

im dritten Bande der *Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften*, herausgegeben von B. von Lindenau und J. G. F. Bohnenberger, Tübingen 1817. (Heft 1, S. 82—87.)

Veranlassung zur Bearbeitung des in der kleinen Schrift *De minima variatione Azimuthi commentatio*, *Lipsiae* 1816, behandelten Gegenstandes gaben mir die nicht ganz richtigen Angaben der Herren Delambre und Biot, welche bei Auseinandersetzung der Methode, das Azimuth eines irdischen Objects durch Beobachtungen der Entfernung desselben von einem Himmelskörper zu bestimmen, die langsamste Veränderung des Azimuths desselben, welche hierzu am vortheilhaftesten ist, bei seinem Durchgang durch den Stundenkreis von 90^0 annehmen*). Ich wählte daher die von mir darüber angestellten Untersuchungen als Stoff zur obigen kleinen Gelegenheitsschrift, zeigte darin die Ungründlichkeit jener Behauptungen über den Ort der kleinsten Azimuthsänderungen, gab sodann Formeln zur exacten Bestimmung dieses Ortes und der in ihm stattfindenden langsamsten Aenderung des Azimuths, und fügte zuletzt noch eine Tafel dieser Bestimmungen für die Leipziger Polhöhe bei.

Aufgemuntert durch die hochgeehrten Herren Herausgeber dieser Zeitschrift, denen ich im vorigen Jahre diese Abhandlung vorzulegen die Ehre hatte, theile ich die Resultate derselben und ihre nähere Entwickelung hier kürzlich mit.

Offenbar ergeben sich die Bestimmungen der kleinsten Azimuthsänderung für gegebene Polhöhe und Declination, wenn man Polhöhe, Declination und das erste Differential des Stundenwinkels constant, und das zweite Differential des Stundenwinkels Null setzt. Die Entwickelung dieses zweiten Differentials findet sich, auf ähnliche Weise ausgeführt, schon in der, mir zur Zeit, als ich jenen Aufsatz schrieb, noch unbekannten, trefflichen Abhandlung des Herrn Steuerrath

---

*) Delambre, *Base du système métrique*, p. 151—156; Biot, *Astronomie physique*, Tome I, p. 318.

Soldner: *Neue Methode beobachtete Azimuthe zu reduciren*, nur dass ich zur Abkürzung der Rechnung noch den parallaktischen Winkel zu Hülfe nahm. Bedeuten nämlich φ die Polhöhe, δ, η, τ, α, π Declination, Höhe, Stundenwinkel, Azimuth (vom Südpunkt an gerechnet) und parallaktischen Winkel des Sternes, so ist

$$\operatorname{tang}\delta\cos\varphi + \cot\alpha\sin\tau = \sin\varphi\cos\tau\ .$$

Diese Formel nach τ und α differentiirt giebt:

$$d\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sin\tau}\{\sin\varphi\sin\alpha\sin\tau + \cos\alpha\cos\tau\}\,d\tau\ ,$$

und wenn man darin

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\tau} = \frac{\cos\delta}{\cos\eta}$$

setzt und für

$$\sin\varphi\sin\alpha\sin\tau + \cos\alpha\cos\tau$$

den ihm gleichen

$$\cos\pi = \frac{\sin\varphi - \sin\eta\sin\delta}{\cos\eta\cos\delta}$$

substituirt:

$$d\alpha = \frac{\sin\varphi - \sin\delta\sin\eta}{\cos\eta^2}\,d\tau\ .$$

Hieraus findet sich durch eine zweite Differentiation:

$$d^2\alpha = -\frac{\sin\delta\sin\eta^2 - 2\sin\varphi\sin\eta + \sin\delta}{\cos\eta^4}\cos\eta\,d\eta\,d\tau\ ,$$

also, wenn man für $\cos\eta\,d\eta$ seinen aus der Differentiation der Formel

$$\sin\eta = \cos\tau\cos\varphi\cos\delta + \sin\varphi\sin\delta$$

hergeleiteten Werth

$$\cos\eta\,d\eta = -\sin\tau\cos\varphi\cos\delta\,d\tau$$

setzt:

$$\frac{d^2\alpha}{d\tau^2} = \frac{\sin\delta\sin\eta^2 - 2\sin\varphi\sin\eta + \sin\delta}{\cos\eta^4}\sin\tau\cos\varphi\cos\delta\ .$$

Annullirt man nun diesen zweiten Differentialquotienten, so erhält man entweder $\sin\tau = 0$, also den Stern im Meridian, wo die Aenderung des Azimuths bekanntlich ein Maximum ist, oder

$$(\odot)\qquad \sin\delta\sin\eta^2 - 2\sin\varphi\sin\eta + \sin\delta = 0\ ,$$

eine Formel, die zur Bestimmung des Ortes der langsamsten Aenderung dient und den übrigen Untersuchungen zu Grunde gelegt wurde.

Zuerst folgt hieraus, nach einigen leichten Transformationen, für die Berechnung der Höhe:

$$\operatorname{tang}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\eta) = \sqrt[4]{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi - \delta)\cot\tfrac{1}{2}(\varphi + \delta)}\,, \tag{1}$$

und noch kürzer, wenn man die Höhe des Sternes im ersten Vertical, gleich H, einführt, wo $\sin H = \dfrac{\sin\delta}{\sin\varphi}$:

$$\sin\eta = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}H\,, \tag{2}$$

oder

$$\operatorname{tang}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\eta) = \sqrt{\operatorname{tang}(45^\circ - \tfrac{1}{2}H)}\,. \tag{3}$$

Zur leichten Berechnung der Winkel des parallaktischen Dreiecks, ohne mich, wie dort geschah, auf die weitere Einführung der Hülfswinkel dieses Dreiecks, wenn der Stern im ersten Vertical steht, einzulassen, gebe man der Gleichung (⊙) folgende Formen:

$$\sin\eta\,(\sin\varphi - \sin\eta\sin\delta) + \sin\varphi\sin\eta - \sin\delta = 0\,, \tag{A}$$

$$\sin\delta\cos\eta^2 + 2(\sin\varphi\sin\eta - \sin\delta) = 0\,. \tag{B}$$

Hierin für

$$\sin\varphi - \sin\eta\sin\delta \quad \text{und} \quad \sin\varphi\sin\eta - \sin\delta$$

die bekannten Werthe

$$\cos\pi\cos\eta\cos\delta \quad \text{und} \quad \cos\alpha\cos\varphi\cos\eta$$

substituirt, erhält man aus (A) resp. (B)

$$\sin\eta\cos\pi\cos\delta + \cos\alpha\cos\varphi = 0\,, \tag{4}$$

$$\sin\delta\cos\eta + 2\cos\alpha\cos\varphi = 0\,, \tag{5}$$

folglich, wenn man (5) durch (4) dividirt:

$$\operatorname{tang}\delta = 2\cos\pi\operatorname{tang}\eta\,, \tag{6}$$

und wenn man in (4) und (5) resp.

$$\frac{\cos\delta}{\cos\varphi} = \frac{\sin\alpha}{\sin\pi} \quad \text{und} \quad \frac{\cos\eta}{\cos\varphi} = \frac{\sin\tau}{\sin\pi}$$

setzt:

$$\sin\eta\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\pi = 0\,, \tag{7}$$

$$\sin\delta\sin\tau + 2\cos\alpha\sin\pi = 0\,. \tag{8}$$

Anlangend die Relationen, welche zwischen φ und δ stattfinden müssen, damit die aus ihnen nach den gegebenen Formeln zu berechnenden Grössen η, τ, α, π reelle Werthe erhalten, so ist erstens

aus (5) klar, dass für die Realität des Werthes von η nur erfordert wird, dass $\sin\varphi^2 > \sin\delta^2$, oder dass die Polhöhe absolut grösser als die Declination ist. Was zweitens die Bedingung für die Realität der Winkel τ, α, π des parallaktischen Dreiecks betrifft, so ist es hinreichend, diese Bedingung nur für einen Winkel, z. B. für α, zu entwickeln, indem sie für die beiden übrigen nothwendig dieselbe sein muss.

Man substituire in dieser Absicht in der bekannten Gleichung

$$\cos\alpha = \frac{\sin\varphi\sin\eta - \sin\delta}{\cos\varphi\cos\eta}$$

für $\sin\delta$ seinen Werth aus der Formel (5), so erhält man:

$$\cos\alpha = -\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\cot\eta + 2\operatorname{tang}\eta} .$$

Mithin muss $\operatorname{tang}\varphi$ zwischen den beiden sich gleichen, aber entgegengesetzten Grenzen $\pm(\cot\eta + 2\operatorname{tang}\eta)$ enthalten sein. Erreicht $\operatorname{tang}\varphi$ dieselben, so wird $\cos\alpha = \pm 1$, folglich $\cos\pi = \pm 1$, mithin nach der Formel (6)

$$\cot\eta = \pm 2\cot\delta .$$

Dies substituirt, werden jene Grenzen

$$\pm(\operatorname{tang}\delta + 2\cot\delta) ,$$

so dass also $\operatorname{tang}\varphi$ absolut kleiner als $(\operatorname{tang}\delta + 2\cot\delta)$ sein muss, wenn die Winkel des Dreiecks mögliche Werthe erhalten sollen.

Es ergiebt sich hieraus, dass für

$$\operatorname{tang}\varphi < \sqrt{8} \quad \text{oder} \quad \varphi < 70^\circ\, 31'\, 44''$$

diese Bedingung immer erfüllt wird; dass dagegen für Polhöhen, welche die angegebene Grenze überschreiten, je nachdem die Declinationen ausserhalb oder innerhalb der Wurzeln der Gleichung

$$\operatorname{tang}\delta^2 - \operatorname{tang}\delta\operatorname{tang}\varphi + 2 = 0 \text{*}) ,$$

---

*) Heissen die Wurzeln dieser Gleichung $\operatorname{tang}\delta'$ und $\operatorname{tang}\delta''$, so findet sich $\delta' + \delta'' = 180^\circ - \varphi$. Bezeichnet man ferner die diesen Declinationen zugehörigen Höhen mit η', η'', so hat man in diesem Falle, wo

$$\alpha = 180^\circ , \qquad \eta' = \delta' + \varphi - 90^\circ , \qquad \eta'' = \delta'' + \varphi - 90^\circ ,$$

auch

$$\eta' + \delta'' = \eta'' + \delta' = \delta' + \delta'' + \varphi - 90^\circ = 90^\circ ,$$

also

$$\cot\eta' = \operatorname{tang}\delta'' , \qquad \cot\eta'' = \operatorname{tang}\delta' .$$

woraus ebenfalls die Identität der beiden Bedingungen

$$\operatorname{tang}\varphi < \cot\eta + 2\operatorname{tang}\eta \quad \text{und} \quad \operatorname{tang}\varphi < \operatorname{tang}\delta + 2\cot\delta$$

erhellet.

absolut genommen, enthalten sind, eine langsamste Aenderung des Azimuths stattfindet oder wegfällt.

Was endlich den Werth der langsamsten Aenderung selbst betrifft, so ist ihr allgemeiner Ausdruck

$$da = \cos\delta \cos\pi \sec\eta \, d\tau \; .$$

Setzt man hierin für $\cos\pi$ nach (6) seinen Werth

$$\cos\pi = \frac{1}{2} \operatorname{tang}\delta \cot\eta \; ,$$

so wird

$$da = \frac{\sin\delta}{2 \sin\eta} d\tau \; ;$$

und wenn man für $\sin\eta$ den aus der Gleichung $(\odot)$ entnommenen Werth substituirt:

$$da = \frac{1}{2} \sin\varphi \left\{ 1 + \sqrt{1 - \frac{\sin\delta^2}{\sin\varphi^2}} \right\} d\tau \; .$$

Der grösste Werth dieses da ist daher gleich $\sin\varphi \, d\tau$ für $\delta = 0$, und der kleinste gleich $\frac{1}{2} \sin\varphi \, d\tau$ für $\delta = \varphi$.

Um jetzt nach vollständiger Auseinandersetzung alles Dessen, was zur Bestimmung der kleinsten Azimuthsänderung nöthig ist, über die grössere oder geringere Unrichtigkeit der Annahme des Ortes derselben im Stundenkreis von $90°$, wie Delambre und Biot a. a. O. thaten, ein Urtheil zu fällen, so ergiebt sich in der That aus dem Vorigen, dass für $\delta = 0$, und wenn $\cos\delta = \cot\varphi$ (also bei der Leipziger Polhöhe $\varphi = 51° \, 19'$ für $\delta = 36° \, 49'$), der Ort der langsamsten Aenderung im Stundenkreis von $90°$ selbst liegt, dass ferner für dazwischen fallende Declinationen der Ort von diesem Stundenkreise in unseren Gegenden nur wenige Grade nordwärts abliegt*). Dagegen nimmt der Stundenwinkel des Ortes für Declinationen, welche den letzteren Werth übertreffen, fortwährend ab, und verschwindet zuletzt, wenn die Declination der Polhöhe selbst gleich wird. Und sodann findet auch jene geringe Entfernung des Orts vom Stunden-

---

*) Die Declination für den am meisten nach Norden entfernt liegenden Ort findet sich für eine gegebene Polhöhe durch Auflösung der Gleichung:

$$\operatorname{tang}\delta^6 - 3 \operatorname{tang}\delta^2 \operatorname{tang}\varphi^2 + \operatorname{tang}\varphi^2 - \operatorname{tang}\varphi^4 = 0 \; ,$$

und sodann der Stundenwinkel selbst aus der Formel

$$\cos\tau = \frac{\operatorname{tang}\delta^3}{\operatorname{tang}\varphi} \; .$$

Für $\varphi = 51° \, 19'$ wird $\delta = 23° \, 19'$ und $\tau = 93° \, 40'$.

winkel von 90° bei nicht allzugrossen Declinationen, in Ländern, die dem Aequator oder den Polen nahe liegen, durchaus nicht mehr statt.

Noch muss ich bemerken, dass, wie ich erst kürzlich gegen mein Vermuthen belehrt wurde, schon Moivre den Ort der langsamsten Azimuthsänderung in Untersuchung genommen hat, nämlich in seinen *Miscellan. analyt.* libr. VII, cap. 2, probl. 3. Er bedient sich dabei einer stereographischen Projection, und sein Resultat ist die obige Formel (3).

Beobachtungen

auf der

Königlichen Universitäts-Sternwarte

zu Leipzig

mit vorausgeschickter Beschreibung der jetzigen Einrichtung dieser Sternwarte

und einem Anhange geometrischen Inhalts

von

August Ferdinand Möbius

ausserordentl. Professor der Astronomie und Observator.

Mit einem Kupfer.

Leipzig

bei Carl Cnobloch

1823.

Der geometrische Anhang findet sich im ersten Bande der *Gesammelten Werke* S. 389—398 abgedruckt.

Eines der vielen glänzenden Denkmäler, welche unser erhabener König seiner weisen Fürsorge und Freigebigkeit für die Wissenschaften gesetzt hat, ist die Leipziger Universitätssternwarte. Sie wurde in den Jahren 1787 bis 1790 auf dem, am südwestlichen Ende der Stadt gelegenen, Thurme des Schlosses Pleissenburg erbauet*). Die Höhe dieses Thurmes über dem Schlosshof, das Gebäude der Sternwarte nicht mit gerechnet, beträgt 63½ Leipziger Ellen. Noch vor der Mitte dieser Höhe erhebt er sich über die angrenzenden Gebäude als ein vollkommener Cylinder mit einem Durchmesser von 30, und einer Mauerstärke von 4½ Ellen.

Auf diesem Thurme wurde nun die Sternwarte selbst angelegt als ein runder Saal von 23 Ellen 14 Zoll Durchmesser und 11 Ellen 17 Zoll Höhe, mit acht, nach den vier Haupt- und vier ersten Nebengegenden gerichteten, Ausgängen, welche auf die mit einem eisernen Geländer versehene, 3 Ellen 8 Zoll breite Galerie führen. Im Umkreise des Saales wurden sechs kleine Cabinete eingerichtet, je zwei nach Mittag, Morgen und Abend, von denen die letzteren vier die grösseren astronomischen Instrumente, als einen nördlichen und einen südlichen Mauerquadranten, einen Zenithsector und ein Mittagsfernrohr erhalten sollten. — Der Saal wurde mit einer Kuppel geschlossen und auf diese noch ein kleinerer, mehr zum Genuss der Aussicht als zu astronomischen Beobachtungen bestimmter, Saal von ebenfalls cylindrischer Form gesetzt, dessen Plattform, als der höchste, be-

---

*) Schon im Jahre 1711 hatte die philosophische Facultät auf die Erbauung eines *Observatorii mathematici* angetragen. Da man aber keinen tauglichen Ort hierzu ausmitteln konnte, so verzögerte sich die Ausführung.

Die erste Idee, auf dem Thurme der Pleissenburg eine Sternwarte aufzuführen, verdanken wir dem berühmten Astronomen, Abbé Hell, welcher bei seiner Durchreise durch Leipzig im Jahre 1769 den Thurm bestiegen und den Ausspruch gethan hatte, dass er noch keinen schicklicheren Ort zur Errichtung einer Sternwarte gesehen habe.

Siehe darüber mit mehreren: Schulze, *Abriss einer Geschichte der Leipziger Universität.* Leipz. 1802, S. 106. Dolz, *Versuch einer Geschichte Leipzigs.* Leipz. 1818, S. 433.

quem zugängliche Punkt Leipzigs, 94 Ellen über dem Niveau des Schlosshofes erhaben liegt.

Der Entwurf zu diesem Baue war von den Professoren Borz und Hindenburg gemacht, und die Ausführung von dem Baudirector Dauthe besorgt worden.

Mit Anfange des Jahres 1794 ward die Sternwarte der Universität übergeben und dabei der Professor Rüdiger als Observator, ingleichen zwei Studiosi als Gehülfen, von denen der eine, H. Wechsler, noch jetzt dieses Amt mit Eifer begleitet, und ein Aufwärter angestellt*).

Das nächste Erforderniss der neuen Sternwarte waren gute Instrumente. Der Ankauf der gedachten Meridianinstrumente erfolgte nicht, unter Anderem wahrscheinlich aus dem Grunde, weil man in den nächstfolgenden Jahren die Vorzüge ganzer Kreise vor Quadranten und anderen Sectoren immer mehr einsehen lernte. Statt deren wurde daher ein 17-zölliger Kreis von Troughton und nächstdem ein Spiegelsextant von demselben Künstler, eine Pendeluhr von Vulliamy, Achromate von Cary und Berge, ein Cometensucher von Ramsden, und andere Instrumente angeschafft. Auch wurde die Sternwarte durch den mathematischen Salon zu Dresden mit mehreren Instrumenten, vorzüglich Fernröhren, bereichert.

Eine ausgezeichnet glückliche Epoche für die Leipziger Sternwarte war das Jahr 1803, wo ihr der, als Sächsischer Gesandter in London angestellte, Geheime Rath und Graf Hanns Moritz von Brühl einen grossen Theil seiner trefflichen Sammlung astronomischer Instrumente und Bücher, von zweien ihm zugehörigen Observatorien in England, noch bei seinem Leben auf die grossmüthigste Art als Geschenk zueignete**). Die vorzüglichsten unter diesen Instrumenten sind ein vierfüssiges Mittagsfernrohr von Ramsden und ein zweifüssiger Kreis von Troughton, und es war zur vollendeten Einrichtung unserer Sternwarte nur noch nöthig, diesen Instrumenten eine solide Aufstellung zu verschaffen.

Allein bald darauf erfolgten die insbesondere für Leipzig so verhängnissvollen Jahre des Krieges, und die unglücklichen dadurch herbeigeführten Verhältnisse traten auch hier hemmend in den Weg, so dass die trefflichen Instrumente noch lange Zeit ungenutzt bleiben mussten, und weder der (1809) verewigte Rüdiger, noch auch mein verdienstvoller Vorgänger (1811—1816) und verehrter Freund, der

---

*) Ausführlichere Nachricht über die ganze Einrichtung findet man in Hindenburg's *Archiv der reinen und angewandten Mathem.* 1. Band. S. 119 u. folgg.

**) Vergl. *Monatl. Corresp.* VII. Band, Seite 167 und VIII. Bd., S. 270.

jetzige Professor der Mathematik Mollweide, die Freude hatten, die Sternwarte in den erwünschten Stand gesetzt zu sehen.

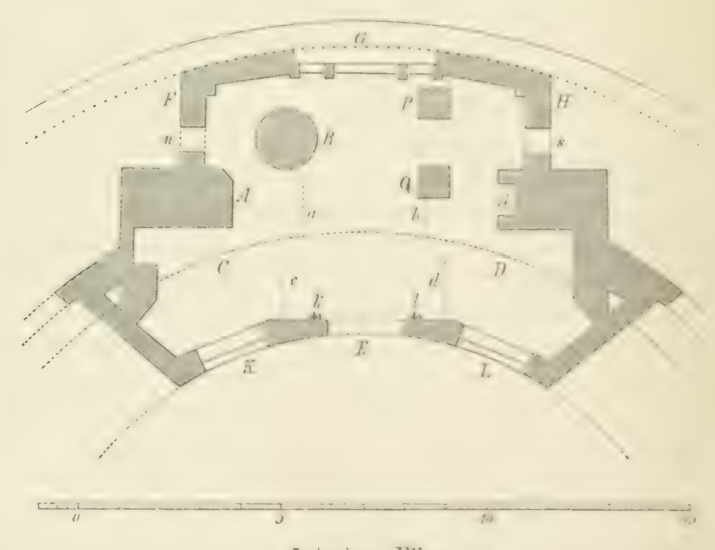
Erst im Jahre 1817 konnten zu dem für die Aufstellung der Instrumente erforderlichen Baue thätige Anstalten getroffen werden. Nachdem ich das Jahr vorher als Professor und Observator angestellt worden war, wurde ich durch ein Rescript vom 22. Januar 1817 beauftragt, Vorschläge einzureichen, »wie nunmehr die Sternwarte zu mehrerer Gangbarkeit zu bringen und für ihren Zweck nutzbarer zu machen sein möchte.« Es begünstigten mich hierbei die Erfahrungen und Beobachtungen, die ich während einer, auf allerhöchste Veranlassung und königliche Kosten im J. 1816 unternommenen, astronomischen Reise gemacht hatte. Dadurch war mir zugleich das seltene Glück zu Theil geworden, die meisten ausgezeichneten Mathematiker und Astronomen Deutschlands persönlich kennen zu lernen, und ich freue mich, ihnen bei dieser Gelegenheit für die so mannigfachen von ihnen erhaltenen Belehrungen und praktischen Winke meine dankbaren Gesinnungen öffentlich bezeigen zu können.

Wie schon erinnert, waren dauerhafte Aufstellung des Ramsden-schen Mittagsfernrohres und des Troughton'schen Kreises die Hauptpunkte, welche bei den zu machenden Vorschlägen berücksichtigt werden mussten. Die zwei Pfeiler für das erstere und die Säule für den letzteren mussten nothwendig ohne alle Verbindung mit dem Fussboden des Saales in die Thurmmauer selbst eingesetzt werden und, damit die Meridianspalten ununterbrochen fortgeführt werden konnten, entweder auf die Morgen- oder die Abendseite der Mauer zu stehen kommen. Schon früher hatte man daher den Vorschlag gethan, das Mittagsfernrohr auf der Morgen- und den Kreis auf der Abendseite aufzustellen, weil die Thurmmauer nicht breit genug ist, um, wie sonst gewöhnlich, beide Instrumente neben einander zu setzen. Allein diese Trennung der beiden Meridianinstrumente um den ganzen Durchmesser des Thurmes musste Nachtheile von mancherlei Art herbeiführen. Ich hielt es daher für gerathener, beide Instrumente auf einer Seite allein, und zwar auf der Ostseite wegen der häufigen Stürme von Abend her, schief hinter einander aufzustellen, so dass jedes seine eigene Meridianspalte erhielt.

Ich theilte meine Ideen über dieses und noch mancherlei Abänderungen, die an dem Gebäude der Sternwarte vorzunehmen mir nöthig schien, mehreren Astronomen mit. Unter den mir darauf bereitwilligst zugesendeten belehrenden Erwiederungen war mir insbesondere der Vorschlag des Herrn Steuerrath Soldner, Director der Sternwarte zu Bogenhausen bei München, sehr willkommen, nach welchem gedachte zwei Hauptinstrumente statt schief, gerade hinter

einander gestellt werden sollten. Die Folge hat die Trefflichkeit dieses Vorschlags vollkommen bewährt, indem der von mir vor Soldner's Versicherung befürchtete Nachtheil, als ob bei Beobachtungen in der Nähe des Horizonts das eine Instrument dem anderen oft hinderlich fallen müsste, nur selten eintritt und durch den Vortheil, dass beide Instrumente nunmehr eine gemeinschaftliche Meridianspalte erhielten, gar sehr überwogen wird. Dir. Soldner hatte noch die Güte, die umständliche Darlegung seines Vorschlags mit mehreren praktischen Bemerkungen zu begleiten, wofür ich mich ihm, so wie den anderen Herren Astronomen, welche mich mit ihrem schätzbaren Rath unterstützten, stets dankbar verbunden achten werde.

Mein, durch des Director Soldner Vorschlag verbesserter, Plan fand Genehmigung und wurde in den darauf folgenden Jahren 1818 bis 1821 unter Leitung der Hrn. Oberlandbaumeister Barth und Landbauconducteur Königsdörfer wirklich ausgeführt, so wie auch in dieser Zeit die ganze Sternwarte wegen des, an nicht wenigen Stellen durch die Witterung erlittenen, Schadens einer sehr bedeutenden Reparatur unterworfen wurde.



Leipziger Ellen.

Um eine deutliche Vorstellung von dem zu den Meridianbeobachtungen eingerichteten Cabinet zu geben, habe ich den Grundriss desselben beigefügt. In diesem sind *A* und *B* die Theile der östlichen Wand des Gebäudes, welche vordem bis *a* und *b* sich

näherten und daselbst den östlichen Ausgang auf die Galerie bildeten. *C* und *D* waren zwei Cabinete, in *c* und *d* die Eingänge zu denselben, von denen *C* für einen nördlichen Mauerquadranten und *D* für ein Mittagsfernrohr, freilich nur in der südlichen Hälfte des Meridians zu gebrauchen, bestimmt waren. Diese beiden Cabinete wurden nun durch Wegnahme der Wände bei *c* und *d* in Eines umgeschaffen, welches in *E* seinen Eingang erhielt und durch Zufügung der Wände *F*, *G*, *H*, über die Galerie hinweg bis an das eiserne Geländer in *G* fortgeführt wurde. Damit der Stand der Instrumente um so weniger von dem Hin- und Hergehen gefährdet wäre, wurde 8 Zoll hoch über dem steinernen Fussboden der Thurmmauer ein gedielter angelegt. Die Höhe des vorderen Theils *CD* des Cabinets über diesem breternen Fussboden beträgt $6\frac{3}{4}$ Ellen. Die 13 Ellen hohe, von *A* bis *B* durchbrochene östliche Hauptwand des Gebäudes wurde in der Höhe von $3\frac{5}{8}$ Ellen durch einen gedrückten Bogen wieder vereinigt. Der neu angebaute Theil ist in der Mitte $6\frac{1}{6}$ Ellen hoch und von da nach den Seiten etwas abgeflacht. In *n* und *s* erhebt sich $2\frac{1}{2}$ Ellen hoch über dem breternen Fussboden die Meridianspalte und geht ohne Unterbrechung durch die Decke fort. Sie zu verschliessen, dienen zwei verticale und zwei Dach-Klappen, von denen letztere durch einen über der Decke angebrachten Hebelmechanismus, mittelst zweier Kurbeln bei *k* und *l* auf- und niedergewunden werden können. In *G* ist ein dreitheiliges Fenster, das aber für gewöhnlich mit Wachsleinwand verhangen ist. Auch kann noch durch die beiden auf den Saal gehenden, mit Laden verschliessbaren Fenster *K* und *L* das Cabinet erhellt werden.

In *P* und *Q* stehen die Pfeiler für das Mittagsfernrohr und in *R* die Säule für den Kreis. Erstere sind zwei abgestumpfte Pyramiden mit quadratförmiger Basis. Die Seiten der unteren Flächen betragen 19 Zoll und die der oberen 12 Zoll. Die Höhe der Pyramiden ist $4\frac{1}{2}$ Ellen, wovon 3 Ellen über dem gedielten Fussboden hervorragen und folglich $1\frac{1}{6}$ Ellen in die Thurmmauer eingelassen sind. Der Cylinder hat $1\frac{1}{3}$ Ellen im Durchmesser, seine ganze Höhe beträgt $2\frac{1}{2}$ Ellen und die Höhe seiner oberen Fläche über dem Fussboden 1 Elle 14 Zoll. Sämmtliche drei Säulen sind aus gutem, festem Sandstein von Mannsdorf (unweit Zeitz), und wurden in die Thurmmauer, welche sich von dem Kreis durch *G* bis an den Kreis *CD* erstreckt, mit aller möglichen Sorgfalt eingesenkt. — In der Nische *B* ist die Uhr aufgestellt, deren Rückwand durch Schrauben mit der Wand des Gebäudes auf das Festeste verbunden wurde.

Noch eine Veränderung liess ich an der Mittagsseite der Sternwarte vornehmen. Hier waren rechts und links von dem Hauptaus-

gange auf die Galerie zwei Cabinete, von der Lage und Grösse, wie die vorhin gedachten *C* und *D*. Von diesen wurde das Cabinet rechter Hand mit dem mittleren Raum zwischen beiden zu einem grösseren Zimmer vereinigt, in welchem Beobachtungen am südlichen Himmel, zu denen keine Instrumente von unveränderlichem Stand nöthig sind, als Beobachtungen von Finsternissen, Sternbedeckungen, u. s. w., angestellt werden können. Das Cabinet linker Hand, in welchem ein kleiner Windofen befindlich ist, wurde, als Arbeitszimmer für den Astronomen bei längerem Aufenthalt auf dem Thurme, beibehalten.

Ich komme nunmehr zu den Instrumenten selbst, von denen ich diejenigen, welche in dem östlichen Cabinet aufgestellt sind, als die vorzüglichsten zuerst beschreiben will.

Das Mittagsfernrohr von Ramsden. (B.)*). Das Objectiv desselben hat 3 Zoll im Durchmesser und 45·3 Zoll Brennweite. In dem Deckel des Objectivs ist eine kleinere ebenfalls verschliessbare Oeffnung von $\frac{5}{8}$ Zoll Durchmesser. Ich brauche sie Nachts bei Sternen der ersten bis dritten Grösse, wodurch ihnen das zu starke und nicht völlig concentrirte Licht benommen wird, und die Fädenantritte sich schärfer beobachten lassen. Das im Brennpunkte des Objectivs befindliche Fadennetz besteht aus einem horizontalen und drei verticalen Silberfäden, deren gegenseitige Abstände in runder Zahl 30″ in Zeit für Sterne im Aequator betragen. Ich sah mich mehrmals genöthigt, neue Fäden einspannen zu lassen.

Von den beiden zum Fernrohr gehörigen Ocularen vergrössert das eine 40-, und das andere 73-mal**). Doch brauche ich nur die

---

*) Dieses und die folgenden mit (B.) bezeichneten Instrumente gehören zu dem Geschenk des Grafen Brühl.

**) Ich fand diese Vergrösserungszahlen, so wie die weiter hin anzugebenden, nach einer ähnlichen Methode, wie die, welche Littrow im ersten Theile seiner *Astronomie*, Seite 356, als von H. Hebel, einem jungen Mathematiker in Wien, erfunden anführt. Da dieses Lehrbuch wohl nicht allen Lesern dieser Blätter zur Hand ist, und jenes Verfahren seiner Einfachheit und Genauigkeit wegen Empfehlung verdient, so dürfte eine kurze Mittheilung desselben Mehreren willkommen sein.

Man richte das Fernrohr nach einem entfernten Gegenstand des Horizonts, und stelle gleich vor das Ocular ein unbelegtes Spiegelglas vertical und gegen die Axe des Rohrs unter einem Winkel von ungefähr 45° geneigt, so wird man mit dem, nahe zwischen das Ocular und den Spiegel gebrachten, Auge das durch das Rohr auf den Spiegel fallende und von diesem zurückgeworfene, Bild des Gegenstandes nothwendig unter eben dem vergrösserten Winkel, wie durch das Rohr unmittelbar, erblicken. Die Grösse dieses Winkels kann man nun leicht bestimmen,

schwächere Vergrösserung, weil bei Anwendung der stärkeren die beiden Seitenfäden gegen ihre Enden hin vom mittleren abwärts gekrümmt und farbig erscheinen, auch die Sterne am Tage bei weitem nicht mit der Deutlichkeit (oft auch gar nicht) sich zeigen, welche die schwächere gewährt. Bei dieser schwächeren Vergrösserung beträgt der Durchmesser des Sehfeldes einen Grad. Die optische Kraft des Rohres ist so stark, dass ich den Polaris auch zur Mittagszeit ziemlich gut sehen kann. Den Stern von der 3—4-ten Grösse, β Aquilae, habe ich noch den 28. November vorigen Winters in seiner Culmination, also 3 U. 19 Min. Nachmittags beobachtet. Vergl. *Königsberger Beobachtungen*, erste Abtheil., Seite III.

Die horizontale Axe des Rohrs ist 34 Zoll lang, die Zapfen 0·8 Zoll dick. Die Zapfen sind von Rothguss, so wie auch die Pfannen. Um die Friction möglichst zu schwächen, wird die Axe durch zwei vom Inspector Blochmann gefertigte Gegengewichte gehoben. Demungeachtet sind die Pfannen schon etwas ausgelaufen, was bei Anfang meiner Beobachtungen nicht der Fall war, und es dürfte bald nöthig sein, sie mit Steinen auslegen zu lassen.

An dem westlichen Pfeiler ist der eingetheilte Halbkreis angebracht, auf welchem man die Polarabstände mit Hülfe des Vernier bis auf 1′ ablesen kann. Die Fadenerleuchtung geschieht mittelst einer Lampe durch den östlichen Pfeiler und den östlichen Theil der Axe.

Zur Prüfung der Horizontalität der Axe wird eine Wasserwaage angehängt, bei welcher ein Theil der Scale 0·054 Zoll gross ist. Um den, einem solchen Theile entsprechenden Winkel zu finden, beobachtete ich mehrmals den Polaris bei jedesmal vorher verstellter Axe und erhielt die Werthe:

$$0''38,\ 0''36,\ 0''40,\ 0''41,\ 0''39,\ 0''39,$$

wovon das Mittel: 0″39 in Zeit, oder 5″8 in Bogen ist.

Es wird in der ersten Abtheilung der *Königsberger Beobachtungen* gelehrt, wie man mit Hülfe der Libelle die Gleichheit der Durchmesser der Zapfen prüfen kann. Ich habe diese Methode auch hier

---

indem man, durch das Spiegelglas sehend, auf einer, in einiger Entfernung dahinter gestellten, verticalen und mit dem Fernrohr parallelen Tafel die Endpunkte der Projection des Bildes bemerkt. Die Hälfte des gegenseitigen Abstandes dieser Punkte auf der Tafel, dividirt durch die Entfernung der Tafel vom Ocular, giebt die Tangente der Hälfte des gesuchten Winkels, und diese Tangente dividirt durch die Tangente des halben Winkels, unter welchem der Gegenstand dem blossen Auge erscheint, die Vergrösserungszahl. — Am besten ist es, wie auch Littrow bemerkt, für diesen Gegenstand den Durchmesser des scheinbaren Feldes des Rohres selbst zu nehmen.

angewendet, aber so gut als gar keinen Unterschied zwischen ihnen gefunden.

Der astronomische Kreis von Trougthon (B.), das bei weitem schönste und vollendetste Instrument unserer Sternwarte*).

Das Gestell desselben ist ein horizontal stehender, massiver Ring von 6 Zoll Durchmesser, von welchem drei sehr starke Doppelradien auslaufen. Durch die vom Mittelpunkt des Ringes 15 Zoll entfernten Enden derselben gehen drei Schrauben, welche die Füsse des Instrumentes abgeben.

Auf diesem Gestell und fest mit ihm verbunden ruht eine horizontale Scheibe von 20 Zoll Durchmesser, mit einer jenem Ring entsprechenden Oeffnung. Der aufrecht stehende Rand der Scheibe trägt einen von 10 zu 10 Minuten eingetheilten Limbus, den Azimuthalkreis.

Innerhalb des Limbus bewegt sich um eine verticale Axe eine Scheibe mit zwei gegenüberstehenden Verniers, wodurch der Limbus von 10 zu 10 Secunden getheilt wird. Die verticale Axe ist ein mit der unteren Fläche der Scheibe verbundener, 15 Zoll langer, umgekehrter Kegel, der in dem erwähnten Ring und einer, unten am Ring befestigten, conischen Hülse spielt.

Auf dieser beweglichen Scheibe stehen vier, 20 Zoll hohe Säulen. Denken wir uns jetzt und in dem Verfolg der Beschreibung die Scheibe so gestellt, dass die eingetheilte Seite des Verticalkreises nach Morgen sieht, so fallen die Fusspunkte der Säulen in den west-östlichen Durchmesser der Scheibe.

Auf den beiden äusseren Säulen sind die Zapfenlager für den Verticalkreis befindlich, welche aus zwei unter einem rechten Winkel zusammenstossenden Ebenen bestehen. An der westlichen Säule ist ferner eine Röhre befestigt, in welcher ein 25 Zoll langes Bleiloth herabhängt, das in einem mit Weingeist zu füllenden Gefässe spielt und dessen Stand mittelst zweier Mikroskope unter rechtem Winkel beobachtet wird. Noch ist an dieser Säule das Gestell für die Lampe zur Erleuchtung des Sehfeldes durch die Axe angebracht.

Aus den oberen Enden der beiden inneren Säulen ragen zwei Rollen hervor, die durch Federn aufwärts gedrückt werden und, in-

*) Einiges über diesen Kreis findet sich in Hindenburg's *Archiv der reinen und angewandten Mathematik*, III. Hft. 1795: *Ueber die Untersuchung astronomischer Kreise; vom Herrn Grafen von Brühl ... Aus dem Englischen übersetzt, und mit einem Anhange und Anmerkungen begleitet, von Herrn Obristwachtmeister von Zach.*

dem sie die horizontale Axe des Kreises unterstützen, zur Verminderung des Drucks der Zapfen auf die Lager dienen.

Das Hauptstück des ganzen Instrumentes, der Verticalkreis, besteht aus zwei, $3\frac{1}{4}$ Zoll von einander abstehenden Ringen, von denen jeder durch sechs Radien, die aus den Flächen der Ringe selbst gearbeitet sind, mit der horizontalen Axe verbunden ist. Unter sich sind diese Kreise durch 34, zwischen die Ringe und ihre Radien gesetzte Stäbchen vereinigt. Die Axe ist zwischen den Ringen cylindrisch und läuft von da nach beiden Enden conisch zu. Ihre Länge beträgt 16 Zoll und die Dicke ihrer Zapfen $\frac{3}{4}$ Zoll. Durch die Axe zwischen den Ringen und mit beiden auf das Solideste verbunden geht das Fernrohr von 33 Zoll Brennweite und 2·2 Zoll Oeffnung. Es gehören zu ihm drei Oculare von 100-, 57- und 43-maliger Vergrösserung. Das letztere Ocular ist prismatisch. Im Brennpunkt des Objectivs steht ein Netz von drei verticalen und eben so viel horizontalen Fäden. Ohnerachtet der Kleinheit des Objectivs habe ich mit diesem Fernrohr den Polaris zu jeder Stunde des Tages finden können. Die Nettigkeit seiner Bilder ist vorzüglicher als beim Mittagsfernrohr.

Die Eintheilung des Verticalkreises, welche nach der oben angenommenen Stellung des Instruments auf den östlichen Ring getragen ist, geht von 90^0 zu 90^0 in unverändertem Sinne von der Rechten nach der Linken fort, so dass je zwei entgegengesetzte Punkte des Kreises zu demselben zwischen 0 und 90 liegenden Grade gehören. Jeder Grad ist von 10 zu 10 Minuten getheilt.

An der inneren östlichen Säule, nahe bei dem untersten Punkt des Kreises, ist ein Index angebracht, verbunden mit der Vorrichtung zur Arretirung und sanften Bewegung des Kreises. Ist die Collimationslinie des Fernrohrs horizontal, so zeigt der Index auf 0^0 oder 90^0, und giebt überhaupt, wie aus der eben beschriebenen Eintheilung hervorgeht, bis auf 10 Minuten unmittelbar Zenithabstand oder Höhe an, je nachdem die eingetheilte Seite des Kreises zur Rechten oder Linken des Beobachters ist.

Um noch die einzelnen Minuten und Secunden ablesen zu können, befindet sich innerhalb jener Eintheilung ein zweiter, aus sehr feinen, $5'$ von einander entfernten Punkten gebildeter Kreis. Ferner ruht auf der inneren östlichen Säule ein Aufsatz mit zwei horizontalen Armen, die an ihren Enden zwei mikroskopische Mikrometer tragen, und zur grösseren Festigkeit noch durch schief von der Säule ausgehende Stangen unterstützt sind. Durch diese Mikroskope sieht man Nichts von den Zahlen oder Strichen der erst erwähnten Eintheilung, sondern bloss die feinen Punkte, die hier um etwa $\frac{3}{8}$ Zoll

von einander abzustehen scheinen. Im Brennpunkte jedes Mikroskops ist nun ein fester horizontaler Faden befindlich, der so zu berichtigen ist, dass er, wenn der Index auf einen Theilstrich, oder gerade mitten zwischen zwei Theilstriche fällt, einen Theilpunkt deckt. Zeigt aber, was im Allgemeinen der Fall ist, der Index anders, und deckt also der Faden keinen Theilpunkt, so wird der Abstand des, im rechten Mikroskop zunächst oberhalb, und im linken zunächst unterhalb des festen Fadens scheinbar liegenden, Punktes von ihm durch einen zweiten beweglichen Faden gemessen, der mittelst einer Schraube mit diesem Punkt zur Deckung gebracht wird. Ein in jedem Mikroskop seitwärts stehender, gezahnter Streifen giebt dann durch die Anzahl seiner zwischen beide Fäden fallenden Zähne die dem, was der Index am Limbus zeigt, zuzufügenden Minuten, und ein Index am Kopfe jeder Schraube, an einer mit der Schraube sich drehenden und in 60 gleiche Theile eingetheilten Scheibe, die Secunden. Die Schraubengänge sind von vollkommener Gleichheit unter sich, und die Schrauben selbst nach der Ramsden'schen Einrichtung mittelst einer Feder und Kette von allem todten Gange frei. *)

Schon der Name des Verfertigers ist Bürge dafür, dass der Kreis mit keinen groben Theilungsfehlern behaftet ist. Dahin gehörige allgemeine Untersuchungen habe ich noch nicht angestellt. Dass er indess nicht ganz frei von Theilungsfehlern ist, geht daraus hervor, dass, wie mich wiederholte Messungen mit dem beweglichen Faden gelehrt haben, nicht alle Intervalle zwischen den Theilpunkten (5') von ganz gleicher Grösse sind. Es zeigten sich dabei bis auf 4 Secunden gehende Unterschiede.

Auch sind nicht alle Punkte gleich gross; ihre Durchmesser wechseln zwischen 34 und 12 Secunden. Der wahrscheinliche Fehler, welcher bei Stellung des Fadens über einen Theilpunkt begangen werden kann, ist bei mir über eine halbe Secunde gross. Ich erhielt

---

*) Von dem mikroskopischen Mikrometer, einer Erfindung Ramsden's, hat die erste ausführliche Beschreibung der General Roy im 80-sten Bande der philosophischen Transactionen gegeben: *An Account of the Trigonometrical Operation, whereby the Distance between the Meridians of the Royal Observatories of Greenwich and Paris has been determined. By Major-General William Roy,* .... Das zum Behuf der Winkelmessung bei dieser Triangulation von Ramsden construirte Instrument hatte dergleichen Mikrometer. Vergl. Vince, *Treatise on practical Astronomy*, pag. 170. — Wie der Graf Brühl in vorhin gedachter Schrift bezeugt, ist Troughton bei Verfertigung der mikroskopischen Mikrometer der Beschreibung von Roy gefolgt. Bei allen übrigen Theilen des Kreises hat er von anderen Künstlern Nichts entlehnt.

ihn, indem ich bei festgestelltem Limbus den Faden zu mehreren Malen über denselben Punkt führte, und die verschiedenen Ablesungen unter einander verglich. Noch geringer, scheint es mir, würde dieser Fehler sein, wenn, wie es bei anderen Kreisen der Fall ist, statt der Theilpunkte Striche wären. Hat gegen diese der Faden eine sehr kleine Neigung, so kann man sicherlich schärfer und auch mit weniger Anstrengung des Auges den Faden so stellen, dass er immer an derselben Stelle von dem Theilstrich geschnitten wird.

Bekanntlich müssen der bewegliche Faden, und das zwischen ihm und dem Limbus befindliche Objectivglas des Mikroskops, eine solche Lage gegen einander haben, dass nicht nur das Bild des Limbus in die mit letzterem durch den Faden parallel gelegte Ebene fällt, sondern auch fünf Schraubenumdrehungen dem Intervall zweier auf einander folgender Theilpunkte des Limbus entsprechen. Letzteres genau für alle Intervalle zu erhalten, ist wegen der schon bemerkten, nicht überall stattfindenden vollkommenen Gleichheit der Intervalle unmöglich. Ich habe dabei keinen anderen Ausweg zu treffen gewusst, als dass ich gedachte Correction, so viel es sich thun liess, näherungsweise bewerkstelligte, bei den Beobachtungen den beweglichen Faden meistens über beide, dem unbeweglichen nächstliegende, Punkte führte, und den Ueberschuss über, oder das Deficit des somit gemessenen Intervalls an fünf Minuten, auf beide Abstände vom unbeweglichen Faden nach Verhältniss vertheilte.

Die Excentricität des Kreises habe ich 4″ gross gefunden. Indessen ist ihre Kenntniss zur Berechnung der Beobachtungen nicht weiter nöthig, da sie durch Zusammennahme der Ablesungen an beiden Mikrometern von selbst herausfällt. Dasselbe gilt auch von dem Collimationsfehler, indem ich jeden Stern zweimal, einmal vor seiner Culmination in der einen Lage des Kreises, das andere Mal nach der Culmination in der entgegengesetzten Lage, zu beobachten pflege.

Noch gehören zu dem Instrument zwei Libellen. Die eine derselben dient hauptsächlich, die Axe des Verticalkreises zu berichtigen. Zu diesem Zweck wird sie mit ihren beiden rechtwinklig ausgeschnittenen Füssen auf die Enden der Zapfen gestellt. Nächstdem ist sie auch so eingerichtet, dass man sie auf die horizontale Scheibe stellen und somit die Lage der verticalen Axe berichtigen kann. Die andere Libelle hängt an den beiden Trägern der Mikrometer und ist von vorzüglicher Güte. 70 Theile ihrer Scale gehen auf einen Zoll und ein solcher Theil entspricht 1·18 Secunden. Sie erspart mir die Mühe, vor jeder Reihe von Beobachtungen die verticale Axe genau einzustellen, indem ihre Ablesungen, in den entgegengesetzten Lagen

des Kreises mit einander verglichen, die Abweichung der Axe von der Verticallinie geben, und hiermit sodann die beobachteten Zenithabstände corrigirt werden.

Die Pendeluhr von Vulliamy. Sie hat die Graham'sche ruhende Hemmung. Die Bahnen und Zapfenlöcher des Ankers, so wie auch die Zapfenlöcher des Steigrades sind mit Chalcedon ausgelegt. Das Pendel ist rostförmig, und besteht aus drei Stahl- und zwei Zinkstangen. Diese Uhr zeigte früher mittlere Zeit; seit ihrer nunmehrigen Aufstellung ist sie nach Sternzeit regulirt worden. Nach dem Aufzuge geht sie fünf Wochen fort, und ich habe alle Ursache, mit ihrem Gange zufrieden zu sein, indem die Differenzen des täglichen Ganges ein bis zwei Zehntheile Secunden, nur selten mehr betragen.

Diese drei bisher beschriebenen Instrumente, die vorzüglichsten und wichtigsten unserer Sternwarte, wurden zu Ende des Jahres 1820 aufgestellt, der Kreis und das Mittagsfernrohr durch Hrn. Blochmann, Inspector des mathematischen Salons zu Dresden, die Uhr durch Hrn. Zademach, hiesigen Rathsuhrmacher. Wie schon erinnert, sind die Gegengewichte am Mittagsfernrohr nebst dem dazu Gehörigen Blochmann's Arbeit. Derselbe hat ferner für das Fernrohr am Kreis ein sehr schönes Mikrometer mit beweglichem Faden gefertigt. Die Peripherie der Schraube ist in 100 Theile getheilt und auf eine Umdrehung gehen 42''5. Der todte Gang der Schraube ist hier nicht nach Ramsden's Einrichtung durch eine Uhrfeder und Kette, sondern nach einer Erfindung Reichenbach's bloss durch ein federndes Blech gehoben.

Um die Vulliamy'sche Uhr hat sich Hr. Zademach noch dadurch verdient gemacht, dass er das Lager für die Pendelaufhängung mit der Rückwand des Gehäuses in Verbindung setzte, und ihm dadurch eine bedeutend grössere Festigkeit verschaffte. Auch habe ich die Geschicklichkeit dieses Künstlers späterhin mehrmals bei den anderen Instrumenten in Anspruch genommen, da er bei Aufstellung derselben zugegen gewesen und dadurch mit ihrer inneren Einrichtung und Behandlung bekannt geworden war. Die mannigfachen Dienste, die er dadurch der Sternwarte und mir, als Observator, erzeigt hat, verdienen dankbare Anerkennung.

In demselben östlichen Cabinet befinden sich noch:

Ein Barometer von Troughton (B.) nebst einem daran befestigten Thermometer. Den Stand des Quecksilbers in der Röhre des ersteren giebt ein Vernier bis auf 0.002 eines engl. Zolls an. Der

Stand im Gefäss wird durch eine dabei angebrachte Spalte beobachtet und mittelst einer Schraube corrigirt.

Zwei Thermometer, das eine in der nördlichen verticalen Meridianspalte, das andere in der Uhr.

Ein Secundenzähler, den ich vorzüglich bei Beobachtungen im nördlichen Meridian gebrauche, wo mir die Uhr im Rücken steht.

Gehen wir jetzt in das Cabinet nach Süden. Hier ist auf

einer parallaktischen Maschine von Dollond (B.), welche die Declination und den Stundenwinkel bis 30″ genau angiebt,

ein vierfüssiges Fernrohr, ebenfalls von Dollond (B.), aufgestellt. Ursprünglich gehörte dieses Rohr nicht zu der Maschine, sondern ein anderes von etwas geringerem Werthe. Ich machte diese Umtauschung auf Hrn. *Blochmann's* Anrathen, der noch ein Mikrometer, auf ähnliche Art, wie das vorhin beschriebene, nur in grösserem Maassstab construirt, hierzu lieferte. Eine Umdrehung der in 100 Theile getheilten Schraubenperipherie beträgt 28″7. — Bei dem gegenwärtig mit der Maschine verbundenen Fernrohr, dem besten, welches die Sternwarte besitzt, ist der Durchmesser des Objectivs 4 Zoll. Es hat, nächst einer terrestrischen Ocularröhre, drei astronomische Oculare, die eine 70-, 150- und 260-malige Vergrösserung bewirken.

Eine Pendeluhr von Naumann. Sie ist nach mittlerer Zeit regulirt, hat ein Pendel von Holz und geht sehr regelmässig, obschon die Wand, an welcher sie befestigt ist, weit mehr dem Einfluss der Witterung frei steht, als dies bei der Uhr im östlichen Cabinet der Fall ist.

Ausser den bisher beschriebenen Instrumenten besitzt die Sternwarte noch eine bedeutende Anzahl anderer. Unter ihnen zeichnen sich aus:

Ein 17-zölliger Kreis von Troughton. Er ist dem obigen grösseren im Ganzen ähnlich; nur hat der Verticalkreis statt der Mikrometer Verniers, mit denen man bis auf 10″ unmittelbar ablesen kann. Eben so geben die Verniers des Azimuthalkreises den zu messenden Bogen bis auf 10″ an.

Ein Aequatorial von Ramsden (B.), sehr schön und genau gearbeitet. Das Objectiv des dazu gehörigen Fernrohrs hat $2\frac{1}{2}$ Zoll im Durchmesser und nur $16\frac{1}{4}$ Zoll Focallänge. Der Declinationskreis, Aequator und Horizont haben alle 12 Zoll im Durchmesser.

Ein 11-zölliger Spiegelsextant von Troughton nebst mehreren künstlichen Horizonten.

Zwei achromatische Fernröhre von Cary und Berge. Ihre Längen sind resp. 45·3 und 46 Zoll.

Drei zweifüssige Gregory'sche Spiegelteleskope. Das eine derselben (B.) ist von Mudge, dem Bruder des berühmten Uhrmachers Thomas Mudge, seines Amts ein Chirurgus. (*Monatl. Corresp.* VII, 169.) Die Verfertiger der beiden anderen sind mir unbekannt.

Ein zweifüssiges Newton'sches Spiegelteleskop.

Zwei Ramsden'sche zweifüssige Cometensucher, der eine von Gr. Brühl.

Zwei Reisebarometer von Haas. (B.)

Eine Himmelskugel von Bode und eine Erdkugel von Sotzmann entworfen, beide 13 Zoll im Durchmesser.

Ein Declinatorium von Weikhardt.

Es würde überflüssig sein, wenn ich alle die übrigen Instrumente, welche sich hier vorfinden, noch namhaft machen wollte. Die meisten derselben gehören einer früheren Zeit an, als zwei bewegliche Quadranten, mehrere nicht achromatische Fernröhre von beträchtlicher Länge, u. s. w., und sind in so fern wenigstens für die Geschichte der Astronomie interessant. Andere sind mehr für den Unterricht bestimmt, als zu eigentlichen Beobachtungen brauchbar. Schon aus den vorhin angezeigten geht zur Genüge hervor, wie reichhaltig die Leipziger Sternwarte mit Werkzeugen ausgerüstet ist, und dass, wenn ihr auch noch die Producte eines Reichenbach mangeln, sie doch bei ihrer nunmehrigen Einrichtung dem Fortgange der Wissenschaft auf sehr mannigfaltige Art nützlich werden kann.

Schliesslich muss ich noch mit einem Worte der ihr zugehörigen, sehr vollständigen astronomischen und mathematischen Bibliothek gedenken. Zu Ende des Jahres 1821 war sie zu 1436 Bänden angewachsen. Sie enthält beinahe alle vorzüglicheren Werke der neueren, und auch sehr viele, oft ganz seltene der älteren Zeit. Ein nicht unbeträchtlicher Theil derselben (365), worunter besonders viele kostbare englische Werke sich befinden, ist Geschenk des Grafen von Brühl. Mehrere andere treffliche Bücher wurden ihr durch ein Vermächtniss des Landkammerrath Kregel von Sternbach, durch den Appellationsrath D. Trier, und andere edeldenkende Freunde und Beförderer der Wissenschaft zu Theil. Ich bemerke nur noch, dass für die Vermehrung dieser Bibliothek, so wie für Anschaffung und Reparatur der Instrumente ein Jahrgeld von mehr als 200 Thlr. ausgesetzt ist.

Beobachtungen.

Nicht ohne einiges Bedenken wage ich es, die ersten Früchte meiner astronomischen Thätigkeit dem Publicum vorzulegen, da ich vor meiner hiesigen Anstellung nur selten Gelegenheit hatte, mich in dem praktischen Theile der Wissenschaft zu vervollkommnen, und mir daher noch manche Erfahrung und manche Geschicklichkeit in der jetzt so hoch gesteigerten Beobachtungskunst abgehen mag. Was mich dieses Bedenken überwinden lässt, ist hauptsächlich der Wunsch, die schon einigemal von Astronomen geäusserten Klagen über Nichtbenutzung der schönen Brühl'schen Instrumente, nunmehr durch die That zu beschwichtigen, und die Hoffnung, gegenwärtige Probe, als Anfang hierzu, mit Nachsicht aufgenommen zu sehen. — Dem durch diese Instrumente erreichbaren Grad von Genauigkeit mich immer mehr zu nähern, den Forderungen, welche die Wissenschaft an die Sternwarte jetzt thun kann, und somit den Absichten des erhabenen Begründers der Anstalt auf das Thätigste Genüge zu leisten, wird mein angelegentlichstes Bestreben sein.

I. Bestimmung der Mittagslinie.

Schon die vier Hauptwände des Gebäudes der Sternwarte liegen ziemlich richtig nach den vier Weltgegenden. Bei der Aufstellung des Mittagsfernrohres wurde, grösserer Genauigkeit willen, das, durch den Major Aster von dem Mittelpunkt der Sternwarte aus beobachtete, Azimuth des Kirchthurms zu Cröbern, einem $\frac{3}{4}$ Meilen entfernten Dorfe ($13^{\circ}\ 21'\ 38''$ östl.), zu Hülfe genommen. Als ich hierauf zu beobachten angefangen hatte, liess ich, als einstweiliges Meridianzeichen, an einem, in der Mittagslinie liegenden, Hause in Connewitz, $\frac{1}{2}$ Meile von Leipzig entfernt, ein 17 Zoll hohes und 30 Zoll langes weisses Bret mit einem diagonalen und vier verticalen schwarzen Strichen befestigen. Auf diesem Brete wurde durch viele Beobachtungen des Polaris und anderer Sterne die Lage der Mittagslinie möglichst genau auszumitteln gesucht, und hierauf zu Ende October 1821, in geringer Entfernung vor jenem Hause, ein bleibendes Meri-

dianzeichen errichtet. Dieses besteht aus einer $5\frac{1}{2}$ Ellen hohen abgestumpften quadratförmigen Pyramide. Die Seite des unteren Quadrats beträgt $1\frac{1}{4}$, und die des oberen $\frac{3}{4}$ Ellen. Die Pyramide ruht auf einer, $\frac{1}{2}$ Elle über einem kleinen Hügel hervorragenden, quadratförmigen Basis, $1\frac{1}{2}$ Ellen die Seite. An ihrem oberen Ende ist die Pyramide mit einer Bedachung versehen. Unmittelbar unter derselben ist an der, nach der Sternwarte zu liegenden, Seite ein 1 [illegible] Zoll hohes Feld perpendikular ausgehauen, auf welchem rechts und links zwei schwarze Streifen, als Begrenzungen gezogen sind. Der dazwischen befindliche Raum bildet ein Rechteck von $13\frac{3}{4}$ Zoll Breite, die von dem Ort des Mittagsrohres aus unter einem Winkel von 10″2 erscheint. Auf dieses Rechteck wird nun der mittlere Faden des Mittagsfernrohrs gerichtet, und seine Abweichung von der Mitte des Rechtecks aus dem Verhältniss der beiden durch ihn gemachten Abschnitte beurtheilt.

Ein zu dieser Schätzung nöthiges Element ist noch die Fadendicke. Um sie zu erhalten, spannte ich von dem nämlichen Draht zwei Fäden in das Blochmann'sche Mikrometer am Dollond'schen Fernrohr, und brachte mittelst der Schraube den dadurch beweglichen Faden mit dem anderen unbeweglichen zur Berührung. Ich drehte hierauf die Schraube weiter, bis jener mit diesem an den entgegengesetzten Rändern zur Berührung kam. Auf diese Weise gab die Differenz zwischen den Ablesungen bei der ersten und zweiten Berührung das Doppelte der scheinbaren Fadendicke bei dem Dollond, die sodann auf das Mittagsfernrohr nach dem Satz reducirt wurde, dass sich die scheinbaren Dicken desselben Fadens in zwei verschiedenen Fernröhren umgekehrt wie die Focallängen verhalten. Ich erhielt somit durch mehrmals wiederholte, und gut unter einander stimmende Messungen die scheinbare Fadendicke beim Mittagsfernrohr = 7″1.

Um nun das Verhältniss der beiden, durch den Faden gemachten Abschnitte des Feldes mit möglichster Schärfe und Leichtigkeit schätzen zu können, habe ich auf ein Blatt Papier das weisse Rechteck mit seinen schwarzen Begrenzungen, etwa 2 Zoll breit, gezeichnet und verschiebe diese Zeichnung auf einer Tafel, unter einem mit beiden Enden an der Tafel befestigten, den Faden vorstellenden, Streifen von schwarzem Papier, dessen Breite sich also zu der des Rechtecks wie 7·1 : 10·2 verhält, bis dass dieses Bild dem durch das Fernrohr gesehenen vollkommen ähnlich ist. Ein Index an der Tafel giebt mir sodann an einer, auf dem Blatte gezeichneten, Scale unmittelbar die Abweichung des Fadens von der Mitte des Zeichens in Zehntheilen einer Zeitsecunde, und durch Schätzung bis auf

Hunderttheile zu erkennen, womit ich aber keineswegs auch die vollkommene Richtigkeit dieser Hunderttheile behaupten will.

Dass der bei Setzung des Meridianzeichens begangene Fehler, oder das Azimuth der verticalen Mittellinie des weissen Feldes, sehr klein sein müsse, davon hatten mich schon mannigfache Beobachtungen überzeugt, und es war nun noch übrig, die Grösse dieses Fehlers ausfindig zu machen. Eine nicht ganz leichte Aufgabe! Denn zu den Schwierigkeiten, welche der Natur der Sache nach mit der genauen Bestimmung eines sehr kleinen Fehlers verbunden sind, kommt hier noch dieses, dass an heiteren, dem Beobachten günstigen Tagen nur um die Zeit des Sonnenuntergangs, und auch dann nicht immer, das Zeichen deutlich und ohne Wallung gesehen werden kann, zu jeder anderen Tageszeit aber, und hauptsächlich früh, unruhig und nicht mit der zu Beobachtungen dieser Art erforderlichen Deutlichkeit erscheint. Nur bei bewölktem Himmel, und vorzüglich nach vorangegangenem Regen, lässt sich die Lage des Fadens gegen das Zeichen mit Schärfe bestimmen. Ferner habe ich bemerkt, dass an heiteren Tagen diese Lage kleinen Veränderungen unterworfen ist, indem Abends der Faden um ein Geringes scheinbar östlicher, als früh sich zeigt. Wahrscheinlich rührt dies von der ungleichen Ausdehnung des Thurmes durch die Sonnenwärme her, ein Umstand, dem ich in der Folge noch eine besondere Aufmerksamkeit zu widmen gedenke.

Unter solchen Verhältnissen konnte ich daher Originalbeobachtungen, ich meine Beobachtungen von Circumpolarsternen in ihrer oberen und unteren Culmination, zu einer genauen Bestimmung des gedachten Fehlers nicht anwenden, sondern musste mich mit der Methode der Rectascensionsdifferenzen begnügen. Ich wählte hierzu den Polarstern in seiner unteren Culmination, und α Virginis, nicht nur weil diese Culminationen bloss um 19′ verschieden sind, und folglich eine kleine Abweichung des Ganges der Uhr von der Sternzeit keinen bedeutenden Einfluss hat, sondern auch, weil der eine Stern nahe beim Pol und der andere nicht weit vom Aequator entfernt ist. Auch habe ich noch einige Beobachtungen von α Cassiopejae in der unteren Culmination, welche der des Polaris um 27′ vorangeht, damit verbunden.

Ich nahm nun zu diesen Beobachtungen, dem oben Bemerkten gemäss, die Jahreszeit, wo diese Sterne in den Abendstunden durch den Meridian gehen, und machte damit den 15. April, wo dieses gegen $10\frac{1}{2}$ Uhr Ab. geschieht, den Anfang. Allein ich konnte die Beobachtungen nur bis gegen Ende Mai fortsetzen, weil später das Getreide auf den zwischen der Sternwarte und dem Zeichen gelegenen

Feldern so hoch gewachsen war, dass das Zeichen nicht gut mehr gesehen werden konnte.

Mein Verfahren war dabei folgendes. Heisse z das Azimuth des Zeichens, a das Azimuth des Instruments, oder der Winkel einer auf der Rotationsaxe senkrechten Ebene mit der Ebene des Meridians, c der Collimationsfehler, oder der Winkel der Collimationslinie mit jener Ebene. Alle drei Fehler seien übrigens in Zeitsecunden ausgedrückt, und positiv, wenn sie von Süden nach Osten fallen. Alsdann ist leicht einzusehen, dass die zu beobachtende Abweichung des Fadens von der Mittellinie des Zeichens in der gewöhnlichen Lage des Instruments $= a + c - z$, dagegen nach Umlegung desselben $= a - c - z$ sein wird. Die halbe Differenz dieser Abweichungen giebt den Collimationsfehler. Auf diese Weise wurde c Nachmittags bei bewölktem Himmel einigemal bestimmt.

Den 19. April 1822 .... $a + c - z = -0''07$
nach Umlegung des Instruments: ...... $a - c - z = +0{\cdot}17$
und dann wieder in der gewöhnl. Lage: $a + c - z = -0{\cdot}05$

woraus

$$c = -0''11$$

folgt.

Den 24. April:
$$\left.\begin{aligned} a + c - z &= -0''19 \\ a - c - z &= +0{\cdot}03 \\ a + c - z &= -0{\cdot}16 \end{aligned}\right\} c = -0''10.$$

Den 29. April fiel kurz vor Beobachtung des Polaris der Deckel vor dem Objectivglas zu und klemmte sich so, dass einige Gewalt nöthig war, um ihn zurückzuschieben. Hierdurch war die Lage der Rotationsaxe und folglich a wahrscheinlich ungestört geblieben: wohl aber hatte sich, wie zu erwarten, c geändert. Denn ich fand:

den 1. Mai:
$$\left.\begin{aligned} a + c - z &= +0''05 \\ a - c - z &= +0{\cdot}06 \\ a + c - z &= +0{\cdot}07 \end{aligned}\right\} c = 0''00,$$

den 11. Mai:
$$\left.\begin{aligned} a + c - z &= +0{\cdot}03 \\ a - c - z &= +0{\cdot}03 \\ a + c - z &= +0{\cdot}03 \end{aligned}\right\} c = 0''00.$$

den 23. Mai, wo aber die Luft etwas wallte:

$$\left.\begin{aligned} a + c - z &= -0''05 \\ a - c - z &= +0{\cdot}03 \end{aligned}\right\} c = -0''04.$$

Die zur Reduction der Seitenfäden auf den mittleren gebrauchten Abstände waren für Sterne im Aequator 39''017 und 38''315. Nach-

dem ich hiermit die beobachteten Culminationszeiten der oben genannten Sterne verbessert hatte, so zog ich diese Zeiten nebst den, wegen Nichthorizontalität der Axe und wegen des Collimationsfehlers nöthigen, Correctionen von den, in den Schumacher'schen *Hülfstafeln* angegebenen, geraden Aufsteigungen ab. Die Reste, welche mithin die Correction der Uhr und die Correction wegen des Azimuths des Instruments in sich begreifen, sind in folgender Tafel enthalten.

1822	α Cassiop.	Polar.	α Virg.
15. Apr.		— 53″7	
18.		— 53·3	
25.*)		— 1·5	+ 5″53
29.		+ 5·1	+ 2·76
2. Mai	— 1″84	— 3·4	— 1·52
3.	— 3·02	— 6·3	— 2·63
5.	— 5·37	— 8·5	— 5·15
16.	— 12·56	— 15·6	— 12·38
21.	— 15·67	— 18·3	— 14·94
22.	— 15·16	— 16·9	— 14·07

Den 15. und 18. April war die Correction der Uhr — 46″1 und — 49″2. Heissen nun C, P, V die für irgend einen Tag zusammengehörigen Zahlen dieser Tafel, und u die dabei statthabende Correction der Uhr, so ist:

$$C = u + 1{\cdot}69\,a\,,\quad P = u + 22{\cdot}60\,a\,,\quad V = u + 0{\cdot}89\,a\,,$$

folglich

$$a = \frac{P-V}{21{\cdot}7}\,,\quad a = \frac{P-C}{20{\cdot}9}\,,\quad a = \frac{C-V}{0{\cdot}80}\,.$$

Auf diese Weise suchte ich zuerst durch den Polaris und, die beiden ersten Tage ausgenommen, durch α Virg. die Werthe von a. Addirt man hierzu c und zieht von der Summe die, jeden Beobachtungstag gegen Abend beobachtete, Abweichung des Fadens $= a + c - z$ ab, so bleibt z übrig. Nachstehende Tafel giebt die Resultate dieser Rechnung:

1822	a	c	$a+c-z$	z
15. Apr.	— 0″34	— 0″11	— 0″40	— 0″05
18.	— 0·18	— 0·11	— 0·18	— 0·11
25.	— 0·32	— 0·10	— 0·30	— 0·12
29.	+ 0·10	0·00	+ 0·22	— 0·12
2. Mai	— 0·09	0·00	— 0·07	— 0·02
3.	— 0·17	0·00	0·00	— 0·17
5.	— 0·16	0·00	+ 0·09	— 0·25
16.	— 0·15	0·00	— 0·11	— 0·04
21.	— 0·16	0·00	+ 0·05	— 0·21
22.	— 0·09	0·00	+ 0·13	— 0·21

*) Den 24. April ward die Uhr um 1′ zurückgestellt.

Die Verschiedenheit der somit für z erhaltenen Werthe ist grösser, als ich erwartet hatte, wovon wohl der Grund hauptsächlich in der Unruhe liegen mag, womit bei heiterem Himmel das Bild des Zeichens erscheint, und seine Lage gegen den Faden oft unter den Augen verändert. Das Mittel aus allen Werthen ist $= -0''13$.

Die sechs Beobachtungen von α Cassiop. auf eben die Weise mit den zugehörigen des Polaris verbunden, geben für z die Werthe,

$$-0{\cdot}01,\quad -0{\cdot}16,\quad -0{\cdot}24,\quad -0{\cdot}03,\quad -0{\cdot}17,\quad -0{\cdot}21,$$

woraus dasselbe Mittel $-0''14$ folgt, wie zu vermuthen war. Dagegen kommen durch Verbindung von α Virg. mit α Cassiop., mit Ausschluss der zu sehr von einander abweichenden Beobachtungen vom 21. Mai, für z die Werthe:

$$-0{\cdot}33,\quad -0{\cdot}49,\quad -0{\cdot}36,\quad -0{\cdot}11,\quad -0{\cdot}37,$$

wovon das Mittel $-0''33$ ist.

Wenn ich die zu Hülfe genommenen Tafeln für die geraden Aufsteigungen als richtig voraussetzen darf, so möchte die starke Abweichung dieses Werthes von z von dem vorigen vielleicht von einiger Unregelmässigkeit in der Figur der Zapfen herruhren. Darauf mit Rücksicht genommen, dass sich die Fädenantritte bei α Cassiop. und α Virg. viel schärfer als bei dem Polaris beobachten lassen, will ich einstweilen der ersteren Bestimmung $-0{\cdot}13$ den doppelten Werth der letzteren $-0{\cdot}33$ beilegen, und folglich im Mittel

$$z = -0''20$$

setzen, wonach also das Meridianzeichen um $0{\cdot}20$ Zeitsecunden d. h. um 2 Zoll zu weit westlich stände.

Zum Schlusse dieses Abschnitts noch folgende Bemerkungen über das Mittagsfernrohr.

Den Collimationsfehler kann ich lange Zeit unverändert beibehalten. Dies bestätigen auch die vorhin darüber angeführten Beobachtungen, — welche zugleich als Beweis von der Genauigkeit meines Verfahrens, die Lage des Fadens gegen das Zeichen zu schätzen, dienen können. — Die Aenderungen des Fehlers im Azimuth sind gering, und nur sehr selten geschieht es, dass sich der Faden von der Mitte des Feldes bis an die schwarzen Begrenzungen entfernt. Ist die Unveränderlichkeit des Collimationsfehlers ein Beweis von dem soliden Bau des Instruments, so folgt aus den geringen Abweichungen im Sinne des Azimuths, dass auch die Aufstellung des Instruments, ungeachtet der 63 elligen Höhe über dem Erdboden, als sehr solid betrachtet werden darf. Bedeutender sind die Aenderungen der Lage der Axe gegen den Horizont, so dass ich fast vor je zwei, um ein Paar Stunden von einander liegenden, Beobachtungen sie zu untersuchen genöthigt bin.

II. Bestimmung der Polhöhe.

Es dürfte, wenigstens in geschichtlicher Hinsicht, nicht uninteressant sein, wenn ich der Darlegung der von mir in dieser Absicht angestellten Beobachtungen die früheren, mir zu Gesicht gekommenen Angaben der Leipziger Polhöhe vorangehen lasse. Grosse Uebereinstimmung ist dabei freilich nicht zu finden, abgesehen auch davon, dass bei den meisten die Stelle der Beobachtung nicht angegeben ist, und der Durchmesser der eigentlichen Stadt, die Vorstädte nicht mitgerechnet, in der Richtung des Meridians etwa eine halbe Minute beträgt.

Die älteste Bestimmung der Leipziger Polhöhe ist wahrscheinlich diejenige, welche uns Tycho in seinen *Progymnasmatis* aufbewahrt hat. Er sagt daselbst Libr. I. cap. IX. pag. 380 der 1648 zu Frankfurt erschienenen Ausgabe, wo er von den zu Wittenberg gemachten Beobachtungen des neuen Sternes in der Cassiopeja handelt, und die Wittenberger Polhöhe aus der Leipziger durch die Entfernung beider Städte und ihren Positionswinkel zu bestimmen sucht: »*Elevationem Poli Lipsensem praestantiss. o'im ejus Academiae Mathematicus Johannes Homelius**) *adinvenit esse P. 51. I. 17.*« Und bald nachher: »*Esse autem cum Homeliana Lipsensi elevatione . . . standum, magna diligentia, quam idem Homelius in fabricandis et tractandis Organis Mathematicis Mechanicè adhibuit . . . probabile reddit; et is per Solis Altitudinem maximam atque minimam hanc sedulò perscrutatus est, ut ipsemet cognovi, cum ante annos plus minus* 25**), *Lipsiae studiorum gratia commemorarer . . . . Altitudinem Solis maximam in Solstitio aestivo adinvenit P. 62. I. 11. Minimam in hyberno P. 15. I. 15 . . .*« Hieraus folgt mit Vernachlässigung der Parallaxe und Refraction die schon erwähnte Polhöhe von $51^{\circ}\ 17'$. Tycho leitet dann allein aus der grössten Sonnenhöhe, wozu er $1\frac{1}{3}$ Min. als Sonnenparallaxe addirt, und aus der von ihm selbst gefundenen grössten Abweichung der Sonne, $23^{\circ}\ 31\frac{1}{2}'$, die Leipziger Polhöhe $= 51^{\circ}\ 19'$ ab. Er setzt nämlich pag. 40 die Horizontalparallaxe der Sonne im Apogäum auf $2' 5\frac{3}{4}''$; dagegen lässt er für die Sonne, nach der pag. 39 stehenden Tafel, über 45° Höhe (bei Sternen über 19°, pag. 216) keine

*) Joh. Hommel, den man den Euklides seiner Zeit nannte, war ein Schwiegersohn des berühmten Joachim Camerarius. Er († 1564) und Moriz Steinmetz († 1584) waren die ersten Professoren der Mathematik zu Leipzig und lehrten zu gleicher Zeit öffentlich. Schulze, *Abriss einer Geschichte der Leipz. Univ.* S. 302 und 48.

**) 1562 bis 65.

Refraction mehr stattfinden. Vergl. Kästner's *Geschichte der Mathematik*, 2. Band, S. 620.

Ob nun schon diese Annahmen gar sehr von der Wahrheit abweichen, so kommt doch eben das Resultat 51° 19′ heraus, wenn man beide Beobachtungen Hommel's mit der richtigen Refraction berechnet. Die Schiefe der Ekliptik ergiebt sich dabei zu 23° 29′5, welche der wahren, die damals stattfinden musste, 23° 30′0, näher kommt, als die von Tycho angewendete.

Um vieles unrichtiger findet sich die Polhöhe in den von Tycho begründeten, aber erst nach seinem 1601 erfolgten Tode von Kepler im Jahre 1627 herausgegebenen *Rudolphinischen Tafeln*, wo sie = 51° 24′ angegeben ist.

Riccioli legt in seiner *Geographia reformata* Venetiis 1672, pag. 301 Hommel's Beobachtung der grössten Sonnenhöhe, die er als im Jahre 1560 gemacht angiebt, zum Grunde, und schliesst daraus mit einer Höhenparallaxe von 0″ und der Schiefe der Ekliptik von 23° 30′ 20″, die Polhöhe = 51° 19′ 14″.

Dieser Hommel-Riccioli'schen Bestimmung sind die meisten Astronomen lange Zeit hindurch gefolgt. So findet sie sich in den astronomischen Tafeln von de la Hire (1. Ausg. 1702, 2. Ausg. 1727) und Cassini (1740). Ja, in dem Längen- und Breiten-Catalog der *Connaissance des tems* ist sie von dem Jahrgang für 1764, als in welchem dieser Catalog zum ersten Mal vorkommt, selbst bis zu dem *pour l'an* X (1802) unverändert beibehalten worden.

Heinsius, Professor der Mathematik in Leipzig von 1745 bis 1769 (†), war zugleich ein sehr fleissiger Beobachter. Aus dem Sommersolstitium von 1746 und den Mittagshöhen einiger Sterne fand er die Polhöhe im Mittel = 51° 22′ 10″. *Nov. Comment. Acad. sc. Petrop.*, Tom. I. (ad ann. 1747 et 48), pag. 468. Aus dem Sommer- und Wintersolstitium von 1748 erhielt er sie = 51° 22′ 34″. Ebds. Tom. III. (ad ann. 1750 et 51), pag. 437.

Mehrere Angaben der Leipziger Polhöhe finden sich in dem sehr vollständigen und kritisch gesonderten, geographischen Verzeichniss im ersten Bande der *Sammlung astronomischer Tafeln*, Berlin 1776. Sie sind:

51° 20′ 0″, nach dem in Doppelmayr's *Atlas coelestis*, tab. 15, gegebenen Verzeichniss. Rivinus, Junius, Beobachter.

51° 19′ 41″ und 51° 22′ 15″, nach neueren Beobachtungen. Der letzteren Angabe ist Heinsius als Beobachter, beigesetzt.

51° 19′, aus Mayer's *Mappa Germaniae critica*.

51° 21′ 32″, aus geographischen Vermessungen von Hessen bis Schlesien.

Ich komme jetzt zu neueren Bestimmungen, welche nur um wenige Secunden unter sich verschieden sind, und sich auf das Local der Sternwarte selbst beziehen.

Dahin scheint mir zuerst die in der *Connaissance des tems pour l'an XI* (1803, herausgekommen im Jahr 1800) abgeänderte, und bis jetzt darin beibehaltene Bestimmung: 51° 20′ 10″ zu gehören, wiewohl ich den Urheber dieser Angabe nicht habe ausfindig machen können.

Im Jahre 1804 d. 1. April nahm der hier anwesende Baron von Zach mit einem Lenoir'schen Multiplicationskreise 50 Sonnenhöhen, jedoch nicht auf der Sternwarte, weil er hier keinen soliden Ort zur Aufstellung finden konnte, sondern in einem Garten am Petersthore. Die daraus berechnete und auf die Sternwarte reducirte Polhöhe ist: 51° 20′ 14″2. Siehe *Monatl. Corresp.* B. X, S. 391. Doch wird hinzugefügt, dass diese Bestimmung theils wegen unstäter Witterung, theils wegen einiger Ungewissheit in der Zeitbestimmung ein Paar Secunden zweifelhaft sein könne.

Eben daselbst S. 392 stehen noch folgende zwei Angaben: Mit einem zehnzölligen Borda'schen Kreise fand Goldbach durch Beobachtungen der Sonne und etlicher Sterne in den Jahren 1802 bis 1804: 51° 20′ 10″0.

Prof. Rüdiger fand aus Sonnenbeobachtungen mit dem Troughton'schen Sextanten: 51° 20′ 44″.

Die neueste Breitenbestimmung haben wir dem Major Aster zu verdanken. Er erhielt aus acht, den 20. März 1816 mit einem Spiegelsextanten genommenen, Circummeridianhöhen der Sonne: 51° 20′ 21″6. *Zeitschrift für Astronomie*, III. Band, S. 346.

Ich lasse nun die, zur Bestimmung des für eine Sternwarte so wichtigen Elements, von mir am zweifüssigen Troughton'schen Kreise angestellten Beobachtungen folgen. Das dabei angewendete Verfahren, welches unabänderlich dasselbe war, will ich durch nachstehendes Beispiel einer vollständig berechneten Beobachtung auseinandersetzen.

Beobachtungen von *α Ursae minoris* bei seiner oberen Culmination den 1. Februar 1822.

Vor der Culmination, um $t = 0^h\ 50'\ 56''$ Sternzeit, wurde Höhe beobachtet:

am linken Mikrom.	am rechten Mikrom.
53° 0′ 10″3	52° 50′ 54″4

Nach der Culmination und nach halber Wendung des Instruments, um $t'' = 1^h\ 3'\ 36''$, erhielt ich für den Zenithabstand resp.:

$$37^\circ\ 1'\ 56''0 \quad | \quad 37^\circ\ 1'\ 43''0\ .$$

Das Mittel aus den beiden Ablesungen der Höhe ist $53^\circ\ 0'\ 2''35$ und hiervon das Complement zu 90°:

$$z' = 36^\circ\ 59'\ 57''65\ .$$

Das Mittel aus den abgelesenen Zenithabständen giebt:

$$z'' = 37^\circ\ \ 1'\ 49''50\ ,$$

mithin

$$\frac{1}{2}(z' + z'') = 37^\circ\ 0'\ 53''57 = z\ .$$

Erste Correction, oder Reduction auf den Meridian. Die zwischen den Zeiten t und t'' am Mittagsfernrohr beobachtete Culmination des Polaris geschah um $t' = 0^h\ 56'\ 59''$.

Folglich

$$t' - t = 6'\ 3''\ , \qquad t'' - t' = 6'\ 37''\ .$$

Diesen Differenzen entsprechen in den Reductionstafeln *Hülfstafeln für Zeit- und Breitenbestimmung* von Schumacher, 1820) die Zahlen: 71·9 und 86·0 die Quadrate der in Secunden ausgedrückten Differenzen mit $\frac{1}{2} \cdot 15^2 \cdot \sin 1''$ multiplicirt). Die halbe Summe derselben = 78·05, multiplicirt mit $\frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)} = -0·0200$, (wo die Polhöhe $\varphi = 51^\circ\ 20'$, die Declination $\delta = 88^\circ\ 22'$) giebt $-2''34$ als die gesuchte Reduction.

Will man zugleich den Collimationsfehler erfahren, so müssen z' und z'' einzeln auf den Meridian reducirt, und von der Differenz der so reducirten Abstände die Hälfte genommen werden. In unserem Beispiel finden sich die Reductionen von z' und z'' resp. $-2''13$ und $-2''54$, also die reducirten Werthe $z' = 36^\circ\ 59'\ 55''52$ und $z'' = 37^\circ\ 1'\ 46''96$, wovon die halbe Differenz $= 55''7$ dem Collimationsfehler gleich ist, als um welchen der Kreis die Höhe und den Zenithabstand zu gross angegeben hat.

Bei den nachfolgenden Beobachtungen des Polaris habe ich diesen Fehler mit beigefügt. Man ersieht daraus, dass er bis zum Januar ziemlich constant geblieben ist. Seine beträchtlichen Veränderungen im Februar rühren davon her, dass diese Beobachtungen noch bei Tage gemacht wurden, wo ich den Stern nicht mehr bisecciren konnte, sondern ihn mit dem Faden nur in Berührung brachte

(bei je zwei zusammengehörigen Beobachtungen an derselben Seite des Fadens).

Zweite Correction wegen der Strahlenbrechung. Ich bediene mich hierzu der ebenfalls in den Schumacher'schen *Hülfstafeln* gegebenen Brinkley'schen Refractionstafeln, wo die Berechnung nach der Formel:

$$b\,t\ \text{tang}\ z - c$$

geschieht. Nun war der Stand

des Barometers . . . . 29·759 engl. Zoll
des am Kreise befestigten Thermometers 37°5 }
des Thermometers in der Meridianspalte 37·0 } Fahrenheit.
also im Mittel 37·25 }

$$\log \text{tang}\ z = 9{\cdot}8773$$

wegen des Barometers: $\log b = 1{\cdot}4736$

wegen des Thermometers: $\log t = 0{\cdot}3018$

$$1{\cdot}6527$$

also $b\,t$ tang $z = 44''95$ gleich der Refraction, weil $c = 0$.

Dritte Correction, wegen Abweichung der verticalen Axe. Bei der einen Lage des Instruments im Meridian standen die Enden der Luftblase in der Hängelibelle auf

57 Südl., 56 Nördl.;

bei der entgegengesetzten Lage auf

53 Nördl., 60 Südl.

Die Summe dieser vier Ablesungen, nördlich und südlich als entgegengesetzte Grössen genommen, ist 8 südlich, welche mit $\frac{1''18}{4}$ multiplicirt, 2''36 südlich giebt. Um so viel wich nämlich die Axe vom Nadir nach Süden und mithin vom Zenith nach Norden zu ab. Die Correction ist daher $= + 2''36$.

Der wahre Zenithabstand ist folglich:

$$37^\circ\ 0'\ 53''57 - 2''34 + 44''95 + 2''36 = 37^\circ\ 1'\ 38''54\,.$$

Für dieselbe Zeit war aber, nach den *Hülfstafeln* für 1822, die Declination des Polaris

$$\delta = 88^\circ\ 21'\ 58''49\,,$$

folglich die Polhöhe der Sternwarte

$$\varphi = 51^\circ\ 20'\ 19''95\,.$$

α Ursae minoris.

A) In der oberen Culmination.

Tage.	Zenith-abst.	Declinat.	Polhöhe	Abw. v. Mittel	Coll.-Fehler
1821	37° 1′	88° 21′	51° 20′		
30. Nov.	31″6	53″3	21″7	+ 1″0	44″0
4. Dec.	33·9	54·2	20·3	— 0·4	45·8
10. -	36·2	55·6	19·4	— 1·3	41·5
13. -	37·0	56·3	19·3	— 1·4	43·7
14. -	34·3	56·5	22·2	+ 1·5	46·2
15. -	37·6	56·7	19·1	— 1·6	45·7
16. -	37·8	56·8	19·0	— 1·7	47·5
17. -	38·3	57·0	18·7	— 2·0	45·5
27. -	37·7	58·5	20·8	+ 0·1	47·3
28. -	37·2	58·7	21·5	+ 0·8	44·5
29. -	35·9	58·8	22·9	+ 2·2	46·7
1822					
1. Jan.	36·7	58·9	22·2	+ 1·5	50·1
2. -	38·9	59·0	20·1	— 0·6	44·6
4. -	38·1	59·1	21·0	+ 0·3	50·1
6. -	36·0	59·3	23·3	+ 2·6	47·2
1. Febr.	38·6	58·5	19·9	— 0·8	55·7
8. -	38·9	57·7	18·8	— 1·9	58·8
10. -	36·4	57·3	20·9	+ 0·2	48·2
14. -	34·3	56·5	22·2	+ 1·5	48·2
16. -	36·3	56·2	19·9	— 0·8	58·3

Mittel $\varphi = 51^\circ\ 20'\ 20''7$

B) In der unteren Culmination.

Tage.	Zenith-abst.	Declinat.	Polhöhe	Abw. v. Mittel	Coll.-Fehler
1821	40° 17′	88° 21′	51° 20′		
2. Dec.	44″4	53″9	21″6	+ 0″9	41″0
6. -	43·9	54·7	21·4	+ 0·7	42·4
9. -	44·2	55·5	20·3	— 0·4	45·5
10. -	42·6	55·7	21·7	+ 1·0	50·9
14. -	43·3	56·6	20·1	— 0·6	46·5
16. -	43·5	56·9	19·6	— 1·1	45·6
17. -	42·4	57·1	20·5	— 0·2	47·4

Mittel $\varphi = 51^\circ\ 20'\ 20''7$

κ Draconis.

Die hier und bei dem folgenden Circumpolarstern in der Columne Reduct. stehenden Secunden sind der Inbegriff der Correctionen wegen Präcession, Aberration, Lunar- und Solar-Nutation, wodurch die scheinbare Declination und folglich auch der scheinbare Zenithabstand auf den mittleren für den Anfang des Jahres 1822 gebracht wird.

A) In der oberen Culmination.

Tage	Zenithabst.	Reduct.	mittl. Zenithabst.	Abw. v. Mittel
1821	19° 25′		19° 25′	
9. Dec.	35″1	+ 20″4	55″5	— 1″0
14. -	35·5	21·5	57·0	+ 0·5
15. -	35·9	21·7	57·6	+ 1·1
16. -	33·5	21·9	55·4	— 1·1
17. -	34·9	22·0	56·9	+ 0·4

Mittel $z = 19° 25' 56''5$

B) In der unteren Culmination.

Tage	Zenithabst.	Reduct.	mittl. Zenithabst.	Abw. v. Mittel
1821	57° 53′		57° 53′	
10. Dec.	49″3	— 20″6	28″7	— 0·6
13. -	50·6	21·3	29·3	— 0·0
14. -	51·5	21·4	30·1	+ 0·8
15. -	51·1	21·7	29·4	+ 0·1
16. -	49·8	21·8	28·0	— 1·3
17. -	52·7	22·1	30·6	+ 1·3
27. -	51·8	23·6	28·2	— 1·1
28. -	54·6	23·7	30·9	+ 1·6
1822				
1. Jan.	50·1	24·1	26·0*)	
2. -	52·8	24·2	28·6	— 0·7

Mittel $z = 57° 53' 29''3$

Für den 1. Januar 1822 war demnach

mittlerer Zenithabstand in der oberen Culmination	= 19° 25′ 56·5
- - - - unteren -	= 57 53 29·3
halbe Summe oder Aequatorhöhe	= 38 39 42·9
Polhöhe	= 51 20 17·1
Declination	= 70 46 13·6

*) Diese Beobachtung wurde beim Berechnen des Mittels weggelassen.

Nach dem Catalog von Bradley's und Piazzi's Sternen in den *Hülfstafeln* für 1821 ist die Declination = 70° 46′ 13″0, also nur um 0″6 kleiner als die vorige.

ε Cassiopejae.

A) In der oberen Culmination.

Tage	Zenithabst.	Reduct.	mittl. Zenithabst.	Abw. v. Mittel
1821	11° 27′		11° 26′	
29. Dec.	20″6	— 22″8	57″8	+ 0″4
1822				
1. Jan.	19·2	23·1	56·1	— 1·3
2. -	21·1	23·1	58·0	+ 0·6
1. Febr.	20·4	22·8	57·6	+ 0·2

Mittel z = 11° 26′ 57″4

B) In der unteren Culmination.

Tage	Zenithabst.	Reduct.	mittl. Zenithabst.	Abw. v. Mittel
1822	65° 52′		65° 52′	
1. Jan.	6″5	+ 23″1	29″6	+ 2″0
3. -	4·7	23·0	27·7	+ 0·1
10. Apr.	13·9	9·0	22·9	
12. -	19·0	8·5	27·5	— 0·1
15. -	18·5	7·8	26·3	— 1·3
18. -	19·9	7·2	27·1	— 0·5

Mittel *) z = 65° 52′ 27″6

Den 1. Januar 1822 war demnach

mittl. Zenithabstand in der oberen Culmination . .	= 11° 26′ 57″4
- - - - unteren -	= 65 52 27·6
folglich die Aequatorhöhe	= 38 39 42·5
Polhöhe	= 51 20 17·5
Declination	= 62 47 14·9
Declination nach Bradley und Piazzi	= 62 47 15·1
Unterschied	= 0″2

*) Mit Weglassung des zu abweichenden Zenithabstandes vom 10. April

α Leonis.

Ich beobachtete diesen Stern zum Behuf der diesjährigen Opposition des Mars. Die scheinbaren Declinationen sind aus der Ephemeride in den *Hülfstafeln* für 1822 entlehnt.

Tage	Zenithabst.	Declinat.	Polhöhe	Abw. v. Mittel
1822	38° 30′	12° 49′	51° 20′	
6. Febr.	23″7	53″3	17″0	0″0
8. -	22·8	53·2	16·0	— 1·0
9. -	24·5	53·1	17·6	+ 0·6
10. -	22·6	53·1	15·7	— 1·3
14. -	25·0	53·0	18·0	+ 1·0
15. -	25·0	52·9	17·9	+ 0·9

Mittel $\varphi = 51^\circ\, 20'\, 17''0$

Uebersicht der Resultate.

α Ursae min.	A	20 Beob.	51° 20′ 20″7
	B	7	...... 20·7
ϰ Draconis	A	5	...... 17·1
	B	[illegible]	
ε Cassiop.	A	[illegible]	...... 17·5
	B	5	
α Leonis		6	...... 17·0
		50	

Ein Mittel aus allen diesen Bestimmungen dürfte wohl nicht zu nehmen sein. Die sonderbare Uebereinstimmung der, aus jeder der beiden Culminationen des Polaris abgeleiteten, Polhöhen unter sich, gegenüber der mehr als 3 Secunden betragenden Abweichung derselben von den ebenfalls gut unter sich stimmenden der drei anderen Sterne, scheint auf Theilungsfehler an den Stellen des Kreises, wo beim Polaris abgelesen wurde, hinzudeuten. Doch ist die Anzahl der beobachteten Sterne noch zu klein, um etwas Bestimmteres darüber sagen zu können. Viele andere Beobachtungen, die ich zu diesem Zweck, theils schon gemacht, aber noch nicht berechnet habe, theils noch anzustellen gedenke, werde ich in der Folge mittheilen.

III. Beobachtung und Berechnung der Opposition des Mars im Jahre 1822.

Die hierbei zum Grunde gelegte Polhöhe ist die aus den gleichzeitigen Beobachtungen des Regulus abgeleitete, $\varphi = 51^\circ\ 20'\ 17''0$, da bei diesem Stern der Mars ziemlich nahe vorüber ging. Die Berechnung wurde mit den Lindenau'schen Marstafeln und den Carlini'schen Sonnentafeln geführt. Aus diesen berechnete ich die geocentrischen Rectascensionen und Declinationen des Mars von vier zu vier Tagen, und leitete daraus die Oerter für die Beobachtungszeiten durch sorgfältige Interpolation her.

Mittl. Leipz. Zeit.	Beob. AR.	dAR.	Beob. Decl	dD
6. Febr. 13ʰ 26′ 44″0	158° 15′ 15″6	+ 3″6	13° 51′ 58″0	+ 6″4
8. - 13 16 16·1	157 36 8·2	— 0·6	14 8 52·2	+ 4·3
9. - 13 10 58·9	157 15 45·4	+ 1·5	14 17 23·0	+ 5·5
10. - 13 5 39·7	156 54 53·2	+ 5·0		
14. - 12 44 9·3	155 27 57·6	— 2·2	15 0 22·0	+ 4·4
15. - 12 38 43·2	155 5 10·0	+ 3·4	15 8 53·4	+ 4·5
22. - 12 0 27·1	152 23 42·7	+ 2·3	16 5 45·7	+ 6·5
23. - 11 54 58·7	152 0 32·2	+ 6·8	16 13 16·5	+ 6·0
28. - 11 27 50·5	150 8 4·5	+ 1·3	16 47 41·6	+ 6·3
1. März 11 22 28·6	149 46 30·1	— 1·4	16 53 55·8	+ 2·3
2. - 11 17 8·1	149 25 18·4	— 4·4	16 56 48·9	+ 3·3
4. - 11 6 31·7	148 44 3·0	+ 0·4	17 10 46·4	+ 5·5
5. - 11 1 10·4	148 24 8·0	+ 3·7	17 15 51·6	+ 5·0

dAR und dD sind die Fehler der Tafeln in Rectascension und Declination. Erstere laufen etwas irregulär, welches nicht sowohl von schlecht bestimmter Zeit, als vielmehr davon herrühren mag, dass es mir nicht immer gelang, die Momente genau zu schätzen, in welchen der Mittelpunkt der Marsscheibe hinter den Fäden des Mittagsrohrs stand. Mit Ausschliessung der zu sehr abweichenden Beobachtungen vom 23. Februar und 2. März ist im Mittel

$$d\mathrm{AR} = +\ 1''37\ .$$

Besser stimmen die Fehler in Declination überein. Das Mittel aus allen ist:

$$d\mathrm{D} = +\ 5''00\ .$$

Hieraus folgt weiter der Fehler der Tafeln:

in geocentrischer	Länge	.....	$= - 0''59$
-	- Breite	.....	$= + 5{\cdot}19$
in heliocentrischer	Länge	.....	$= - 0{\cdot}24$
-	- Breite	.....	$= + 2{\cdot}12$

Hiermit die Opposition selbst berechnet, erhalte ich:

Zeit der Opposition: 1822, Febr. 18, $19^h\ 23'\ 33''1$ mittl. Leipz. Zeit.
Wahre Länge des Mars (ohne Aberration und Nutation) $= 5^s\ 0^\circ\ 6'\ 28''6$

Wahre heliocentrische Breite .... $= 1^\circ\ 48'\ 39''5$
- geocentrische - .... $= 4\ \ 27\ \ 18{\cdot}7$.

IV. Eine Cometenbeobachtung.

Der dritte Comet des Jahres 1822, welchen Pons in Marlia den 13. Juli in der Cassiopeja entdeckte, wurde auf hiesiger Sternwarte zuerst den 4. Septbr. gesehen. Ich beobachtete ihn von da mehrere Abende hinter einander mit einem Kreismikrometer. Allein ich unterdrücke diese Beobachtungen, weil ich nicht alle Vorsicht für solide Aufstellung des Instruments angewendet zu haben glaube. Ein Paar Wochen später versuchte ich eine andere Methode, die in der *Monatl. Corresp.* XXIV, 528 vom Freiherrn v. Zach sehr anempfohlene der Höhen und Azimuthe. Der 17-zöllige Troughton'sche Kreis, wodurch man beide Elemente bis 5″ genau erhalten kann, schien mir hierzu sehr brauchbar zu sein. Weil der Comet zu lichtschwach war, als dass er die Erleuchtung des Sehfeldes vertragen hätte, so liess ich statt der Silberfäden zwei zarte Stanniolstreifen, den einen vertical, den andern horizontal, einspannen, hinter welchen der Kern des Cometen oder ein Stern mehrere Secunden lang unsichtbar bleiben musste. Der Durchmesser des Sehfeldes beträgt $1^\circ\ 27'$, und die Breite der Streifen $4'\ 42''$.

Die gewöhnliche Beobachtungsart der Höhen und Azimuthe besteht nun darin, dass man abwechselnd die einen und die anderen nimmt, und sie sodann insgesammt auf ein und dasselbe Zeitmoment reducirt. Um geschwinder von Statten zu kommen und sich die mühsamen Reductionsrechnungen zu ersparen, änderte v. Zach a. a. O. diese Methode dahin ab, dass er selbst an einem Verticalkreise die Höhen, und, weil der mit diesem Instrumente verbundene Azimuthalkreis nur einzelne Minuten gab, sein Gehülfe an einem Theodoliten auf ein gegebenes Signal gleichzeitig die Azimuthe

beobachtete. Offenbar aber ist die hierdurch zu erreichende Genauigkeit wenigstens nicht grösser, als wenn blos Ein Beobachter an Einem Instrumente, welches beide Winkel mit gleicher Schärfe anzugeben im Stande ist, den Stern in den Durchschnittspunkt der Fäden zu bringen sucht; und dieses bleibt immer eine schwierige Sache. Ich habe daher ein noch anderes Verfahren in Anwendung gebracht, welches eben so schnell, als die Methode der gleichzeitigen Höhen und Azimuthe fördert, und eine nur geringfügige Reductionsrechnung nöthig macht. Da dieses Verfahren anderswo mir noch nicht vorgekommen ist, so will ich es hier kürzlich mittheilen.

Nachdem der Stern in das Feld eingetreten ist, stelle man das Rohr so, dass er ziemlich nahe bei dem Durchschnitt der Fäden vorübergehen muss. Man beobachte nun die beiden Zeitpunkte, in denen der Stern an den horizontalen und an den verticalen Faden tritt. Die am Verticalkreise abgelesene Höhe wird alsdann dem ersterwähnten Zeitpunkt, so wie das am Azimuthalkreise abgelesene Azimuth dem letzteren zugehören. Sei nun das Intervall zwischen beiden Zeitpunkten $= t$, Declination, Variationswinkel und Höhe des Gestirns $= \delta, v, h$, so ist während t:

$$\text{die Höhenänderung} = 15\, t \cos\delta \sin v\,,$$

$$\text{die Aenderung im Azimuthe} = 15\, t \cos\delta \cos v \sec h\,.$$

Das eine der beiden Elemente wird hierauf durch Hinzufügung seiner Aenderung mit dem gehörigen Zeichen auf den dem anderen Elemente entsprechenden Zeitpunkt reducirt.

Offenbar ist es am sichersten, wenn man dasjenige Element reducirt, dessen Aenderung die kleinste von beiden ist. Zur trigonometrischen Berechnung derselben wird man nie mehr als vier Decimalstellen bedürfen. — Die speciellen Fälle, wenn der Stern in der Nähe des Pols oder des Zeniths steht, und wo man noch andere Correctionen anzubringen hat, übergehe ich hier.

Gebraucht man statt der Fäden die vorhin gedachten Streifen, so kann man, wenn anders der Weg des Sterns durch das Sehfeld mit dem einen oder dem anderen Streifen einen nicht zu kleinen Winkel bildet, die Ein- und Austritte an beiden Streifen beobachten. Die Mittel aus je zwei zusammengehörigen geben sodann die Zeiten, in welchen sich der Stern hinter den, hier die Stelle der Fäden vertretenden, Mittellinien der Streifen befand. Auch lässt sich dann v aus der Beobachtung unmittelbar ableiten, indem die Tangente dieses Winkels der Zeit, während welcher der Stern hinter dem verticalen Streifen verweilte, dividirt durch die Zeit, welche er hinter dem horizontalen zubrachte, gleich ist. Kann oder will man nicht alle vier

Zeitpunkte bemerken, so geben schon zwei Beobachtungen, an der einen Seite des einen und an der einen des anderen Streifens, ein befriedigendes Resultat, indem dann diese Seiten selbst für die Fäden genommen werden.

Dieses ist die Methode, nach welcher ich nun den Cometen weiter zu verfolgen mir vornahm; indessen bin ich dabei nicht glücklich gewesen. Den ersten Versuch, bei welchem es auch blieb, machte ich den 21. Septbr. Um die Collimationsfehler des Instruments zu erhalten, beobachtete ich zugleich α Ophiuchi, fing aber mit dem Cometen an, weil nahe Wolkenstreifen ihn bald zu verdecken drohten. Die Beobachtungen sind folgende:

mittl. Zeit.	Höhen.	Azimuthe.	
21. Septbr.			
8^h 13′ 18″	22° 6′ 15″		Comet
14 2		134° 28′ 30″	
20 6	21 7 15		Comet
20 49		135 58 10	
29 46	35 30 30		α Oph.
30 23		127 34 0	
36 40	34 33 55		α Oph.
36 45		129 9 55	
44	hinter Wolken zu undeutl.		Comet
49 32	32 45 15		α Oph.
50 16		132 27 0	

Der Comet war hinter den Wolken verschwunden.

Ich berechnete nun für die Beobachtungszeiten von α Oph. aus dessen Rectascension und Declination, wie sie in der Ephemeride der *Hülfstafeln* angegeben stehen, die scheinbaren Höhen und Azimuthe, und fand als Correctionen der

	Höhen:	Azimuthe:
	+ 1° 5′ 42″	— 66° 43′ 2″
	1 5 24	66 43 27
	1 5 24	66 43 23
im Mittel	+ 1 5 30	— 66 43 17

Mit diesen Mitteln die beobachteten Höhen und Azimuthe des Cometen verbessert, zu ersteren noch die Refraction (— 2′ 12″, — 2′ 19″), und zu letzteren die Reductionen auf die Beobachtungszeiten der

Höhen (— 9′ 32″, — 9′ 13″) hinzugefügt, ergaben sich des Cometen wahre

	Höhen:	Azimuthe:
8ʰ 13′ 18″	23° 9′ 33″	67° 35′ 41″
20 6	22 10 26	69 5 40

und hieraus durch weitere Rechnung:

	Rectasc.	Declin.
8 13 18	244 50 51	+ 5 3 30
20 6	244 50 46	5 3 52

also im Mittel und als endliches Resultat:

8ʰ 16′ 42″ | 244° 50′ 50″ | + 5° 3′ 41″.

Die folgenden Abende traten zufällige Störungen ein, und späterhin, wo der Comet immer niedriger im Westen stand, und der Mondschein immer mehr zunahm, musste ich die Beobachtungen gänzlich aufgeben, da das Licht des Cometen für das kleine Fernrohr des Kreises nicht stark genug war.

Kurze Darstellung der Haupteigenschaften eines Systems von Linsengläsern.

[Crelle's Journal für Mathematik, V. Band, S. 113—132. 1829.]



Unter den Haupteigenschaften eines Systems von Linsengläsern werden hier diejenigen verstanden, welche einem solchen Systeme, abgesehen von den Abweichungen wegen der Kugelgestalt und der Farbenzerstreuung, zukommen. Schon früher hatte ich mit diesem interessanten Gegenstande mich zu beschäftigen angefangen, als ich eine Abhandlung darüber von Gabrio Piola in den *Mailänder Ephemeriden* für 1822: *Sulla Teorica dei Cannocchiali*, kennen lernte, wozu der Verfasser, wie er im Eingange bemerkt, durch das Studium zweier Abhandlungen ähnlichen Inhalts von Lagrange in den *Berliner Memoiren* für 1778 und 1803 veranlasst worden war, und wovon sich sein Aufsatz hauptsächlich dadurch unterscheidet, dass er die durch Lagrange's Calcul erhaltenen Gleichungen als lineare Gleichungen mit endlichen Differenzen behandelt, und dadurch zu einer nicht geringen Anzahl neuer Relationen geführt wird. Durch Lesung dieser Abhandlung von Piola, mit den von Lagrange angewendeten Methoden und mit den von Piola fortgesetzten Untersuchungen bekannt gemacht, gelang es mir nun leicht, den von mir früher gefundenen Resultaten eine allgemeinere und einfachere Form zu geben, unter der ich sie im vorliegenden Aufsatze mitzutheilen mir erlaube. Es werden darin zuerst aus der bekannten Formel für eine einfache Linse die allgemeinen, für ein beliebiges System von Gläsern geltenden Gleichungen durch Bildung eines Kettenbruches und durch Benutzung der bekannten, den Kettenbrüchen zukommenden Eigenschaften hergeleitet; eine Herleitung, welche neu sein und durch ihre Einfachheit sich vielleicht empfehlen dürfte. Mit Hülfe der erhaltenen Relationen werden sodann mehrere mir neu scheinende Vergleichungen zwischen einfachen Linsen und daraus zusammengesetzten Systemen angestellt, wonach die Erscheinungen bei letzteren sich ganz nach den bei ersteren stattfindenden Gesetzen richten. Den Fernröhren, als einer merkwürdigen, speciellen Art von Linsensystemen, ist zum Schlusse ein besonderer Abschnitt gewidmet.

Figuren beizufügen, habe ich nicht für nöthig erachtet, obgleich sehr oft Buchstaben zur Bezeichnung einzelner Punkte angewendet worden sind. In dieser Hinsicht erinnere ich nur noch, dass durchgehends beim Ausdruck einer Linie durch die zwei an ihre Endpunkte gesetzten Buchstaben, die Aufeinanderfolge dieser Buchstaben mit berücksichtigt werden muss, so dass, wenn $A, B, C, \ldots$ beliebig in einer Geraden gelegene Punkte sind, man stets

$$AB + BA = 0, \qquad AB + BC = AB - CB = AC,$$

u. s. w. hat.

---

§. 1. Man denke sich ein System von n Linsengläsern, deren Axen in eine und dieselbe Gerade fallen. Das Glas, auf welches der Strahl zuerst trifft, heisse das erste; das unmittelbar folgende, das zweite; u. s. w., und nach dieser Ordnung seien

$$P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$$

die in der gemeinschaftlichen Axe liegenden Mittelpunkte der Gläser.

Sei ferner A der Vereinigungspunkt der auf das erste Glas fallenden Strahlen, die, je nachdem A vor oder hinter dem Glase liegt, von A wirklich ausgehen, oder so das Glas treffen, dass sie ohne den Dazwischentritt desselben sich in A vereinigen würden. Nach ihrer Brechung durch das erste Glas sei A_1 ihr Vereinigungspunkt, so dass sie entweder nach A_1 zu wirklich convergiren, oder so divergiren, als ob sie von einem vor dem Glase gelegenen Punkte A_1 herkämen. Auf gleiche Weise seien $A_2, A_3, \ldots A_n$ die Vereinigungspunkte der Strahlen nach ihrer Brechung durch das zweite, dritte, ... n^{te} Glas. Uebrigens wollen wir für den Anfang den Punkt A und damit auch alle übrigen $A_1, \ldots A_n$ in der Axe selbst liegend annehmen.

Die hierbei zu lösende Aufgabe ist nun folgende:

Das System der Gläser, d. h. ihre gegenseitigen Abstände und ihre Brennweiten sind gegeben. Es soll für einen beliebig in der Axe angenommenen Ort des Vereinigungspunktes A der auf das erste Glas fallenden Strahlen, der Ort der Vereinigung A_n nach ihrer Brechung durch das letzte Glas gefunden werden.

§. 2. Man setze die Abstände der Gläser von einander:

$$P_1P_2 = h_1, \quad P_2P_3 = h_2, \quad \ldots \quad P_{n-1}P_n = h_{n-1};$$

die reciproken Werthe ihrer Brennweiten, positiv bei erhabenen Gläsern, negativ bei hohlen:

$$g_1, g_2, g_3, \dots g_n .$$

Endlich sei:

$$AP_1 = a_1 , \quad A_1 P_2 = a_2 , \dots \quad A_{n-1} P_n = a_n ,$$
$$P_1 A_1 = b_1 , \quad P_2 A_2 = b_2 , \dots \quad P_n A_n = b_n ,$$

welche Linien positiv oder negativ zu nehmen sind, je nachdem in ihren Ausdrücken die Aufeinanderfolge der zwei ihre Endpunkte bezeichnenden Buchstaben (wie P_2 auf A_1 folgend, in dem Ausdrucke $A_1 P_2 = a_2$), mit der Richtung des Lichtes übereinstimmt, oder ihr entgegengesetzt ist. Hiernach sind h_1, h_2, ... h_{n-1} insgesammt positiv.

Um nun, wie es die Aufgabe fordert, aus den gegebenen h_1, h_2, ... und g_1, g_2, ... für ein beliebiges a_1 das zugehörige b_n zu finden, hat man die Gleichungen aufzulösen:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = g_1 , \qquad b_1 + a_2 = h_1 ,$$
$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = g_2 , \qquad b_2 + a_3 = h_2 ,$$
$$\frac{1}{a_3} + \frac{1}{b_3} = g_3 , \qquad \dots$$
$$\dots \qquad b_{n-1} + a_n = h_{n-1} ,$$
$$\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} = g_n ,$$

von denen die Gleichungen zur Rechten von selbst einleuchten, die linker Hand stehenden aber aus den Elementen der Dioptrik bekannt sind. Mittelst eines beliebig gegebenen a_1 kann man daraus nach und nach b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, ... b_{n-1}, a_n, und damit endlich b_n selbst berechnen. Da aber diese ziemlich weitläufige Rechnung für jeden anders gewählten Werth a_1 wiederholt werden müsste, und gleichwohl, im Allgemeinen wenigstens, die Werthe von b_1, a_2, ... a_n nicht weiter zu wissen verlangt werden, so wollen wir durch Elimination dieser Grössen eine Gleichung zwischen a_1 und b_n unmittelbar abzuleiten suchen.

§. 3. Aus den obigen Gleichungen folgt:

$$b_1 = \frac{1}{g_1 - \frac{1}{a_1}} ,$$

$$b_2 = \frac{1}{g_2 - \frac{1}{a_2}} = \frac{1}{g_2 - \frac{1}{h_1 - b_1}} = \frac{1}{g_2 - \frac{1}{h_1 - \frac{1}{g_1 - \frac{1}{a_1}}}}$$

$$b_3 = \frac{1}{g_3 - \frac{1}{h_2 - b_2}} = \frac{1}{g_3 - \frac{1}{h_2 - \frac{1}{g_2 - \frac{1}{h_1 - \frac{1}{g_1 - \frac{1}{a_1}}}}}}$$

u. s. w. Aus der Natur der Kettenbrüche erhellet aber leicht, dass, wenn man aus den Elementen $a, b, c, d, \ldots$ die Zusammensetzungen bildet:

$$[a, b] = ab - 1 \ ,$$
$$[a, b, c] = [a, b] \, c - a \ ,$$
$$[a, b, c, d] = [a, b, c] \, d - [a, b] \ ,$$
$$[a, b, c, d, e] = [a, b, c, d] \, e - [a, b, c] \ ,$$

etc. und eben so

$$[b, c] = bc - 1 \ ,$$
$$[b, c, d] = [b, c] \, d - b \ ,$$

u. s. w. setzt, der Kettenbruch

$$\cfrac{1}{a - \cfrac{1}{b - \cfrac{1}{c - \text{etc.} \atop - \frac{1}{k}}}} = \frac{[b, c, \ldots k]}{[a, b, c, \ldots k]}$$

ist.

Auch besitzen diese Ausdrücke die nicht schwer zu erweisenden Eigenschaften, dass

$$[a, b, \ldots i] \, [b, c, \ldots i, k] - [a, b, \ldots i, k] \, [b, c, \ldots i] = 1 \ ,$$

und dass

$$[a, b, \ldots i, k] = [k, i, \ldots b, a] \ ,$$

so dass die Elemente, ohne den Werth des Ausdrucks zu verändern, auch in umgekehrter Folge genommen werden können*).

*) Vergl. Euler: *Specimen algorithmi singularis* in *Nov. Comment. Petropol.* Tom. IX.

Hiernach ist nun:

$$b_1 = \frac{a_1}{[g_1, a_1]},$$

$$b_2 = \frac{[h_1, g_1, a_1]}{[g_2, h_1, g_1, a_1]},$$

$$b_3 = \frac{[h_2, g_2, h_1, g_1, a_1]}{[g_3, h_2, g_2, h_1, g_1, a_1]}.$$

und überhaupt:

$$b_n = \frac{[h_{n-1}, g_{n-1}, h_{n-2}, \dots h_1, g_1, a_1]}{[g_n, h_{n-1}, g_{n-1}, h_{n-2}, \dots h_1, g_1, a_1]}$$

$$= \frac{[h_{n-1}, \dots h_1, g_1] a_1 - [h_{n-1}, \dots h_1]}{[g_n, h_{n-1} \dots h_1, g_1] a_1 - [g_n, h_{n-1} \dots h_1]}$$

$$= \frac{[g_1, \dots h_{n-1}] a_1 - [h_1, \dots h_{n-1}]}{[g_1, \dots h_{n-1}, g_n] a_1 - [h_1, \dots h_{n-1}, g_n]}.$$

Setzt man daher, um die Lagrange'sche Bezeichnungsart beizubehalten:

$$[g_1, h_1, \dots h_{i-1}] = H_i \; ; \quad -[h_1, g_2, \dots h_{i-1}] = L_i \, ,$$

$$[g_1, h_1, \dots g_{i-1}] = M_i \; ; \quad -[h_1, g_2, \dots g_{i-1}] = N_i \, ,$$

so wird:

$$b_n = \frac{H_n a_1 + L_n}{M_{n+1} a_1 + N_{n+1}},$$

wonach man, wenn einmal die vier, bloss von der Structur des Linsensystems abhängigen Grössen $H_n, \dots N_{n+1}$ berechnet sind, für jedes gegebene a_1 das zugehörige b_n leicht finden kann.

§. 4. Die Berechnung der vier Grössen $H_n, \dots N_{n+1}$ lässt sich leicht auf verschiedene Arten anstellen, von denen folgende zwei die vorzüglichsten sein möchten.

Man hat:

$$H_{i+1} = [g_1, \dots h_{i-1}, g_i, h_i] = [g_1, \dots h_{i-1}, g_i] h_i - [g_1, \dots h_{i-1}] ,$$

d. i.

$$H_{i+1} = h_i M_{i+1} - H_i \, ,$$

und eben so ergeben sich:

$$L_{i+1} = h_i N_{i+1} - L_i \, ,$$

$$M_{i+1} = g_i H_i - M_i \, ,$$

$$N_{i+1} = g_i L_i - N_i \, .$$

Hiernach ist bei einem System von zwei Gläsern:

$$H_2 = [g_1, h_1] = g_1 h_1 - 1 \ , \quad L_2 = -[h_1] = -h_1 \ ,$$

$$M_3 = g_2 H_2 - M_2 \ , \quad \text{wo} \quad M_2 = [g_1] = g_1 \ ,$$

$$N_3 = -[h_1, g_2] = 1 - h_1 g_2 \ ;$$

bei einem System von drei Gläsern:

$$H_3 = h_2 M_3 - H_2 \ , \quad L_3 = h_2 N_3 - L_2 \ ,$$

$$M_4 = g_3 H_3 - M_3 \ , \quad N_4 = g_3 L_3 - N_3 \ ,$$

u. s. w. Noch bemerke man, dass nach diesen Formeln rückwärts:

$$H_1 = h_1 M_2 - H_2 = 1 \ , \quad M_1 = g_1 H_1 - M_2 = 0 \ ,$$

$$N_2 = g_2 L_2 - N_3 = -1 \ , \quad L_1 = h_1 N_2 - L_2 = 0 \ ,$$

$$N_1 = g_1 L_1 - N_2 = 1$$

sich findet.

§. 5. Eine andere Methode, die Werthe von H, ... N zu berechnen, und welche Piola in der Eingangs erwähnten Abhandlung, wiewohl auf andere Weise, als es jetzt geschehen soll, entwickelt, besteht in Folgendem. Es ist:

$$H_{i+1} = [h_i, g_i, h_{i-1}, \cdots g_2, h_1, g_1]$$

$$= \frac{[h_i, g_i, \cdots g_1]}{[g_i \cdots g_1]} \cdot \frac{[g_i, h_{i-1}, \cdots g_1]}{[h_{i-1}, \cdots g_1]} \cdots \frac{[g_2, h_1, g_1]}{[h_1, g_1]} \cdot \frac{[h_1, g_1]}{g_1} \cdot g_1$$

$$= (h_i, g_i, \cdots g_1)(g_i, h_{i-1}, \cdots g_1) \cdots (g_2, h_1, g_1)(h_1, g_1) g_1 \ ,$$

wenn man den Bruch

$$\frac{[a, b, c, \ldots k]}{[b, c, \ldots k]} = (a, b, c, \ldots k)$$

setzt. Nach §. 3 ist aber dieser Bruch dem Kettenbruche

$$a - \cfrac{1}{b - \cfrac{1}{c - \text{etc.}}}$$

gleich; folglich:

$$(a, b, c, \ldots k) = a - \frac{1}{(b, c, \ldots k)} \ ,$$

und hiernach lassen sich die Factoren, aus welchen wir H_i zusammengesetzt dargestellt haben, ein jeder aus dem nächstvorhergehenden sehr leicht berechnen, nämlich:

$$(h_1, g_1) = h_1 - \frac{1}{g_1} \ , \quad (g_2, h_1, g_1) = g_2 - \frac{1}{(h_1, g_1)} \ , \ \text{u. s. w.}$$

Setzt man daher

$$h_1 - \frac{1}{g_1} = \alpha \;, \quad g_2 - \frac{1}{\alpha} = \beta \;, \quad h_2 - \frac{1}{\beta} = \gamma \;, \quad g_3 - \frac{1}{\gamma} = \delta \;, \text{ u. s. w.},$$

so wird:

$$H_2 = \alpha g_1 \;, \quad H_3 = \gamma \beta \alpha g_1 \;, \quad \text{u. s. w.}$$

Mit Weglassung des ersten Factors von H_{i+1} erhält man M_{i+1} und daher ist

$$M_2 = g_1 \;, \quad M_3 = \beta \alpha g_1 \;, \quad \text{u. s. w.}$$

Auf ähnliche Art ergiebt sich

$$-N_3 = \mu h_1 \;, \quad -N_4 = \pi \nu \mu h_1 \;, \quad \text{u. s. w.}$$

$$-L_2 = h_1 \;, \quad -L_3 = \nu \mu h_1 \;, \quad -L_4 = \varrho \pi \nu \mu h_1 \;, \text{ u. s. w.},$$

wenn

$$g_2 - \frac{1}{h_1} = \mu \;, \quad h_2 - \frac{1}{\mu} = \nu \;, \quad g_3 - \frac{1}{\nu} = \pi \;, \quad \text{u. s. w.}$$

gesetzt wird.

§. 6. Statt, wie bisher, den Vereinigungspunkt der Strahlen vor der Brechung durch das erste Glas, in die Axe selbst fallen zu lassen, wollen wir ihn jetzt ausserhalb der Axe annehmen und ihn mit C bezeichnen. Mit ihm werden auch alle übrigen Vereinigungspunkte, welche der Reihe nach

$$C_1, \; C_2, \; \ldots \; C_n$$

heissen mögen, ausserhalb der Axe sein und zwar so, dass C und C_1 mit P_1, C_1 und C_2 mit P_2, u. s. w. in einer Geraden liegen (nach dem aus der Dioptrik bekannten Satze, dass Object, Bild und Mittelpunkt der Linse immer in einer Geraden enthalten sind). Nehmen wir ferner an, dass C mit A gleich weit von der ersten Linse entfernt sei, dass also CA auf der Axe perpendikular steht, so werden auch A_1C_1, A_2C_2, u. s. w. perpendikular auf der Axe sein. Heissen diese Perpendikel AC, A_1C_1, ... A_nC_n resp. c, c_1, c_2, ... c_n. Sie sind insgesammt in einer durch die Axe gehenden Ebene enthalten, und positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem sie in dieser Ebene auf der einen oder der anderen Seite der Axe liegen.

Zur vollständigen Lösung der Aufgabe, wie aus dem durch a_1 und c bestimmten Orte von C der durch b_n und c_n bestimmte Ort von C_n (oder, was dasselbe ist, aus dem Ort und der Grösse des Objectes AC der Ort und die Grösse des durch alle Gläser gemachten

Bildes $A_n C_n$) gefunden werden kann, hierzu ist nur noch übrig, die Abhängigkeit des c_n von a_1 und c zu zeigen, indem wir die Relation zwischen a_1 und b_n schon kennen gelernt haben.

§. 7. Weil AC, $A_1 C_1$ mit einander parallel sind, und AA_1, CC_1 sich in P_1 schneiden, so verhält sich:

$$AC : A_1 C_1 = AP_1 : A_1 P_1 = AP_1 : - P_1 A_1$$

d. i.

$$c : c_1 = a_1 : - b_1 \quad \text{und eben so} \quad c_1 : c_2 = a_2 : - b_2 ,$$

u. s. w., und man bekommt durch Zusammensetzung aller dieser n Verhältnisse:

$$\frac{c}{c_n} = (-1)^n \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{b_1 b_2 \ldots b_n} .$$

Es ist aber allgemein (§. 3):

$$b_i = \frac{H_i a_1 + L_i}{M_{i+1} a_1 + N_{i+1}} ,$$

folglich:

$$a_{i+1} = h_i - b_i = \frac{(h_i M_{i+1} - H_i) a_1 + h_i N_{i+1} - L_i}{M_{i+1} a_1 + N_{i+1}}$$

$$= \frac{H_{i+1} a_1 + L_{i+1}}{M_{i+1} a_1 + N_{i+1}}$$

(§. 4), und eben so

$$a_i = \frac{H_i a_1 + L_i}{M_i a_1 + N_i} ,$$

folglich

$$\frac{a_i}{b_i} = \frac{M_{i+1} a_1 + N_{i+1}}{M_i a_1 + N_i} ,$$

und eben so

$$\frac{a_{i-1}}{b_{i-1}} = \frac{M_i a_1 + N_i}{M_{i-1} a_1 + N_{i-1}} ,$$

u. s. w.; folglich

$$\frac{a_i}{b_i} \cdot \frac{a_{i-1}}{b_{i-1}} \ldots \frac{a_1}{b_1} = \frac{M_{i+1} a_1 + N_{i+1}}{M_1 a_1 + N_1} = M_{i+1} a_1 + N_{i+1} ,$$

weil $M_1 = 0$ und $N_1 = 1$ (§. 4). Hiernach wird:

$$c_n = \frac{(-1)^n c}{M_{n+1} a_1 + N_{n+1}} ,$$

wodurch man, wenn schon wegen b_n der Nenner dieses Ausdruckes berechnet worden, den Werth von c_n zugleich erhält, und welcher, je nachdem er positiv oder negativ ist, ein aufrechtes oder verkehrtes Bild zu erkennen giebt.

§. 8. Wiewohl die Bestimmung des Ortes und der Grösse des Objectes bei einem aus mehreren Gläsern bestehenden Systeme ungleich zusammengesetzter, als bei einem einfachen Glase ist, so lassen sich doch zwischen den Erscheinungen bei Einem Glase und denen bei der Verbindung mehrerer, einige sehr merkwürdige Analogieen aufstellen, wodurch man die bei einem solchen Systeme statthabenden Gesetze sehr leicht übersehen kann.

Sei P der Mittelpunkt eines Linsenglases, und in der Axe desselben A der Ort des Objectes, B der des Bildes, sei ferner

$AP = a$, $PB = b$, die Brennweite des Glases gleich f,

so ist

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \quad \text{oder} \quad (a+b)f = ab,$$

d. i.

$$(a-f)(b-f) = f^2,$$

und $a:b$ gleich dem Verhältniss zwischen den Durchmessern von Object und Bild. Man setze nun:

$$\alpha = a - f, \quad \beta = b - f,$$

so kommt nach Elimination von a und b:

$$\alpha\beta = f^2 \quad \text{und} \quad a:b = \alpha:f = f:\beta = \sqrt{\alpha}:\sqrt{\beta}.$$

Man bestimme demnach in der Axe zwei Punkte F und G so, dass $FP = PG = f$, dass also F und G die beiden Brennpunkte sind, und zwar F auf der das Licht empfangenden oder vorderen Seite der Linse, und G auf der hinteren Seite liegt, oder umgekehrt, je nachdem f positiv oder negativ, d. i. die Linse erhaben oder hohl ist. Alsdann ist:

$$AF = AP - FP = a - f = \alpha,$$

und

$$GB = PB - PG = b - f = \beta,$$

mithin

$$AF \cdot GB = f^2$$

und

$$AP : PB = AF : FP = PG : GB = \sqrt{AF} : \sqrt{GB}.$$

Nennt man daher (weil für $AF = 0$, $GB = \infty$ und für $GB = 0$, $AF = \infty$ wird,) den Ort F, wo das Object sich befinden muss, wenn das Bild unendlich entfernt sein soll, den ersten Brennpunkt, und den Ort G des Bildes, wenn das Object unendlich fern ist, den zweiten Brennpunkt, so kann man die gefundenen Formeln in folgendem Satze aussprechen:

Die mittlere Proportionallinie zwischen dem Abstande des Objectes vom ersten und dem Abstande des Bildes vom zweiten Brennpunkte ist der Brennweite gleich. Dabei liegt (weil AF und GB zugleich positiv oder zugleich negativ sein müssen) *das Bild rechts vom zweiten Brennpunkte, wenn das Object links vom ersten absteht, und umgekehrt. Auch verhalten sich die Durchmesser von Object und Bild, wie die Quadratwurzeln aus diesen Abständen.*

§. 9. Dieser Satz lässt sich nun auch Wort für Wort auf jedes aus mehreren Gläsern bestehende System anwenden. Um dieses zu zeigen, wollen wir für's Erste die in §. 3 enthaltene Relation zwischen a_1 und b_n auf die Form $\alpha\beta = f^2$ zu bringen suchen. Sei zu dem Ende:

$$a_1 = p + \alpha\ , \qquad b_n = q + \beta\ ,$$

wo α und β, eben so wie a_1 und b_n, mit dem Orte des Objects und des Bildes veränderlich, p und q von der Structur des Systems abhängige und daher constante Grössen sein sollen. Substituirt man diese Werthe für a_1 und b_n in der gedachten Relation:

$$M_{n+1} a_1 b_n - H_n a_1 + N_{n+1} b_n = L_n\ ,$$

so kommt:

$$M_{n+1} \alpha\beta + (M_{n+1} q - H_n)\alpha + (M_{n+1} p + N_{n+1})\beta =$$
$$= L_n - M_{n+1} pq + H_n p - N_{n+1} q\ .$$

Bestimmt man demnach p und q so, dass

$$M_{n+1} p + N_{n+1} = 0 \quad \text{und} \quad M_{n+1} q - H_n = 0\ ,$$

so zieht sich unsere Gleichung zusammen in:

$$M_{n+1} \alpha\beta = L_n + H_n p\ ,$$

und wird nach Elimination von p:

$$M_{n+1}^2 \alpha\beta = L_n M_{n+1} - H_n N_{n+1}$$
$$= -[h_1, \dots h_{n-1}][g_1, h_1, \dots h_{n-1}, g_n] + [g_1, h_1, \dots h_{n-1}][h_1, \dots h_{n-1}, g_n]$$
$$= 1$$

(§. 3), oder

$$\alpha\beta = f^2\ , \quad \text{wenn} \quad \frac{1}{M_{n+1}} = f$$

gesetzt wird. Bezeichnen daher, wie in §. 1, P_1 und P_n die Mittelpunkte des ersten und letzten Glases, und macht man in der Axe

$$FP_1 = p = -\frac{N_{n+1}}{M_{n+1}}\ , \qquad P_n G = q = \frac{H_n}{M_{n+1}}\ .$$

so wird

$$AF = AP_1 - FP_1 = a_1 - p = \alpha \ ,$$

$$GA_n = P_n A_n - P_n G = b_n - q = \beta \ ,$$

folglich

$$AF . GA_n = f^2 \ .$$

Nennt man also wiederum F und G, als diejenigen zwei Punkte, in deren erstem das Object, im zweiten das Bild sich befindet, wenn das andere von beiden unendlich weit entfernt ist, den ersten und zweiten Brennpunkt, so ist auch *bei jedem System von Gläsern die mittlere Proportionallinie zwischen den Abständen des Objectes und Bildes vom ersten und vom zweiten Brennpunkt von constanter Länge* $= f$, die man, analog dem Vorigen, die Brennweite des Systems genannt hat, und deren reciproker Werth

$$= g = [g_1 , h_1 , \ldots h_{n-1} , g_n]$$

ist.

Was ferner das Verhältniss zwischen den Durchmessern des Objectes und des Bildes anlangt, so ist dieses (§. 7)

$$\begin{aligned} = (-1)^n c : c_n &= M_{n+1} a_1 + N_{n+1} : 1 \\ &= M_{n+1} (\alpha + p) + N_{n+1} : 1 \\ &= M_{n+1} \alpha : 1 \ , \quad \text{weil} \quad M_{n+1} p + N_{n+1} = 0 \ , \\ &= \alpha : f = f : \beta = \sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta} \\ &= \sqrt{AF} : \sqrt{GA_n} \ , \end{aligned}$$

eben so wie im vorigen Paragraphen bei der einfachen Linse.

Man kann sich nach diesen Formeln leicht eine übersichtliche Vorstellung verschaffen von dem Gange des Bildes und der Veränderung seiner Grösse, während das Object längs der Axe hin bewegt wird. Heissen X und Y zwei unendlich entfernte Punkte der Axe, X nach der Seite zu liegend, von welcher das Licht herkommt, Y nach der Seite zu, nach welcher es geht. Ist nun das Object A in X, so befindet sich das Bild B (statt A_n) in G und ist unendlich klein. Wird hierauf A von X nach F bewegt, so geht B mit immer wachsendem Durchmesser von G nach Y, wo es unendlich gross wird. Es macht darauf B einen Sprung durch das Unendliche von Y nach X, verkehrt dabei seine Lage und geht mit abnehmender Geschwindigkeit und abnehmendem Durchmesser von X nach G zurück, während A von F nach Y fortgeführt wird.

Allerdings ist der bei weitem grösste Theil des letzteren Weges von A, wo A hinter dem ersten Glase sich befindet (auch wohl ein Theil des ersteren Weges von A, wenn F hinter dem ersten Glase liegt), nicht unmittelbar möglich, weil die von A herkommenden Strahlen in der Richtung von X nach Y zunächst das erste Glas treffen sollen. Man sieht aber von selbst, dass man, um dieser scheinbaren Unmöglichkeit zu begegnen, nur die Strahlen des vor das erste Glas gestellten Objects mittelst anderer Gläser oder auch Spiegel, convergirend auffallen lassen darf, welche Strahlen erst hinter dem ersten Glase zu einem die Stelle des Objects nunmehr vertretenden Bilde sich vereinigen würden. Uebrigens bemerke man noch das aus dem Vorigen leicht zu entnehmende allgemeine Gesetz, dass die Bewegung von Object und Bild längs der Axe immer nach einerlei Richtung geschieht.

§. 10. Ausser den zwei Brennpunkten F, G giebt es bei jedem Linsensystem noch vier andere merkwürdige Punkte*) — Q, Q', R, R' will ich sie bezeichnen, — welche paarweise von den beiden Brennpunkten um die Brennweite des Systems abstehen, so dass:

$$Q'F = FQ = RG = GR' = f \; .$$

Da hiernach

$$QF \, . \, GR = Q'F \, . \, GR' = f^2 \; ,$$

so sind nach §. 9 R und R' die Oerter des Bildes, wenn das Object sich resp. in Q, Q' befindet. Auch ist dann beide Male das Bild mit dem Object von gleicher Grösse, nur das eine Mal aufrecht, das andere Mal verkehrt. Man hat nämlich, wenn das Object in Q ist:

$$c : c_n = (-1)^n (a = QF) : f = (-1)^n : 1 \; ,$$

und wenn das Object in Q' ist:

$$c : c_n = (-1)^n \, Q'F : f = (-1)^n : 1 \; .$$

Befindet sich also das Object in Q, (Q'), so ist das Bild aufrecht oder verkehrt, je nachdem die Zahl der Gläser ungerade oder gerade (gerade oder ungerade) ist.

Will man zwei beliebige zusammengehörige Oerter von Object A und Bild B durch ihre Abstände von diesen Punkten bestimmen,

*) Die hier eingeführten Fundamentalpunkte, für welche $c = c_n$, sind bekanntlich von Gauss (*Dioptrische Untersuchungen* S. 13, 1841) als Hauptpunkte bezeichnet worden. Die Punkte, für welche $c = -c_n$, sind dagegen mit den Listing-Moser'schen Knotenpunkten (*Beitrag zur physiologischen Optik* S. 10, 1845, *Dove's Repertorium* Bd. V, S. 372, 1844) nicht identisch. A. d. H.

so hat man:

$$f^2 = AF \,.\, GB = (AQ + QF)(GR + RB) = (AQ - f)(RB - f),$$

woraus

$$\frac{1}{AQ} + \frac{1}{RB} = \frac{1}{f}$$

folgt; und eben so erhält man in Bezug auf Q' und R':

$$\frac{1}{Q'A} + \frac{1}{BR'} = \frac{1}{f}.$$

Noch fliesst aus der ersten dieser zwei Gleichungen:

$$\frac{AQ}{RB} = \frac{AQ - f}{f} = \frac{AF}{f},$$

und aus der zweiten:

$$\frac{Q'A}{BR'} = -\frac{AF}{f},$$

folglich:

$$\frac{AQ}{RB} = -\frac{Q'A}{BR'} = \frac{a}{f} = \frac{(-1)^n c}{c_n}$$

und

$$\frac{QA}{AQ'} = -\frac{RB}{BR'}.$$

Die Linien QQ' und RR' werden daher, erstere durch das Object, letztere durch das Bild, nach Verhältnissen getheilt, die einander gleiche und entgegengesetzte Exponenten haben, so dass, je nachdem das Object innerhalb oder ausserhalb QQ' liegt, das Bild ausserhalb oder innerhalb RR' fällt. Nächstdem verhalten sich die Durchmesser von Object und Bild, wie ihre resp. Abstände von Q und R, oder von Q' und R'.

Hat man es nur mit einem Glase zu thun, so fallen, weil hier $FG = 2f$ ist, die Punkte Q und R mit dem Mittelpunkt P des Glases zusammen. Schreibt man demnach in dem Vorigen, P für Q sowohl als für R, so erhält man die aus den Elementen der Dioptrik schon bekannten Formeln:

$$\frac{1}{AP} - \frac{1}{PB} \left(= \frac{1}{Q'A} + \frac{1}{BR'} \right) = \frac{1}{f},$$

$$-\frac{c}{c_1} = \frac{AP}{PB} = -\frac{Q'A}{BR'},$$

wo

$$Q'P = PR' = 2f.$$

Man sieht daher, wie auch diese nur für Ein Glas geltenden Formeln auf jedes beliebige System von Gläsern ausgedehnt werden können.

Von den Fernröhren.

§. 11. Unter einem Fernrohr soll hier überhaupt ein System von Gläsern verstanden werden, bei welchem parallel auf das erste Glas fallende Strahlen von dem letzten Glase auch parallel wieder ausgehen, oder, was dasselbe ist, wo für ein unendlich entferntes Object auch das Bild unendlich entfernt liegt, wo also beide Brennpunkte des Systems unendlich entfernt sind, mithin die Brennweite f unendlich gross, also $M_{n+1} = 0$ ist. Und in der That geht die allgemeine Gleichung zwischen a_1 und b_n (§. 3), für $M_{n+1} = 0$ über in:

$$b_n = \frac{H_n a_1 + L_n}{N_{n+1}} ,$$

wo für $a_1 = \infty$ auch $b_n = \infty$ wird. *Die Gleichung*

$$M_{n+1} = 0$$

ist daher die nothwendige und hinreichende Bedingung, bei welcher ein System von Gläsern als Fernrohr dienen kann.

§. 12. Die Gleichung zwischen den Elementen a_1 und b_n, wodurch die Oerter des Objects und seines Bildes bestimmt werden, ist demnach bei dem Fernrohr vom ersten Grade oder linear, während sie bei jedem anderen System von Gläsern vom zweiten Grade, oder, um mich bestimmter auszudrücken, hyperbolisch war, indem die Gleichung zwischen diesen Elementen (a_1 und b_n §. 3, oder α und β §. 9, oder AQ und RB §. 10), als Abscissen und Ordinaten betrachtet, einer Hyperbel angehörte.

Stellt man sich daher das Object längs der Axe sich bewegend vor, so ist bei dem Fernrohr die Geschwindigkeit des Bildes der des Objectes proportional. Sind nämlich A und B, A' und B' zwei Paare zusammengehöriger Oerter von Object und Bild, so hat man

$$N_{n+1} \cdot P_n B = H_n \cdot AP_1 + L_n ,$$

$$N_{n+1} \cdot P_n B' = H_n \cdot A'P_1 + L_n ,$$

folglich, nach Abzug der unteren Gleichung von der oberen,

$$N_{n+1} \cdot B'B = H_n \cdot AA'$$

oder

$$AA' : BB' = - N_{n+1} : H_n = N^2_{n+1} : 1 = 1 : H^2_n .$$

indem die Gleichung des §. 9:

$$L_n M_{n+1} - H_n N_{n+1} = M_{n+1}^2 f^2 = 1 \ ,$$

für das Fernrohr in

$$- H_n N_{n+1} = 1$$

übergeht. Zugleich sieht man daraus, dass, eben so wie bei einem Linsensystem überhaupt (§. 9), auch beim Fernrohr die Bewegung von Object und Bild immer nach einerlei Richtung geschieht.

Dasselbe Verhältniss findet auch zwischen den Abständen des Objects und des Bildes vom Fernrohre statt, wenn das eine, und folglich auch das andere, unendlich entfernt ist. Denn je mehr diese Abstände zunehmen, um so näher wird:

$$N_{n+1} : H_n = AP_1 : P_n B = AD : DB = AD : - BD \ ,$$

und daher

$$AD : BD = N_{n+1}^2 : 1 = 1 : H_n^2 \ ,$$

wo D irgend einen Punkt des Fernrohrs selbst, oder in dessen Nähe, bezeichnet.

§. 13. Die Gleichung zwischen den Durchmessern des Objects und des Bildes (§. 7) wird für das Fernrohr:

$$N_{n+1} c_n = (-1)^n c \ ,$$

woraus wir schliessen, *dass, welches auch der Abstand des Objectes vom Fernrohr sein mag, sein Bild doch immer dieselbe Grösse behält.*

Liegen Object und Bild unendlich entfernt, so ist das Verhältniss ihrer scheinbaren Durchmesser:

$$= \frac{c}{AD} : \frac{c_n}{BD} = \frac{c}{c_n} \cdot \frac{BD}{AD} = \frac{N_{n+1}}{(-1)^n} \cdot \frac{1}{N_{n+1}^2} = 1 : (-1)^n N_{n+1} \ .$$

Ist also N_{n+1} absolut grösser als 1, so wird das Fernrohr entlegene Gegenstände nicht nur deutlich, sondern auch, wie es sein praktischer Zweck erfordert, vergrössert zeigen, und diese Vergrösserung durch die Zahl N_{n+1} gegeben sein. Dabei ist das Bild aufrecht oder umgekehrt, je nachdem bei einer geraden (ungeraden) Anzahl von Gläsern die Zahl N_{n+1} positiv oder negativ (negativ oder positiv) gefunden wird.

Versteht man unter Vergrösserung im weiteren Sinne den Exponenten des Verhältnisses zwischen den scheinbaren Durchmessern von Bild und Object, wenn beide unendlich entfernt sind, so lässt sich das Bisherige in folgendem Satze zusammenfassen:

Die Geschwindigkeit des Objects, dividirt durch die Geschwindigkeit des Bildes, ist, wenn beide Geschwindigkeiten auf die Axe des Fernrohrs bezogen werden, dem Quadrate der Vergrösserung gleich. Werden sie aber nach einer auf der Axe normalen Richtung geschätzt, so ist dieser Quotient der Vergrösserung selbst gleich. Oder:

Der Durchmesser des Objects dividirt durch den Durchmesser des Bildes, giebt, wenn beide Durchmesser parallel mit der Axe sind, das Quadrat der Vergrösserung, die Vergrösserung selbst aber, wenn die auf der Axe normalen Durchmesser genommen werden.

Es bedarf wohl keiner Erinnerung, dass im Vorigen unter den Durchmessern bloss die auf der Axe normalen, als die allein gut wahrnehmbaren, gemeint sind. Wiewohl also von diesen Durchmessern der des Bildes immer N_{n+1}-mal kleiner ist, als der des Objectes, auch wenn das Object sehr weit entfernt liegt, so erscheint doch in diesem Falle der erstere Durchmesser N_{n+1}-mal grösser als der letztere, weil dann das Bild N_{n+1}^2-mal näher ist, als das Object.

Der Satz, dass der Durchmesser des Objects, dividirt durch den Durchmesser des Bildes, die Vergrösserung giebt, liegt übrigens dem von Adams erfundenen Auxometer zu Grunde, wo zum Objecte das Objectivglas selbst, oder vielmehr dessen Einfassung, dient.*

§. 14. Es ist im Obigen gezeigt worden, wie die Haupteigenschaften eines beliebigen Systems von Gläsern ganz analog denen sind, welche schon jedes einfache erhabene oder hohle Glas besitzt; wie die Bestimmung von Ort und Grösse des Bildes aus dem Ort und der Grösse des Objects mittelst der Brennweite und der Brennpunkte, nach einerlei Formeln bei einfachen Linsen und bei ganzen Systemen geschehen kann. Auf gleiche Art wird nun auch der jetzt betrachtete specielle Fall, wo die Brennweite des Systems unendlich gross ist, sein Analogon unter den einfachen Gläsern haben — ein Glas mit einer ebenfalls unendlich grossen Brennweite, d. h. ein Glas, dessen zwei Seiten einander parallel sind. Was daher ein solches Glas unter den einfachen Linsen ist, dieselbe Stelle nimmt das Fernrohr unter den Systemen von Linsen ein. So wie bei einem

* In Gehler's *Physikalischen Wörterbuche*, Art. Auxometer, findet sich bei Erklärung des Princips, worauf dieses Instrument beruht, eine kleine Unrichtigkeit, die auch in die neue Bearbeitung dieses Wörterbuches übergegangen ist, und welche darin besteht, dass bei dem astronomischen Fernrohr mit zwei Gläsern, als auf welches daselbst bei Erläuterung des Princips allein Rücksicht genommen wird, das Bild der Objectivfassung auf das Ocular selbst fallen soll, da es doch, wie dort später ebenfalls bemerkt wird, dahin fällt, wo sonst das Auge hingehalten werden muss.

Fernrohr das Bild für jeden Ort des Objects einerlei Grösse hat. und sich gleichförmig bewegt, wenn das Object um gleiche Räume fortgerückt wird, so finden sich dieselben Eigenschaften auch bei dem Glase mit parallelen Seiten vor, indem hier das Bild und Object immer zusammenfallen, und wobei folglich die Vergrösserungszahl = 1 wird.

Es werde hier noch bemerkt, dass bloss aus Hohlgläsern ein Fernrohr zu construiren unmöglich ist. Sind nämlich $g_1, g_2, g_3, \ldots$ insgesammt negativ ($h_1, h_2, \ldots$ sind ihrer Natur nach immer positiv), so findet sich aus den Formeln, sowohl in §. 4 als in §. 5, M_2 negativ, M_3 positiv, M_4 negativ und so fort abwechselnd, also $(-1)^n M_{n+1}$ immer positiv und niemals Null.

§. 15. Der Vollständigkeit wegen ist es noch übrig, zu zeigen, wie bei einem Fernrohr die für ein angenommenes Gesichtsfeld erforderlichen Oeffnungen der Gläser und der vortheilhafteste Ort des Auges bestimmt werden können. Zu diesem Ende wollen wir für's Erste bei einem System von Gläsern überhaupt den Weg eines, vor seiner Brechung durch das erste Glas, die Axe in A treffenden Strahles näher untersuchen. Es begegne dieser Strahl dem 1sten, 2ten, ... $n$ten Glase resp. in $S_1, S_2, \ldots S_n$.

Weil alle vom Punkte A der Axe ausgehenden Strahlen nach ihrer Brechung durch das erste Glas, den Punkt A_1 der Axe zum Vereinigungspunkte haben, so muss auch S_1S_2 durch A_1 gehen, indem S_1S_2 der Weg unseres von A kommenden Strahles unmittelbar nach seinem Durchgange durch das erste Glas ist. Aus ähnlichem Grunde müssen S_2 und S_3 mit A_2, u. s. w. in einer Geraden liegen, und der Strahl wird, nach seiner Brechung durch das letzte Glas, der Axe in A_n begegnen. Wenn also die mit einander parallelen Linien $P_1S_1, P_2S_2, P_3S_3, \ldots$ positiv oder negativ genommen werden, je nachdem die Punkte $S_1, S_2, S_3, \ldots$ auf der einen oder der anderen Seite der Axe liegen, so muss sich verhalten:

$$P_1S_1 : P_2S_2 = A_1P_1 : A_1P_2 = -P_1A_1 : A_1P_2 ,$$

also wenn wir noch

$$P_1S_1 = s_1 , \qquad P_2S_2 = s_2 , \qquad \text{u. s. w.}$$

setzen:

$$s_1 : s_2 = -b_1 : a_2 ,$$

und ebenso

$$s_2 : s_3 = -b_2 : a_3 , \qquad \text{u. s. w. bis} \qquad s_{n-1} : s_n = -b_{n-1} : a_n .$$

Werden diese $n - 1$ Proportionen in einander multiplicirt, so kommt:

$$s_1 : s_n = (-1)^{n-1} b_1 b_2 \dots b_{n-1} : a_2 a_3 \dots a_n \ .$$

und

$$b_n s_1 : a_1 s_n = (-1)^{n-1} b_1 \dots b_n : a_1 \dots a_n$$

$$= (-1)^{n-1} : M_{n+1} a_1 + N_{n+1}$$

(§. 7), und wenn man darin noch für b_n seinen Werth aus §. 3 substituirt:

$$(-1)^{n-1} a_1 s_n = (H_n a_1 + L_n) s_1 \ ,$$

woraus man, wenn a_1 und s_1 gegeben sind, die Werthe von $s_2, s_3, \dots s_n$ unabhängig von einander finden kann, indem man nur n nach und nach $= 2, 3, \dots$ zu setzen hat.

Seien endlich noch

$$t \ , \quad t_1 \ , \quad t_2 , \quad \dots \quad t_{n-1} \ , \quad t_n$$

die Winkel, welche die Theile des Strahles:

$$AS_1 \ , \quad S_1 S_2 \ , \quad S_2 S_3 \ , \quad \dots \quad S_{n-1} S_n \ , \quad S_n A_n$$

mit der Axe machen, und jeder der Winkel, t_1 z. B., positiv oder negativ, je nachdem die Linie $S_1 S_2$ in ihrer geradlinigen Verlängerung über S_2 hinaus nach der Seite zu von der Axe divergirt, wo die positiven oder negativen s liegen. Alsdann ist wegen der Kleinheit dieser Winkel:

$$t = \frac{P_1 S_1}{AP_1} = \frac{s_1}{a_1} \ , \quad t_1 = \frac{P_1 S_1}{A_1 P_1} = \frac{P_2 S_2}{A_1 P_2} = -\frac{s_1}{b_1} = \frac{s_2}{a_2} \ ,$$

$$t_2 = -\frac{s_2}{b_2} = \frac{s_3}{a_3} \ , \quad \text{u. s. w.} \ , \quad t_{n-1} = -\frac{s_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{s_n}{a_n} \ , \ t_n = -\frac{s_n}{b_n} \ ,$$

und man erhält, wenn man die hieraus folgenden Werthe für a_1 und b_n in die obigen Gleichungen substituirt:

$$(-1)^n t_n = M_{n+1} s_1 + N_{n+1} t \ ,$$

$$(-1)^{n-1} s_n = H_n s_1 + L_n t \ .$$

Die erste dieser zwei Formeln wird für das Fernrohr:

$$(-1)^n t_n = N_{n+1} t \ ,$$

und giebt damit zu erkennen, dass Parallelstrahlen, welche vor dem Eintritt in das erste Glas die Axe unter einem Winkel $= t$ schneiden, nach der letzten Brechung wieder parallel ausfahren und mit der Axe einen Winkel $= N_{n+1} t$ machen, dass also N_{n+1} die Vergrösserungszahl ist, wie schon in §. 13 auf andere Weise gezeigt wurde.

Die zweite Formel lehrt, wenn der Strahl, welcher vor dem Eintritte in das erste Glas die Axe unter einem Winkel $= t$ schneidet und dieses Glas in einer Entfernung $= s_1$ von der Axe trifft, auch den übrigen Gläsern soll begegnen können, dass dann die Halbmesser des zweiten, dritten, u. s. w. Glases nicht kleiner sein dürfen als:

$$H_2 s_1 + L_2 t\ , \qquad H_3 s_1 + L_3 t\ , \qquad \text{u. s. w.}$$

Würde aber der Strahl erst nach seinem Eintritt in das erste Glas, ohne von diesem gebrochen zu werden, die Axe unter dem Winkel t schneiden, so sind die kleinstmöglichen Halbmesser:

$$-H_2 s_1 + L_2 t\ , \qquad -H_3 s_1 + L_3 t\ , \qquad \text{u. s. w.}$$

Für einen mit der Axe parallel einfallenden, und das erste Glas in einem Abstande $= s_1$ von der Axe treffenden, Strahl werden diese Halbmesser resp.:

$$H_2 s_1\ , \qquad H_3 s_1\ , \qquad H_4 s_1\ , \qquad \text{u. s. w.}\ ,$$

und für einen Strahl, welcher durch den Mittelpunkt des ersten Glases selbst geht und mit der Axe einen Winkel $= t$ macht:

$$L_2 t\ , \qquad L_3 t\ , \qquad L_4 t\ , \qquad \text{u. s. w.}$$

§. 16. Wenden wir diese für jedes System von Linsengläsern geltenden Bestimmungen auf das Fernrohr an. Da hier alle von einem und demselben Punkte des Objects ausgehenden Strahlen als parallel mit einander anzusehen sind, und daher die Axe unter gleichem Winkel, welcher $= t$ sei, schneiden, so darf unter der Voraussetzung, dass alle auf das erste Glas, dessen Halbmesser $= s_1$, fallenden Strahlen auch das zweite treffen sollen, der Halbmesser des zweiten nicht kleiner sein, als die absolut grössere der beiden Grössen:

$$H_2 s_1 + L_2 t\ , \qquad -H_2 s_1 + L_2 t\ ,$$

und so fort bei den folgenden Gläsern. Da aber unter allen den das erste Glas treffenden Strahlen sich diejenigen am vollkommensten in einem Punkte des Bildes vereinigen, welche nahe um den Mittelpunkt des Glases einfallen, so ist man zufrieden, wenn nur die Axe des auf das erste Glas stossenden Strahlencylinders, oder der Hauptstrahl, die folgenden Gläser ungehindert durchgehen kann. Soll also ein von der Axe des Rohrs um den Winkel t abliegender Punkt durch dasselbe noch gut gesehen werden können, d. h. t der scheinbare Halbmesser des Gesichtsfeldes sein, so müssen die Halbmesser

des zweiten, dritten, u. s. w. Glases, unabhängig vom Halbmesser des ersten, die Werthe

$$L_2 t\ , \qquad L_3 t\ , \quad \ldots \quad L_n t$$

haben.

§. 17. Alle Hauptstrahlen haben als Strahlen, welche von einem und demselben Punkte, nämlich dem Mittelpunkte des ersten Glases, herkommen, nach ihrer Brechung durch das letzte Glas, einen Vereinigungspunkt, dessen Abstand vom letzten Glase $= b_n$ gefunden wird, wenn man in der Gleichung zwischen a_1 und b_n (§. 3) $a_1 = 0$ setzt. Dies giebt:

$$b_n = \frac{L_n}{N_{n+1}}\ .$$

Findet sich hieraus b_n positiv, so liegt der Vereinigungspunkt, oder das Bild des ersten Glases, hinter dem letzten Glase, und das Auge wird, dahin gebracht, seine vortheilhafteste Stellung haben, indem es nur hier alle Hauptstrahlen zugleich empfangen kann, und in grösserer sowohl, als geringerer Entfernung vom letzten Glase, einen durch die Einfassungen der Gläser verminderten Gesichtskreis hat. Erhält man b_n negativ, so liegt der Vereinigungspunkt der Hauptstrahlen vor dem letzten Glase, und es bleibt Nichts übrig, als das Auge demselben möglichst nahe zu bringen, wo es allerdings nur noch Hauptstrahlen von Objecten empfangen kann, deren Winkelabstand von der Axe gleich dem Halbmesser der Pupille, dividirt durch b_n, ist.

Ist das Fernrohr bloss aus erhabenen Gläsern zusammengesetzt, sind also, eben so wie $h_1, h_2, \ldots$, auch $g_1, g_2, \ldots$ insgesammt positiv, so liegt der Vereinigungspunkt aller Hauptstrahlen stets hinter dem letzten Glase, oder es ist für $a_1 = 0$, b_n immer positiv. Dies lässt sich auf folgende Weise darthun:

Mit Anwendung der in §. 5 gebrauchten Bezeichnung $(a, b, c, \ldots)$ für den Kettenbruch $a - \cfrac{1}{b - \text{etc.}}$, und vorausgesetzt, dass $a, b, c, d, \ldots$ insgesammt positive Grössen sind, hat man:

$$a > a - \frac{1}{b} = (a, b), \quad \text{und eben so} \quad b > (b, a)\ ,$$

folglich

$$(a, b) = a - \frac{1}{b} > a - \frac{1}{(b, c)} = (a, b, c), \quad \text{und eben so} \quad (b, c) > (b, c, d)\ ,$$

folglich

$$(a, b, c) = a - \frac{1}{(b, c)} > a - \frac{1}{(b, c, d)} = (a, b, c, d), \text{ u. s. w.},$$

also:

$$a > (a, b) > (a, b, c) > (a, b, c, d) > \dots$$

Nun ist beim Fernrohr

$$M_{n+1} = [g_n, h_{n-1}, \dots h_1, g_1] = 0,$$

also auch

$$\frac{[g_n, h_{n-1}, \dots h_1, g_1]}{[h_{n-1}, \dots h_1, g_1]} = (g_n, h_{n-1}, \dots h_1, g_1) = 0.$$

Zugleich ist aber, weil alle Grössen g_1, h_1, g_2, ... positiv sind, dem oben Erwiesenen zufolge:

$$(g_n, h_{n-1}, \dots h_1) > (g_n, \dots h_1, g_1),$$

mithin $(g_n, h_{n-1}, \dots h_1)$ positiv, d. i.

$$\frac{[g_n, h_{n-1}, \dots h_1]}{[h_{n-1}, \dots h_1]} = \frac{N_{n+1}}{L_n} = \frac{1}{b_n}$$

eine positive Grösse.

§. 18. Es bietet sich uns hier noch eine merkwürdige Form der Bedingungsgleichung dar, unter welcher ein System von Gläsern ein Fernrohr abgiebt. *Soll nämlich aus den Gläsern, von deren Brennweiten die Reciproken* $= g_1, g_2, \dots g_n$ *sind, ein Fernrohr construirt werden, so müssen sie in solche Abstände,* $= h_1, h_2, \dots h_{n-1}$ *von einander gestellt werden, dass* $(g_n, \dots h_1, g_1) = 0$, *oder, was wegen* $[g_n, \dots g_1] = [g_1, \dots g_n]$ *auf dasselbe hinauskommt, dass* $(g_1, h_1, \dots g_n) = 0$, *dass also*

$$0 = g_n - \cfrac{1}{h_{n-1} - \cfrac{1}{g_{n-1} - \text{etc.} - \cfrac{1}{h_1 - \cfrac{1}{g_1}}}}$$

oder

$$0 = g_1 - \cfrac{1}{h_1 - \cfrac{1}{g_2 - \text{etc.} - \cfrac{1}{h_{n-1} - \cfrac{1}{g_n}}}}$$

zwei mit einander identische Gleichungen, von denen die erstere auch unmittelbar aus den Kettenbrüchen in §. 3 folgt, wenn man darin a_1 sowohl als b_n gleich unendlich setzt.

Auch die Vergrösserungszahl eines Fernrohres lässt sich leicht in Kettenbruchform darstellen. Es ist nämlich, wegen

$$-H_n N_{n+1} = 1 \;,$$

das Quadrat der Vergrösserung

$$= N_{n+1}^2 = -\frac{N_{n+1}}{H_n} = -\frac{N_{n+1}}{L_n} \cdot \frac{H_n}{L_n}$$

$$= \frac{[g_n, h_{n-1}, \dots h_1]}{[h_{n-1}, \dots h_1]} \cdot \frac{[g_1, h_1, \dots h_{n-1}]}{[h_1, \dots h_{n-1}]} = (g_n, \dots h_1) : (g_1, \dots h_{n-1}) .$$

Die Vergrösserung ist daher die mittlere Proportionalzahl zwischen den beiden Kettenbrüchen:

$$g_n - \cfrac{1}{h_{n-1} - \text{etc.} \cfrac{}{- \cfrac{1}{g_2 - \cfrac{1}{h_1}}}} \quad \textit{und} \quad \cfrac{1}{g_1 - \cfrac{1}{h_1 - \text{etc.} \cfrac{}{- \cfrac{1}{g_{n-1} - \cfrac{1}{h_{n-1}}}}}}$$

deren ersterer zugleich den reciproken Werth der Entfernung des Auges vom letzten Glase angiebt.

§. 19. Die Identität der beiden Bedingungsgleichungen für das Fernrohr:

$$(g_n, h_{n-1}, \dots g_1) = 0 \quad \text{und} \quad (g_1, h_1, \dots g_n) = 0 \,,$$

von denen die eine aus der anderen durch Umkehrung der Aufeinanderfolge der Elemente hervorgeht, hängt damit zusammen, dass jedes zu einem Fernrohr geordnete System von Gläsern auf doppelte Art als Fernrohr dienen kann, je nachdem man das Licht von der einen oder der anderen Seite her durchgehen lässt; so wie bei einem System von Gläsern überhaupt der Ort und die Grösse des Objects mit Ort und Grösse des Bildes sich gegenseitig vertauscht, wenn die Richtung der Strahlen in die entgegengesetzte verwandelt wird. Der Grund dieser Erscheinungen liegt in dem bekannten Satze, dass der gebrochene Weg eines Strahles aus einem durchsichtigen Mittel in ein anderes zugleich als Weg einem Strahle aus dem letzteren Mittel in das erstere dienen kann. Auch stimmen damit, wie gehörig, die im Obigen entwickelten Formeln überein: so muss die Gleichung

in §. 3 zwischen a_1 und b_n dieselbe bleiben, wenn man darin $g_1, h_1, \ldots g_n$ mit $g_n, \ldots h_1, g_1$, so wie a_1 und b_n gegenseitig vertauscht.

In der That geht durch diese Vertauschung

$$H_n = [g_1, \ldots h_{n-1}] \quad \text{in} \quad [g_n, \ldots h_1] = -N_{n+1}$$

über und umgekehrt. L_n und M_{n+1} bleiben ungeändert, und die Gleichung wird damit:

$$a_1 = \frac{-N_{n+1} b_n + L_n}{M_{n+1} b_n - H_n},$$

die, wie man leicht sieht, mit dem dortigen Ausdrucke für b_n identisch ist.

Auf gleiche Art muss die Relation in §. 7 zwischen c_n, c, a_1 zu einer gleichbedeutenden führen, wenn man diese Grössen in c, c_n, b_n und $g_1, \ldots g_n$ in $g_n, \ldots g_1$ verwandelt. Man erhält damit:

$$(M_{n+1} b_n - H_n) c = (-1)^n c_n,$$

und durch die Verbindung dieser Gleichung mit der dortigen:

$$(M_{n+1} a_1 + N_{n+1})(M_{n+1} b_n - H_n) = 1,$$

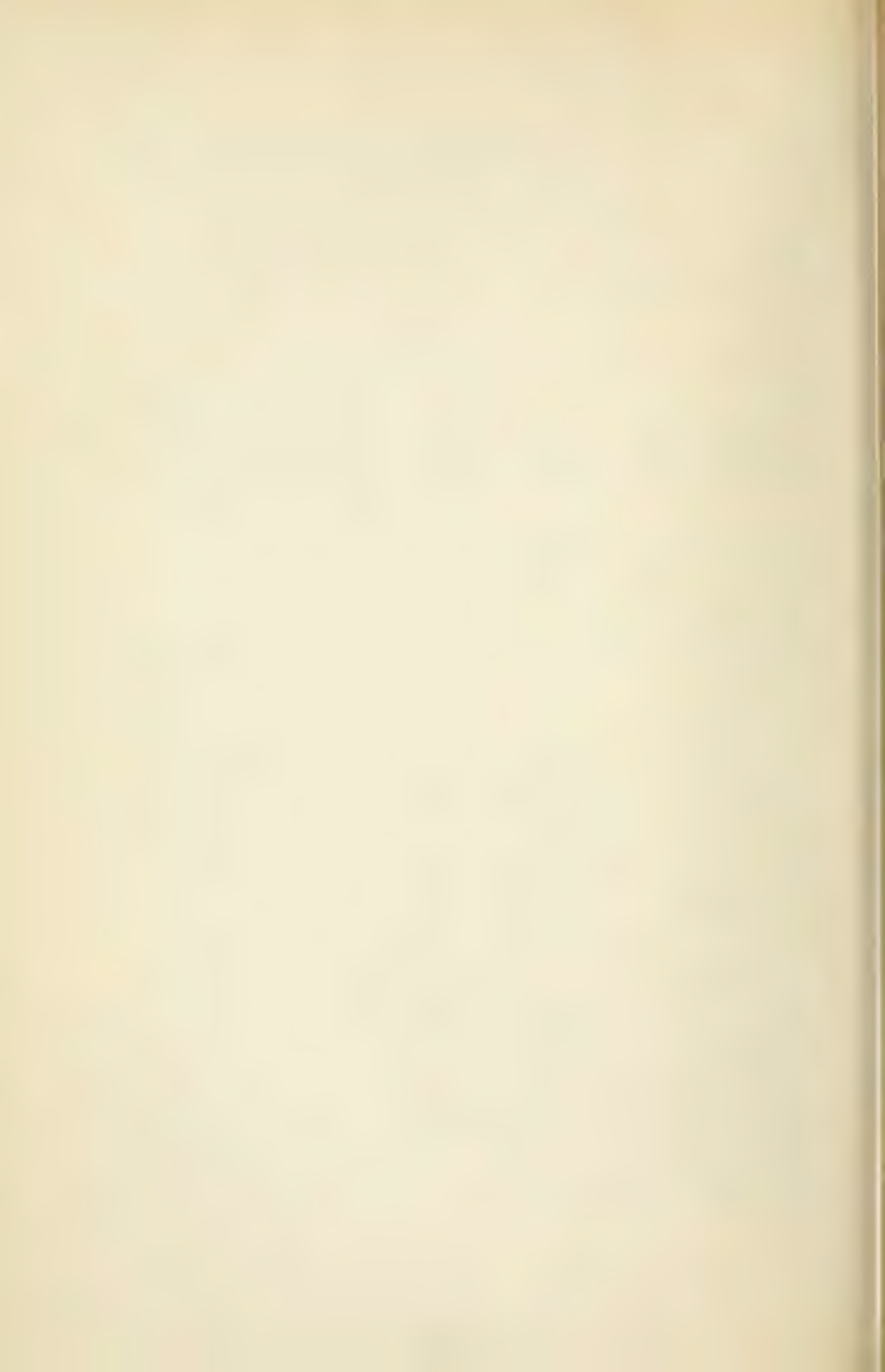
welches eine neue Form der Gleichung zwischen a_1 und b_n im §. 3 ist, und wovon sich die eine in die andere, mit Hülfe der Gleichung

$$L_n M_{n+1} - H_n N_{n+1} = 1,$$

verwandelt.

Dass bei einer Umkehrung des Systems die beiden Brennpunkte desselben (§. 9) ihre relative Lage gegen die Gläser behalten, nur ihre Namen verwechseln, so dass der vorige erste nun zum zweiten, und umgekehrt, wird: dies folgt leicht aus der dortigen Definition dieser Punkte, so wie auch aus den daselbst für ihre Abstände vom ersten und letzten Glase gegebenen Werthen.

Endlich leuchtet ein, dass durch Umkehrung eines Systems H_n in $-N_{n+1}$, und umgekehrt, übergeht, und da beim Fernrohr $-H_n N_{n+1} = 1$, und $(-1)^n N_{n+1}$ die Vergrösserungszahl ist (§§. 12, 13), dass durch Umkehrung eines Fernrohrs die Vergrösserung desselben in eine eben so vielmalige Verkleinerung, und umgekehrt, verwandelt wird, dass aber beide Male die Bilder sich in derselben (aufrechten oder verkehrten) Stellung zeigen müssen. Auch folgt der erste Theil dieses Satzes unmittelbar aus der Betrachtung der durch zwei Kettenbrüche ausgedrückten Vergrösserung, von denen ein jeder durch Vertauschung von $g_1, \ldots g_n$ mit $g_n, \ldots g_1$ in den reciproken Werth des anderen verwandelt wird.



Beiträge zu der Lehre von den Kettenbrüchen, nebst einem Anhange dioptrischen Inhalts.

[Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band VI, pag. 215—243. 1830.]



Bei Abfassung des vorstehenden, im zweiten Heft des fünften Bandes des Crelle'schen Journals abgedruckten Aufsatzes über die Haupteigenschaften eines Systems von Linsengläsern, wo ich diese Eigenschaften aus denen der Kettenbrüche zu entwickeln suchte, führte mich der innige Zusammenhang der Lehre von den Kettenbrüchen mit den Eigenschaften der Linsensysteme zu verschiedenen Bemerkungen über die ersteren, welche mir neu, und, wenn auch nur den Elementen angehörend, einer späteren Mittheilung nicht ganz unwerth schienen. Der in der erwähnten Abhandlung erwiesene Satz, dass die Wirkung jedes Systems von Gläsern, eben so wie die jedes einzelnen Glases, durch zwei gegebene Punkte (die Brennpunkte) und durch eine Linie von gegebener Länge (die Brennweite) vollkommen bestimmt ist, und die leicht auszumittelnde Art, nach der, wenn ein Gläsersystem in mehrere einzelne Systeme zertheilt wird, aus den Wirkungen und der gegenseitigen Lage der einzelnen die Wirkung des ganzen beurtheilt werden kann, veranlassten mich, auf analoge Weise einen Kettenbruch in mehrere einzelne zu zerlegen, um somit nach Berechnung dieser einzelnen und ihrer Wiedervereinigung zu einer kürzeren Form des anfänglichen, so wie zu merkwürdigen Eigenschaften der Kettenbrüche überhaupt zu gelangen.

Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind in den nachfolgenden Blättern enthalten. Voran geht die Entwickelung der Haupteigenschaften der Kettenbrüche, so wie der für diese Lehre besonders wichtigen, aus beliebigen Elementen gebildeten ganzen rationalen Zusammensetzungen (sie sind hier, so wie in dem oben gedachten Aufsatze, durch Einschliessung der Elemente mit Klammern angedeutet), deren gegenseitige Relationen schon Euler in einer besonderen Abhandlung (*Specimen algorithmi singularis* in *Nov. comment. Petrop.* Tom. IX) untersucht hat. Doch glaube ich hier (§§. 5—7) diese Relationen etwas schärfer, als Euler, der sich oft

nur der Induction bedient, erwiesen zu haben. Dies gelang mir theils durch die vorhin erwähnte Zerlegung eines Kettenbruches in zwei oder mehrere Theile, theils dadurch, dass ich, ähnlicher Weise wie Euler für jene Zusammensetzungen, einen Algorithmus für die Kettenbrüche selbst zu bilden suchte, womit aber nicht bloss dem Erweis jener von Euler entdeckten Relationen, sondern der Elementarlehre von den Kettenbrüchen überhaupt einiger Nutzen gebracht sein dürfte.

Zum Schlusse habe ich noch die oben gedachten Sätze von den bei jedem Gläsersystem im Allgemeinen angebbaren zwei Brennpunkten und Brennweiten, und von den daraus zu berechnenden Wirkungen des Systems, so wie auch die Haupteigenschaften der Fernröhre auf eine neue, der Einfachheit dieser Sätze entsprechende, ganz elementare Weise dargethan.

---

§. 1. Ein Kettenbruch entsteht, wenn man von einer Reihe auf einander folgender Brüche zu dem Nenner des ersten Bruches den zweiten addirt, sodann in diesem Aggregate den Nenner des zweiten um den dritten Bruch vermehrt, u. s. w. Hieraus folgt sogleich, dass ein Kettenbruch seinen Werth nicht ändert, wenn Zähler und Nenner irgend eines der einzelnen Brüche, so wie der Zähler des nächstfolgenden Bruchs, mit einer und derselben Zahl multiplicirt werden. Sind daher

$$(a) \qquad \frac{\alpha}{a},\quad \frac{\beta}{b},\quad \frac{\gamma}{c},\quad \frac{\delta}{d},\ \ldots$$

die einzelnen Brüche, welche den Kettenbruch ausmachen, so werden auch

$$(b) \qquad \frac{p\alpha}{pa},\quad \frac{pq\beta}{qb},\quad \frac{qr\gamma}{rc},\quad \frac{rs\delta}{sd},\ \ldots$$

in Verbindung denselben Kettenbruch erzeugen, was für Werthe auch $p, q, r, s, \ldots$ haben mögen. Man kann hiernach die anfänglichen Brüche (a) immer so umbilden, dass in den neuen Brüchen (b) die Zähler oder die Nenner irgend gegebene Werthe $A, B, C, D, \ldots$ haben, indem man die willkürlichen Factoren $p, q, r, \ldots$ aus den Gleichungen $p\alpha = A$, $pq\beta = B$, $qr\gamma = C$, etc. (oder $pa = A$, $qb = B$, $rc = C$, etc.) bestimmt.

Ohne daher der Allgemeinheit Abbruch zu thun, kann man immer die Zähler sämmtlicher einzelnen Brüche der positiven Einheit gleich setzen, wie dies auch bei Elementar-Untersuchungen

über Kettenbrüche zu geschehen pflegt. Im Gegenwärtigen sollen aber aus weiterhin sich ergebenden Gründen nur der Zähler des ersten Bruches $= + 1$. die der übrigen dagegen $= - 1$ gesetzt werden, so dass in der Reihe (a):

$$\alpha = 1, \quad \beta = \gamma = \delta = \cdots = - 1 .$$

Wird alsdann

$$p = 1, \quad q = - 1, \quad r = 1, \quad s = - 1,$$

und so fort abwechselnd genommen, so wird die umgeformte Reihe (b):

$$\frac{1}{a}, \quad \frac{1}{-b}, \quad \frac{1}{c}, \quad \frac{1}{-d}, \ldots$$

woraus erhellet, dass man in der hier anzuwendenden Form mit negativen Zählern die Nenner des 2ten, 4ten, 6ten. etc. Bruches negativ zu nehmen hat, um diese Form auf die gewöhnliche, wo jeder Zähler $= + 1$ ist, zu reduciren.

Der Raumersparniss halber mögen nun die Kettenbrüche von der besagten Form, wie

$$\frac{1}{a}, \quad \frac{1}{a - \frac{1}{b}}, \quad \frac{1}{a - \frac{1}{b - \frac{1}{c}}}, \quad \frac{1}{a - \frac{1}{b - \frac{1}{c - \frac{1}{d}}}}, \text{ u. s. w.}$$

durch (a). (a, b), (a, b, c), (a, b, c, d), u. s. w. ausgedrückt werden. Hiernach ist:

$$(a, b) = \frac{1}{a - (b)}, \quad (a, b, c) = \frac{1}{a - (b, c)}, \quad (a, b, c, d) = \frac{1}{a - (b, c, d)}, \text{ u. s. w.}, \quad (1)$$

so wie

$$a - (b) = \frac{1}{(a, b)}, \quad a - (b, c) = \frac{1}{a, b, c}, \text{ u. s. w.}$$

Eben so ist, wenn man $(c, d, e, \ldots) = p$ setzt:

$$(a, b, c, d, e, \ldots) = (a, b - p) = (a, b - (c, d, e, \ldots)),$$

und auf gleiche Art: (2)

$$= (a, b, c - (d, e, \ldots)) = (a, b, c, d - (e, \ldots)), \text{ u. s. w.}$$

Ferner leuchtet ein, dass, wenn z. B. in (a, b, c, d) das letzte Element d unendlich gross genommen wird, der Kettenbruch in

(a, b, c) übergeht. Setzt man aber $d = 0$, so fällt nicht nur das letzte, sondern auch das vorletzte Element weg, d. h. es ist:

(3) $(a, b, c, 0) = (a, b)$, und eben so $(a, b, c, d, 0) = (a, b, c)$, u. s. w.
so wie
$(a, b, c, \infty) = (a, b, c)$, $(a, b, c, d, \infty) = (a, b, c, d)$, u. s. w.

§. 2. **Aufgabe.** *x ist durch y und die Constanten a, b, c, d, e, mittelst des Kettenbruchs*

$$x = (a, b, c, d, e, y) \tag{4}$$

gegeben. Man soll umgekehrt y, durch x ausgedrückt, finden.

Auflösung. Aus (4) folgt nach (1):

$$x = \frac{1}{a - (b, \ldots y)},$$

mithin

$$(b, \ldots y) = a - \frac{1}{x} = a - (x),$$

oder

$$\frac{1}{(a, x)} = (b, \ldots y) = \frac{1}{b - (c, \ldots y)},$$

folglich

$$(c, \ldots y) = b - (a, x),$$

oder

$$\frac{1}{(b, a, x)} = (c, \ldots y) = \frac{1}{c - (d, e, y)},$$

und hieraus eben so:

$$\frac{1}{(c, b, a, x)} = (d, e, y); \quad \frac{1}{(d, \ldots a, x)} = (e, y); \quad \frac{1}{(e, \ldots a, x)} = (y),$$

oder:

$$y = (e, d, c, b, a, x). \tag{5}$$

§. 3. **Aufgabe.** *Die im vorigen Paragraphen angenommene Relation zwischen x und y durch eine Gleichung darzustellen, in der weder x noch y, in Kettenbrüchen enthalten, vorkommen.*

Auflösung. Da von den beiden identischen Gleichungen (4) u. (5)

$$x = (a, b, c, d, e, y) \quad \text{und} \quad y = (e, d, c, b, a, x),$$

vermöge der ersten, jedem Werth von y nur Ein Werth von x, und vermöge der zweiten, jedem x nur Ein y zukommt, so muss die gesuchte Gleichung zwischen x und y von der Form sein:

$$A + Bx + Cy + Dxy = 0. \tag{a}$$

Nach (3) wird nun, wenn man in (4) $y = \infty$ setzt: $x = (a, b, c, d, e)$. Für denselben Werth von y reducirt sich aber (a) auf:

$$C + Dx = 0 .$$

Mithin ist:

$$C : D = -(a, b, c, d, e) . \tag{b}$$

Eben so wird für $y = 0$, wegen (4), $x = (a, b, c, d)$, und wegen (a):

$$A + Bx = 0 ;$$

folglich:

$$A : B = -(a, b, c, d) . \tag{c}$$

Auf gleiche Art ergiebt sich, wenn man in (5) und (a) das eine Mal $x = \infty$, das andere Mal $x = 0$ setzt:

$$B : D = -(e, d, c, b, a) , \tag{d}$$

$$A : C = -(e, d, c, b) , \tag{e}$$

und wenn man (b) mit (e), so wie (c) mit (d) multiplicirt:

$$A : D = (a, \dots e)(e, \dots b) = (e, \dots a)(a, \dots d) . \tag{f}$$

Hiermit haben wir zugleich eine der bemerkenswerthesten Relationen zwischen Kettenbrüchen:

$$(a, \dots e)(e, \dots b) = (e, \dots a)(a, \dots d) \tag{6}$$

erhalten, in welcher, wenn sie auf eine beliebige Anzahl von Elementen ausgedehnt wird, a und b das erste und zweite, e und d das letzte und vorletzte Element bezeichnen.

Substituiren wir jetzt die gefundenen Verhältnisswerthe von A, B, C, D in (a), so kommt:

$$(a, \dots e)(e, \dots b) - (e, \dots a)x - (a, \dots e)y + xy = 0 ,$$

oder (7)

$$(e, \dots a)(a, \dots d) - (e, \dots a)x - (a, \dots e)y + xy = 0 ,$$

zwei Gleichungen, denen man auch die Form:

$$\{x - (a, \dots e)\}\{y - (e, \dots a)\} = (a, \dots e)\{(e, \dots a) - (e, \dots b)\} \tag{7*}$$

$$= (e, \dots a)\{(a, \dots e) - (a, \dots d)\}$$

geben kann.

§. 4. Zusätze und Folgerungen.

a) Setzt man in (7*) für x seinen Werth aus (4), so kommt die identische Gleichung:

$$\frac{(a, \ldots e, y) - (a, \ldots e)}{(y, e, \ldots a)} = (e, \ldots a) \{(a, \ldots e) - (a, \ldots d)\},$$

wo noch $\frac{1}{(y, e, \ldots a)}$ für $y - (e, \ldots a)$ gesetzt worden (1).

Man schreibe jetzt f statt y und bezeichne die Differenzen:

$$(a, \ldots f) - (a, \ldots e), \quad (a, \ldots e) - (a, \ldots d), \text{ u. s. w.}$$

resp. mit $\Delta(a, \ldots e)$, $\Delta(a, \ldots d)$, u. s. w., so hat man:

$$\Delta(a, \ldots e) = (f, \ldots a)(e, \ldots a)\Delta(a, \ldots d),$$

und eben so:

$$\Delta(a, \ldots d) = (e, \ldots a)(d, \ldots a)\Delta(a, b, c),$$

$$\Delta(a, b, c) = (d, \ldots a)(c, b, a)\Delta(a, b),$$

$$\Delta(a, b) = (c, b, a)(b, a)\Delta(a),$$

folglich, weil

$$(a, b) = \frac{b}{ab - 1}, \quad (b, a) = \frac{a}{ab - 1}$$

und daher

$$\Delta(a) = (a, b) - (a) = (b, a)(a)^2$$

wird:

$$\Delta(a, b) = (c, b, a)(b, a)^2 (a)^2,$$

$$(8) \qquad \Delta(a, b, c) = (d, c, b, a)(c, b, a)^2 (b, a)^2 (a)^2,$$

$$\Delta(a, \ldots d) = (e, \ldots a)(d, \ldots a)^2 (c, b, a)^2 (b, a)^2 (a)^2.$$

u. s. w.

b) Die Gleichung (7*) lässt sich daher auch so darstellen:

$$(9) \qquad \{x - (a, \ldots e)\}\{y - (e, \ldots a)\} = (e, \ldots a)^2 (d, \ldots a)^2 \ldots (a)^2,$$

woraus wir den Schluss ziehen:

Wenn von zwei veränderlichen Grössen x und y, die eine von der anderen so abhängt, dass $x = (a, \ldots e, y)$, folglich auch $y = (e, \ldots a, x)$, so ist, je nachdem x grösser oder kleiner als $(a, \ldots e)$ genommen wird, auch y grösser oder kleiner als $(e, \ldots a)$, indem das Product aus den Differenzen $x - (a, \ldots e)$ und $y - (e, \ldots a)$ einem von x oder y übrigens unabhängigen Quadrate gleich ist.

c) Von den beiden nach (7*) identischen Ausdrücken:

$$(e, \ldots a)\{(a, \ldots e) - (a, \ldots d)\} \text{ und } (a, \ldots e)\{(e, \ldots a) - (e, \ldots b)\}$$

entsteht der eine aus dem anderen, indem man die Elemente a, b,

c, d, e in umgekehrter Folge nimmt. Es wird daher auch das dem ersteren dieser Ausdrücke gleich gefundene, aus Quadraten zusammengesetzte Product durch Vertauschung der Elemente $a, \ldots e$ mit $e, \ldots a$ seinen Werth nicht ändern, also, nach Ausziehung der Wurzeln,

$$(e, \ldots a)(d, \ldots a) \ldots (b, a)(a) = \pm (a, \ldots e)(b, \ldots e) \ldots (d, e)(e)$$

sein.

Um über das doppelte Vorzeichen zu entscheiden, so begreift man leicht, dass, wenn bald das eine, bald das andere stattfinden sollte, ein solcher Wechsel nur bei Aenderung der Elementenzahl eintreten könnte, nicht aber bei Aenderung der Werthe der Elemente, während ihre Anzahl dieselbe bleibt. Nimmt man nun alle Elemente einander gleich an, so wird

$$(e, \ldots a) = (a, \ldots e)\,, \quad (d, \ldots a) = (b, \ldots e)\,, \text{ u. s. w.}$$

$$\text{bis } (b, a) = (d, e)\,, \quad (a) = (e)\,,$$

welches auch die Zahl der Elemente sein mag. Mithin kann immer nur das obere Zeichen in jener Gleichung statthaben, also:

$$(e, \ldots a)(d, \ldots a) \ldots (b, a)(a) = (a, \ldots e)(b, \ldots e) \ldots (d, e)(e). \quad (10)$$

d) Dasselbe Resultat lässt sich auch unmittelbar aus der Gleichung (6) und den ihr analogen herleiten, wie Jeder ohne Schwierigkeit finden wird. Auch hätte man durch dieselbe Gleichung selbst zu den Gleichungen (7) und (7*) geradezu gelangen können. Es ist nämlich nach (6), wenn y als neues Element zu $a, \ldots e$ hinzugefügt wird:

$$(a, \ldots e, y)(y, e, \ldots b) = (y, e, \ldots a)(a, \ldots e)\,,$$

oder nach (1):

$$\frac{(a, \ldots e, y)}{y - (e, \ldots b)} = \frac{(a, \ldots e)}{y - (e, \ldots a)}\,.$$

Setzt man hierin x für $(a, \ldots e, y)$, so hat man die erste der Gleichungen (7), und damit auch zugleich die übrigen, gefunden.

§. 5. Man setze die aus den Elementen $a, \ldots e$ gebildete Function:

$$\frac{1}{(a, \ldots e)(b, \ldots e)(c, d, e)(d, e)(e)} = [a, b, c, d, e]\,, \quad (11)$$

so ist zufolge der Gleichung (10):

$$(12)\qquad [a, b, c, d, e] = [e, d, c, b, a],$$

und eben so bei jeder kleineren und grösseren Zahl von Elementen.

Diese neuen durch Klammern angedeuteten Zusammensetzungen der Elemente $a, b, c, \ldots$ spielen in der Lehre von den Kettenbrüchen eine sehr wichtige Rolle, und besitzen eine nicht geringe Anzahl merkwürdiger Eigenschaften.

Die aus dem Bisherigen unmittelbar fliessenden Eigenschaften derselben sind folgende.

a) Der Werth einer solchen Function ändert sich nicht, wenn die Elemente in umgekehrter Folge genommen werden (12).

b) Weil nach (11)

$$\frac{1}{(b, \ldots e) \ldots (d, e)(e)} = [b, \ldots e]$$

ist, so kommt, wenn man diese Gleichung durch (11) dividirt:

$$(13)\qquad (a, \ldots e) = \frac{[b, \ldots e]}{[a, \ldots e]},$$

so wie

$$(e, \ldots a) = \frac{[d, \ldots a]}{[e, \ldots a]} = \frac{[a, \ldots d]}{[a, \ldots e]},$$

wonach daher jeder Kettenbruch von der in §. 1 angenommenen Form als der Quotient zweier dergleichen in einander dividirter Functionen dargestellt werden kann.

c) Eben so ist:

$$(d, \ldots a) = \frac{[a, \ldots c]}{[a, \ldots d]}.$$

Mit diesen Werthen für $(e, \ldots a)$ und $(d, \ldots a)$ verwandelt sich die Gleichung (1)

$$(e, \ldots a) = \frac{1}{e - (d, \ldots a)}$$

in:

$$(14)\qquad [a, \ldots e] = [a, \ldots d]\, e - [a, \ldots c],$$

und auf gleiche Art hat man:

$$[a, \ldots d] = [a, b, c]\, d - [a, b],$$

$$[a, b, c] = [a, b]\, c - [a], \quad \text{wo} \quad [a] = \frac{1}{(a)} = a.$$

Endlich ist

$$[a, b] = \frac{1}{(a, b)(b)} = ab - 1.$$

so dass daher, weil analog mit den vorhergehenden Formeln

$$[a, b] = [a]\, b - [\;]$$

sein sollte, wir schliessen können, dass, wenn innerhalb der Klammern kein Element mehr vorkommt, ein solcher Ausdruck der Einheit selbst gleich ist.

Die neuen Functionen sind demnach insgesammt rationale und ganze Functionen ihrer Elemente, nämlich

$$[a] = a,\; [a, b] = ab - 1,\; [a, b, c] = abc - a - c, \text{ u. s. w.},$$

und mit Hülfe derselben kann nach (13) jeder Kettenbruch in einen gewöhnlichen Bruch mit rationalem und ganzem Zähler und Nenner verwandelt werden.

d) Werden in den Gleichungen (8) die eingeklammerten Ausdrücke statt der Kettenbrüche eingeführt, so erhält man:

$$(e, \dots a)\,(d, \dots a)^2 \dots (a)^2 = \frac{(e, \dots a)}{[d, \dots a]^2} = \frac{1}{[a, \dots d]\,[a, \dots e]}$$

$$= \Delta\,(a, \dots d) = (a, \dots e) - (a, \dots d) = \frac{[b, \dots e]}{[a, \dots e]} - \frac{[b, \dots d]}{[a, \dots d]},$$

und damit die merkwürdige Relation:

$$[a, \dots d]\,[b, \dots e] - [a, \dots e]\,[b, \dots d] = 1 \;*). \tag{15}$$

Endlich kann der Gleichung (9) zwischen x und y die sehr einfache Form gegeben werden:

---

*) Bei **Euler**, welcher die einzelnen Brüche $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \dots$ nicht durch Subtraction, wie hier geschehen, sondern durch Addition zu einem Kettenbruche vereinigt, haben deshalb auch die Ausdrücke $[a, b, c, \dots]$ eine etwas andere Bedeutung. Statt dass nämlich hier die Producte, in welche sich diese Ausdrücke auflösen lassen, durch Addition und Subtraction wechselsweise mit einander verbunden sind, sind sie es dort bloss durch Addition; und eben so werden sich auch die zwischen solchen Ausdrücken selbst hier aufgestellten Relationen von den dortigen rücksichtlich der Vorzeichen unterscheiden. So ist zwar die Formel (12) auch bei **Euler** ganz dieselbe. Dagegen müssen in den Formeln (14), um sie in die **Euler**'schen zu übertragen, statt der Minuszeichen rechter Hand Pluszeichen gesetzt werden. In (15) aber ist statt der 1 zur Rechten, ± 1 zu setzen, $+1$ bei einer ungeraden, -1 bei einer geraden Anzahl der Elemente $a, \dots e$. Eben so muss auch in den später folgenden Formeln (20) und (24) das Glied zur Rechten, nach Beschaffenheit der Elementenzahl, bald positiv bald negativ genommen werden.

Diese doppelten Vorzeichen fallen nun bei der von mir angenommenen Bildung der Kettenbrüche durch Subtraction überall hinweg, daher ich dieser Bildung, der dadurch für das Folgende bewirkten grösseren Einfachheit wegen, den Vorzug geben zu müssen geglaubt habe.

(16) $$\{x-(a,\dots e)\}\{y-(e,\dots a)\}=\frac{1}{[a,\dots e]^2},$$

oder, wenn man die Kettenbrüche durch Functionen mit Klammern ausdrückt, und mit Anwendung von (15):

(16*) $$[a,\dots e]xy-[a,\dots d]x-[b,\dots e]y+[b,\dots d]=0.$$

§. 6. Um etwas verborgener liegende Eigenschaften der Kettenbrüche und der mit ihnen verwandten Functionen zu entdecken, wollen wir in der Gleichung (1), wo eine beliebige Anzahl constanter Elemente und ein veränderliches Element y, zu einem Kettenbruche verbunden, den Werth einer anderen Veränderlichen x bestimmten, die Reihe der Elemente als aus zwei Gruppen bestehend uns denken und demzufolge

(a) $$x=(a,b,\dots d,e,f,a',b',\dots d',e',y)$$

schreiben. Hierbei sind nämlich a, b und a', b' die zwei ersten Elemente, d, e, f und d', e', y die drei letzten Elemente der ersten und zweiten Gruppe. Die Anzahl der Elemente in jeder der beiden Gruppen ist willkürlich.

Man setze nun:

(b) $$w=(a',\dots e',y),$$

so wird nach (2):

$$x=(a,\dots e,f-w),$$

also wenn man

(c) $$f=v+w$$

setzt:

(d) $$x=(a,\dots e,v).$$

Die Gleichung (a) kann hiernach als durch Elimination von v und w aus (b), (c) und (d) entstanden angesehen werden. Um diese Elimination jetzt auszuführen, setze man:

$$(a,\dots e)=\alpha,\quad (e,\dots a)=\beta,\quad \frac{1}{[a,\dots e]}=\gamma,$$

$$(a',\dots e')=\alpha',\quad (e',\dots a')=\beta',\quad \frac{1}{[a',\dots e']}=\gamma',$$

so gehen die Gleichungen (d) und (b) nach (16) über in:

$$\{x-\alpha\}\{v-\beta\}=\gamma^2,\quad \{w-\alpha'\}\{y-\beta'\}=\gamma'^2,$$

und man erhält in Verbindung mit (c)

(e) $$\frac{\gamma^2}{x-\alpha}+\frac{\gamma'^2}{y-\beta'}=\delta,\quad \text{wo}\quad \delta=f-\beta-\alpha',$$

als das gesuchte Resultat der Elimination.

Zu einer Gleichung zwischen x und y, wo keine dieser beiden Veränderlichen in einen Kettenbruch mehr verwickelt ist, führt aber (a) unmittelbar, wenn man

$$(a, \dots e') = \alpha'', \quad (e', \dots a) = \beta'', \quad \frac{1}{[a, \dots e']} = \gamma''$$

setzt, indem dann

$$\{x - \alpha''\}\{y - \beta''\} = \gamma''^2. \tag{f}$$

(e) und (f) müssen daher zwei identische Gleichungen sein. Es folgt aber aus (f):

$$y = \infty \text{ für } x = \alpha'', \quad \text{und} \quad x = \infty \text{ für } y = \beta''.$$

Substituirt man diese zwei Paare zusammengehöriger Werthe von x und y in (e), so kommt:

$$\gamma^2 = \{\alpha'' - \alpha\}\,\delta, \quad \gamma'^2 = \{\beta'' - \beta'\}\,\delta. \tag{g}$$

Da ferner α und β' zwei zusammengehörige Werthe von x und y in der Gleichung (e) sind, so hat man wegen (f):

$$\{\alpha - \alpha''\}\{\beta' - \beta''\} = \gamma''^2. \tag{h}$$

Mittelst der drei Gleichungen (g) und (h) werden die drei Constanten α'', β'', γ'' in (f) durch die Constanten in (e) bestimmt, und es können daher aus der Vergleichung von (e) mit (f) nicht noch andere, aus (g) und (h) nicht schon fliessende Gleichungen hervorgehen.

Durch Verbindung der drei Formeln (g) und (h) erhält man leicht folgende:

$$\{\alpha'' - \alpha\}^2 = \frac{\gamma^2\gamma''^2}{\gamma'^2}, \quad \{\beta'' - \beta'\}^2 = \frac{\gamma'^2\gamma''^2}{\gamma^2}, \quad \delta^2 = \frac{\gamma^2\gamma'^2}{\gamma''^2}. \tag{i}$$

Zieht man aus diesen Ausdrücken die Quadratwurzeln, und behält, was bald nachher gerechtfertigt werden wird, bloss die positiven Vorzeichen bei, und setzt endlich für α, α'', β', β'', γ, ... δ aus dem Vorigen ihre Werthe, so ergeben sich die Relationen:

$$(a, \dots e') - (a, \dots e) = \frac{[a', \dots e']}{[a, \dots e]\,[a, \dots e']}, \tag{17}$$

$$(e', \dots a) - (e', \dots a') = \frac{[e, \dots a]}{[e', \dots a']\,[e', \dots a]}, \tag{18}$$

$$f - (e, \dots a) - (a', \dots e') = \frac{[a, \dots e']}{[e, \dots a]\,[a', \dots e']}, \tag{19}$$

von denen sich die beiden ersten nur durch die entgegengesetzte

Folge ihrer Elemente, also nicht wesentlich von einander unterscheiden.

Drückt man die in (17) und (19) noch vorkommenden Kettenbrüche nach (13) durch Functionen mit Klammern aus, so kommt nach leichter Reduction:

$$(20)\qquad [a, \ldots e]\,[b, \ldots e'] - [a, \ldots e']\,[b, \ldots e] = [a', \ldots e'],$$

$$(21)\qquad [a, \ldots e]\,f\,[a', \ldots e'] - [a, \ldots e, f, a', \ldots e'] =$$

$$= [a, \ldots d]\,[a', \ldots e'] + [a, \ldots e]\,[b', \ldots e'],$$

oder noch einfacher, weil nach (14)

$$[a, \ldots e]\,f - [a, \ldots d] = [a, \ldots f]$$

ist:

$$(22)\qquad [a, \ldots f]\,[a', \ldots e'] - [a, \ldots e'] = [a, \ldots e]\,[b', \ldots e'].$$

Um uns noch von der Richtigkeit der bei Ausziehung der Wurzeln angenommenen Vorzeichen zu überzeugen, so ist es, wie schon in §. 4 erinnert worden, hinreichend, diese Richtigkeit für bestimmte Werthe der Elemente, aber für eine unbestimmte Anzahl derselben, darzuthun. Man setze daher sämmtliche Elemente einander gleich, jedes gleich 2, so erhält man nach (14):

$$[2] = 2, \quad [2, 2] = 3, \quad [2, 2, 2] = 4, \quad [2, 2, 2, 2] = 5, \quad \text{u. s. w.}$$

und nach (13):

$$(2, 2, 2, \ldots) = \frac{m}{m+1},$$

wenn m die Anzahl der Elemente bezeichnet: also $(2, 2, 2, \ldots)$ gleich einem positiven echten Bruche, der sich desto mehr der Einheit nähert, je grösser die Elementenzahl ist. Hiermit übersieht man nun sogleich, dass (wenn jedes Element $= 2$ ist, wie gross übrigens auch ihre Anzahl sein mag,) das in jeder der Gleichungen (17) bis (19) zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens Befindliche eine positive Grösse ist, dass folglich diese Gleichungen, mithin auch die daraus abgeleiteten (20) und (21), hinsichtlich der Vorzeichen ihrer Glieder richtig sind.

§. 7. Die Gleichung (20) kann als eine Verallgemeinerung von (15) angesehen werden, indem die erstere Gleichung in letztere übergeht, wenn man auf e unmittelbar e' folgen lässt. Man kann aber die Gleichung (20) selbst noch sehr verallgemeinern, wenn man die Reihe der Elemente in noch mehr als zwei Gruppen zerlegt.

Bestehe sie zuerst aus **drei** Gruppen, und sei daher nach einer der vorigen analogen Bezeichnungsart die Reihenfolge:

$$a, \dots e, \ f, \ a', \dots e', \ f', \ a'', \dots e'',$$

so ist wie in (17):

$$(a, \dots e') - (a, \dots e) = \frac{[a', \dots e']}{[a, \dots e][a, \dots e']},$$

$$(a, \dots e'') - (a, \dots e') = \frac{[a'', \dots e'']}{[a, \dots e'][a, \dots e'']},$$

$$(a, \dots e'') - (a, \dots e) = \frac{[a', \dots e'']}{[a, \dots e][a, \dots e'']},$$

folglich

$$\frac{[a', \dots e']}{[a, \dots e][a, \dots e']} + \frac{[a'', \dots e'']}{[a, \dots e'][a, \dots e'']} = \frac{[a', \dots e'']}{[a, \dots e][a, \dots e'']}, \tag{23}$$

oder

$$[a, \dots e'][a', \dots e''] - [a, \dots e''][a', \dots e'] = [a, \dots e][a'', \dots e''], \tag{24}$$

eine Relation, deren Bildungsgesetz, wenn man sie mit der oben stehenden Reihenfolge der Elemente zusammenhält, sehr leicht erkannt wird, und daher keiner weiteren Erörterung bedarf.

Von dieser allgemeinen Relation kommt man auf (20) wieder zurück durch Weglassung der Elemente $a, \dots e$, so dass noch $f, a', \dots e', f', a'', \dots e''$ übrig bleiben. Hiermit wird

$$[a, \dots e] = 1$$

(vergl. §. 5), und (24) geht über in:

$$[f, \dots e'][a', \dots e''] - [f, \dots e''][a', \dots e'] = [a'', \dots e''].$$

Eben so gelangt man wieder zu (20), wenn man die letzten Elemente $a'', \dots e''$ streicht und die noch übrigen in umgekehrter Folge nimmt.

Vernichtet man aber die mittleren Elemente $a', \dots e'$ und lässt daher

$$a, \dots e, \ f, \ f', \ a'', \dots e''$$

die Reihenfolge der Elemente sein, so ist

$$[a', \dots e'] = 1$$

zu setzen, und (24) verwandelt sich in:

$$[a, \dots f][f', \dots e''] - [a, \dots e''] = [a, \dots e][a'', \dots e''],$$

welches auf (22) hinauskommt.

Die Gleichung (22) kann insbesondere dazu dienen, um Producte aus Functionen mit Klammern in Summen derselben aufzulösen, eben so, wie ein Product aus mehreren Sinus und Cosinus in eine aus diesen Functionen bestehende Summe verwandelt werden kann. So ist z. B.

$$[a, b, c]\,[a', b', c'] = [a, b, c, a', b', c'] + [a, b]\,[b', c'],$$

$$[a, b]\,[b', c'] = [a, b, b', c'] + [a]\,[c'],$$

$$[a]\,[c'] = [a, c'] + 1,$$

folglich

$$[a, b, c]\,[a', b', c'] = [a, b, c, a', b', c'] + [a, b, b', c'] + [a, c'] + 1.$$

Werde jetzt das System der Elemente in vier Gruppen zerlegt, und sei es daher

$$a, \ldots e,\ f,\ a', \ldots e',\ f',\ a'', \ldots e'',\ f'',\ a''', \ldots e''',$$

so erhalten wir auf ganz ähnliche Art, wie wir vorhin zu (23) gelangten, die Relation:

$$(25)\quad \frac{[a', \ldots e']}{[a, \ldots e]\,[a, \ldots e']} + \frac{[a'', \ldots e'']}{[a, \ldots e']\,[a, \ldots e'']} + \frac{[a''', \ldots e''']}{[a, \ldots e'']\,[a, \ldots e''']} = \\ = \frac{[a', \ldots e''']}{[a, \ldots e]\,[a, \ldots e''']},$$

woraus sich die bei noch mehreren Gruppen stattfindenden Gleichungen von selbst abnehmen lassen.

§. 8. Nachdem in dem Bisherigen die merkwürdigsten Relationen zwischen Kettenbrüchen und den mit ihnen verwandten Functionen entwickelt worden sind, will ich noch zeigen, wie die Zerlegung der Elemente eines Kettenbruchs in mehrere Gruppen nicht selten zur Vereinfachung seiner Form und seiner Berechnung mit Nutzen angewendet werden kann.

Sei zu dem Ende, wie in (1), x durch y und mehrere constante Elemente mittelst eines Kettenbruchs gegeben. Man bilde aus den Elementen mehrere, z. B. vier, Gruppen, und nehme daher an:

$$(26)\qquad x = (a, \ldots e, f, a', \ldots e', f', a'', \ldots e'', f'', a''', \ldots e''', y).$$

Man setze nun:

$$(a', \ldots e', f', a'', \ldots y) = x',$$

$$(a'', \ldots e'', f'', a''', \ldots y) = x'',$$

$$(a''', \ldots e''', y) = x''',$$

so ist nach (2):

$$x = (a, \dots e, f - x'),\; x' = (a', \dots e', f' - x''),\; x'' = (a'', \dots e'', f'' - x'''),$$

und nach (16) wenn man noch

$$(a, \dots e) = \alpha\,, \qquad (e, \dots a) = \beta\,, \qquad \frac{1}{[a, \dots e]} = \gamma\,,$$

$$(a', \dots e') = \alpha'\,, \quad (e' \dots a') = \beta'\,, \quad \text{u. s. w.}$$

setzt:

$$\{x - \alpha\}\{f - x' - \beta\} = \gamma^2, \quad \{x' - \alpha'\}\{f' - x'' - \beta'\} = \gamma'^2, \qquad (a)$$
$$\{x'' - \alpha''\}\{f'' - x''' - \beta''\} = \gamma''^2\,, \quad \{x''' - \alpha'''\}\{y - \beta'''\} = \gamma'''^2,$$

folglich

$$x = \alpha + \frac{\gamma^2}{f - \beta - x'}\,, \quad x' = \alpha' + \frac{\gamma'^2}{f' - \beta' - x''}\,, \quad \text{u. s. w.}$$

und wenn man daraus x', x'', x''' successive eliminirt:

$$x = \alpha + \cfrac{\gamma^2}{f - \beta - \alpha' - \cfrac{\gamma'^2}{f' - \beta' - \alpha'' - \cfrac{\gamma''^2}{f'' - \beta'' - \alpha''' - \cfrac{\gamma'''^2}{y - \beta'''}}}}\,.$$

Hiermit erscheint der Werth von x wieder in der Gestalt eines Kettenbruchs, der jedoch nur aus so vielen Gliedern besteht, als in wie viel Gruppen man die Elemente des anfänglichen vertheilt hatte.

Es lässt sich aber dieser neue Kettenbruch auf eine für die Berechnung noch bequemere Form bringen. Man setze

$$x - \alpha = z\,, \quad x' - \alpha' = z'\,, \quad \text{u. s. w.},$$

so werden die Gleichungen (a):

$$z\,\{f - \beta - \alpha' - z'\} = \gamma^2\,, \quad z'\,\{f' - \beta' - \alpha'' - z''\} = \gamma'^2, \qquad (b)$$
$$z''\,\{f'' - \beta'' - \alpha''' - z'''\} = \gamma''^2\,, \qquad z'''\,\{y - \beta'''\} = \gamma'''^2.$$

Es ist aber nach (19):

$$f - \beta - \alpha' = f - (e, \dots a) - (a', \dots e') = \frac{[a, \dots e']}{[a, \dots e]\,[a', \dots e']}\,,$$

und eben so:

$$f' - \beta' - \alpha'' = \frac{[a', \dots e'']}{[a', \dots e']\,[a'', \dots e'']}\,, \quad \text{u. s. w.}$$

Ferner war

$$\gamma^2 = \frac{1}{[a, \dots e]^2}\,, \text{ u. s. w.}, \quad \beta''' = (e''', \dots a''') = \frac{[a''', \dots d''']}{[a''', \dots e''']}\,.$$

Substituirt man dieses Alles in (b), und setzt hierauf noch der Kürze halber:

$$[a, \ldots e]\, z = v, \qquad [a', \ldots e']\, z' = v', \quad \text{u. s. w.}$$

so verwandeln sich die Gleichungen (b) in:

$$v\{[a, \ldots e'] - [a, \ldots e]\, v'\} = [a', \ldots e'],$$

$$v'\{[a', \ldots e''] - [a', \ldots e']\, v''\} = [a'', \ldots e''],$$

$$v''\{[a'', \ldots e'''] - [a'', \ldots e'']\, v'''\} = [a''', \ldots e'''],$$

$$v'''\{[a''', \ldots e''']\, y - [a''', \ldots d''']\} = 1\,.$$

Endlich ist

$$x = a + z = \frac{1}{[a, \ldots e]}\{[b, \ldots e] + v\},$$

und wenn man darin den aus den vorhergehenden Gleichungen, nach Elimination von v', v'', v''', fliessenden Werth von v substituirt:

(27) $x =$

$$\frac{1}{[a, \ldots e]}\left\{[b, \ldots e] + \cfrac{[a', \ldots e']}{[a, \ldots e'] - \cfrac{[a, \ldots e][a'', \ldots e'']}{[a', \ldots e''] - \cfrac{[a', \ldots e'][a''', \ldots e''']}{[a'', \ldots e'''] - \cfrac{[a'', \ldots e'']}{[a''', \ldots e''']\, y - [a''', \ldots d''']}}}}\right.$$

§. 9. Von dieser Formel, deren Fortgang bei einer noch grösseren Anzahl von Gruppen von selbst erhellet, wird sich der Nutzen am besten durch Anwendung derselben auf einige besondere Fälle erörtern lassen. Nimmt man, was bisher unbestimmt blieb, die Anzahl der Elemente in jeder Gruppe gleich gross an, etwa $= m$, so ist in (27) die Aufgabe gelöst: *einen Kettenbruch von der in §. 1 angenommenen Form in einen anderen zu verwandeln, der m-mal weniger Glieder hat.*

Soll daher z. B. der Kettenbruch

$$(a, f, a', f', a'', f'', a''', \ldots)$$

in einen anderen mit halb so viel Gliedern umgeformt werden, so hat man im Vergleich mit (26) die Elemente $b, \ldots e$, $b', \ldots e'$, $b'', \ldots e''$, u. s. w. als weggelassen zu betrachten, und es wird

$$[b, \ldots e] = 1, \quad [a, \ldots e] = a, \quad [a', \ldots e'] = a', \ \text{u. s. w.},$$

ferner vermöge §. 5, c):

$$[a, \ldots e'] = [a, f, a'] = a f a' - a - a',$$

$$[a', \ldots e''] = a' f' a'' - a' - a'',$$

u. s. w.; folglich nach (27):

$$\frac{1}{a-\frac{1}{f-\frac{1}{a'-\frac{1}{f'-\text{etc.}}}}} = \frac{1}{a}\left\{1+\frac{a'}{afa'-a-a'-\frac{aa''}{a'f'a''-a'-a''-\frac{a'a'''}{a''f''a'''-a''-a'''-\text{etc.}}}}\right. \tag{28}$$

also auch, wenn man $f, f', f'', \ldots$ mit den entgegengesetzten Zeichen nimmt:

$$\frac{1}{a+\frac{1}{f+\frac{1}{a'+\frac{1}{f'+\text{etc.}}}}} = \frac{1}{a}\left\{1-\frac{a'}{afa'+a+a'-\frac{aa''}{a'f'a''+a'+a''-\text{etc.}}}\right. \tag{29}$$

So ist z. B., wenn wir

$$a = f = a' = f' = \cdots = 2$$

setzen, nach (29):

$$\sqrt{2} = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\text{etc.}}}}} = 1+\frac{1}{2}\left\{1-\frac{2}{12-\frac{4}{12-\frac{4}{12-\text{etc.}}}}\right.$$

$$= 1+\frac{1}{2}\left\{1-\frac{1}{6-\frac{1}{6-\frac{1}{6-\text{etc.}}}}\right.$$

wobei daher die Berechnung von $\sqrt{2}$ durch den letzteren Kettenbruch nur halb so viel Glieder zu berücksichtigen erfordert, als wenn $\sqrt{2}$ durch den ersteren berechnet werden soll. Da ferner nach (28):

$$\frac{1}{6-\frac{1}{6-\frac{1}{6-\text{etc.}}}} = \frac{1}{6}\left\{1+\frac{1}{34-\frac{1}{34-\frac{1}{34-\text{etc.}}}}\right.$$

so ist

$$\sqrt{2} = 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\left\{1+\frac{1}{34-\frac{1}{34-\text{etc.}}}\right.$$

und damit von Neuem eine doppelt so schnelle Convergenz, also eine viermal schnellere, als bei dem anfänglichen Kettenbruche, bewirkt.

Um einen Kettenbruch auf einen anderen mit einer dreimal geringeren Zahl von Gliedern zu reduciren, so kommt, wenn man in (26) und (27) die Elemente $c, \ldots e, c', \ldots e'$, u. s. w. weglässt und der Kürze wegen

$$[a, b] = ab - 1 = \alpha, \quad [a', b'] = \alpha', \quad [a'', b''] = \alpha'', \text{ u. s. w.},$$

$$[a, b, f, a', b'] = abfa'b' - aa'b' - abb' - abf - fa'b' + a + f + b' = A,$$

$$[a', b', f', a'', b''] = A', \quad [a'', \ldots b'''] = A'', \text{ u. s. w.}$$

setzt:

$$(30) \qquad \cfrac{1}{a - \cfrac{1}{b - \cfrac{1}{f - \cfrac{1}{a' - \text{etc.}}}}} = \frac{1}{\alpha}\left\{ b + \cfrac{\alpha'}{A - \cfrac{\alpha\alpha''}{A' - \cfrac{\alpha'\alpha'''}{A'' - \text{etc.}}}}\right.$$

Will man in dem Kettenbruche zur Linken die einzelnen Brüche durch Addition verbunden haben, so nehme man die Elemente von gerader Stellenzahl, d. i. $b, a', f', b'', a''', f''', \ldots$ mit entgegengesetzten Zeichen. Sei demnach

$$[a, -b] = -ab - 1 = -\beta,$$

$$[-a', b'] = [a', -b'] = -\beta',$$

$$[a'', -b''] = -\beta'', \quad \text{u. s. w.}$$

Da ferner, wie leicht ersichtlich, die Entwickelungen von

$$[a, -b, f, -a', b'] \quad \text{und} \quad [-a, b, -f, a', -b']$$

gefunden werden, wenn man in obiger Entwickelung von $[a, b, f, a', b']$ alle Glieder das eine Mal mit positiven, das andere Mal mit negativen Zeichen nimmt, so setze man:

$$[a, -b, f, \ldots] = B, \quad [-a', b', \ldots] = -[a', -b', \ldots] = -B',$$

$$[a'', -b'', \ldots] = B'', \quad \text{u. s. w.},$$

und es wird die vorige Gleichung:

$$(31) \qquad \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{f + \cfrac{1}{a' + \text{etc.}}}}} = \frac{1}{-\beta}\left\{ -b - \cfrac{\beta'}{B - \cfrac{\beta\beta''}{-B' - \cfrac{\beta'\beta'''}{B'' - \cfrac{\beta''\beta^{\text{IV}}}{-B''' - \text{etc.}}}}}\right.$$

$$= \frac{1}{\beta}\left\{ b + \cfrac{\beta'}{B + \cfrac{\beta\beta''}{B' + \cfrac{\beta'\beta'''}{B'' + \text{etc.}}}}\right.$$

Mit Anwendung auf das obige numerische Beispiel, wo jedes der Elemente gleich 2 war, ergiebt sich

$$\beta = \beta' = \cdots = 5\,; \quad B = B' = \cdots = 70\,,$$

und daher:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}} = 1 + \frac{1}{5}\left\{2 + \cfrac{5}{70 + \cfrac{25}{70 + \cfrac{25}{70 + \text{etc.}}}}\right.$$

$$= 1 + \frac{1}{5}\left\{2 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{14 + \text{etc.}}}}\right.$$

wodurch wir einen Kettenbruch erhalten haben, von welchem die ersten m Glieder den Werth von $\sqrt{2}$ mit derselben Genauigkeit darstellen, als ihn die ersten $3m$ Glieder des anfänglichen geben.

§. 10. Nicht selten tritt der Fall ein, dass in einem Kettenbruche, wie (26), zwischen gewissen willkürlich zu nehmenden Elementen die anderen stets auf dieselbe Weise wiederkehren.

Seien $f, f', f'', \ldots$ die ersteren Elemente, zwischen denen die übrigen sich periodisch wiederholen, so dass

$$a = a' = a'' = \cdots, \quad b = b' = b'' = \cdots, \text{ u. s. w.,} \quad e = e' = e'' = \cdots,$$

und daher

$$[a, \ldots e] = [a', \ldots e'] = [a'', \ldots e''] = \cdots$$

In diesem Falle lässt sich der reducirte Kettenbruch (27), bei welchem mit jeder neuen Periode ein neues Glied anhebt, noch etwas einfacher darstellen. Es wird nämlich nach (21):

$$[a, \ldots e'] = [a, \ldots e]^2 f - \{[a, \ldots d] + [b, \ldots e]\}[a, \ldots e] = A\{Af - D - B\},$$

wenn wir

$$[a, \ldots e] = A\,, \quad [b, \ldots e] = B\,, \quad [a, \ldots d] = D$$

setzen; und eben so

$$[a', \ldots e''] = A[Af' - D - B]\,, \quad \text{u. s. w.,}$$

folglich nach leichter Reduction:

(32) $$(a, \ldots e, f, a, \ldots e, f', a, \ldots e, f'', a, \ldots) =$$

$$= \frac{1}{A}\left\{B + \cfrac{1}{Af - D - B - \cfrac{1}{Af' - D - B - \cfrac{1}{Af'' - \text{etc.}}}}\right.$$

So fliesst z. B. schon aus (28) und (29):

(33) $$\cfrac{1}{a \mp \cfrac{1}{f \mp \cfrac{1}{a \mp \cfrac{1}{f' \mp \text{etc.}}}}} = \frac{1}{a}\left\{1 \pm \cfrac{1}{af \mp 2 - \cfrac{1}{af' \mp 2 - \cfrac{1}{af'' \mp 2 - \text{etc.}}}}\right.$$

Ferner ist für die Entwickelung von $(a, b, f, a, b, f', a, b, f'', \ldots)$,

$$A = [a, b] = ab - 1\,, \qquad B = b\,, \qquad D = a\,,$$

und mithin

(34) $$\cfrac{1}{a - \cfrac{1}{b - \cfrac{1}{f - \cfrac{1}{a - \text{etc.}}}}} = \frac{1}{ab - 1}\left\{b + \cfrac{1}{(ab-1)f - a - b - \cfrac{1}{(ab-1)f' - a - b - \cfrac{1}{(ab-1)f'' - \text{etc.}}}}\right.$$

Sollen in dem Kettenbruche zur Linken bloss positive Zeichen vorkommen, soll also der Kettenbruch

$$(a, -b, f, -a, b, -f', a, -b, f'', \ldots)$$

reducirt werden, so scheint es wegen des Wechsels der Zeichen von a und b nöthig, zu der allgemeinen Formel (31) zurückzukehren, um damit zu erfahren, welche a und welche b in (34) zur Linken mit entgegengesetzten Zeichen zu nehmen sind. Indessen kann man das gesuchte Resultat auch aus (34) unmittelbar auf folgende Weise erhalten. Es ist, wie man leicht findet:

$$(a, b, c, d, e, \ldots) = i\left(ai, \frac{b}{i}, ci, \frac{d}{i}, ei, \ldots\right)$$

für jeden beliebigen Werth von i. Setzt man nun erstlich $i = \sqrt{-1}$, so wird $\frac{1}{i} = -i$, und

$$(a, b, c, d, e, \ldots) = i(ai, -bi, ci, -di, ei, \ldots)\,,$$

und wenn man $b, d, f, \ldots$ mit entgegengesetzten Zeichen nimmt:

$$(a, -b, c, -d, e, \ldots) = i(ai, bi, ci, di, ei, \ldots)\,.$$

Setzt man ferner $i = -1$, so kommt:

$$(a,\ b,\ c,\ d, \ldots) = -(-a,\ -b,\ -c,\ -d,\ \ldots),$$

und bei negativen Werthen von b, d, f, ...:

$$(a,\ -b,\ c,\ -d, \ldots) = -(-a,\ b,\ -c,\ d,\ \ldots).$$

Man multiplicire daher die Gleichung (34) beiderseits mit $i = \sqrt{-1}$ und schreibe darin ai, bi, fi, $f'i$, ..., statt a, b, f, f', ..., so ergiebt sich mit Hülfe der eben aufgestellten Relationen:

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{f + \cfrac{1}{a + \text{etc.}}}}} = \frac{1}{ab+1}\left\{b + \cfrac{1}{(ab+1)f + a + b + \cfrac{1}{(ab+1)f' + a + b + \text{etc.}}}\right. \tag{35}$$

§. 11. Wenn in (32) die immer wiederkehrenden Elemente $a, \ldots e$ in umgekehrter Folge genommen werden, so bleibt

$$A = [a, \ldots e] = [e, \ldots a]$$

ungeändert;

$$B = [b, \ldots e]$$

geht über in

$$[d, \ldots a] = [a, \ldots d] = D,$$

und eben so D in B. So wie daher

$$(a, \ldots e, f, a, \ldots e, f', \ldots) = \frac{1}{A}\{B + (Af - D - B,\ Af' - D - B, \ldots)\},$$

so hat man auf gleiche Art:

$$(e, \ldots a, f, e, \ldots a, f', \ldots) = \frac{1}{A}\{D + (Af - B - D,\ Af' - B - D, \ldots)\};$$

folglich ist die Differenz:

$$\begin{aligned}(a, \ldots e, f, a, \ldots e, f', \ldots) - (e, \ldots a, f, e, \ldots a, f', \ldots) = \\ = \frac{B}{A} - \frac{D}{A} = (a, \ldots e) - (e, \ldots a),\end{aligned} \tag{36}$$

also bleibt diese Differenz merkwürdiger Weise ganz unabhängig von den Werthen der Elemente f, f', f'', ... Nur muss die Anzahl derselben, was wohl zu bemerken, unendlich sein; d. i. die zwei Kettenbrüche zur Linken dürfen nie abbrechen.

Sind auch die Elemente f, f', f'', ... in inf. einander gleich, ist also der Kettenbruch ein vollkommen periodischer, so lässt er sich, wie bekannt, als die Wurzel einer quadratischen Gleichung

betrachten, deren Coefficienten rationale Functionen seiner Elemente $a, \dots e, f$ sind. Setzt man nämlich:

$$(a, \dots e, f, a, \dots e, f, a, \dots) = x, \tag{37}$$

so ist nach (2) auch:

$$x = (a, \dots e, f - x),$$

und daher nach (16), wenn man $f - x$ für das dortige y schreibt:

$$\{x - (a, \dots e)\}\{f - x - (e, \dots a)\} = \frac{1}{[a, \dots e]^2}, \tag{38}$$

oder weil

$$f - (e, \dots a) = \frac{1}{(f, \dots a)} = \frac{[a, \dots f]}{[a, \dots e]}, \quad \text{und } (a, \dots e) = \frac{[b, \dots e]}{[a, \dots e]}:$$

$$\{[a, \dots e]\, x - [b, \dots e]\}\{[a, \dots f] - [a, \dots e]\, x\} = 1, \tag{39}$$

oder auch mit Hülfe der Relation (15):

$$[a, \dots e]\, x^2 - \{[a, \dots f] + [b, \dots e]\}\, x + [b, \dots f] = 0, \tag{40}$$

eine quadratische Gleichung, woraus nach (39) rückwärts und übereinstimmend mit (32):

$$[a, \dots e]\, x = [b, \dots e] + \frac{1}{[a, \dots f] - [a, \dots e]\, x}$$

$$= [b, \dots e] + \cfrac{1}{[a, \dots f] - [b, \dots e] - \cfrac{1}{[a, \dots f] - \text{etc.}}}$$

fliesst.

Die Summe der zwei Wurzeln ist zufolge (38):

$$= (a, \dots e) + f - (e, \dots a).$$

Da nun die eine Wurzel $= (a, \dots e, f, a, \dots)$, so ist die andere

$$= f + (a, \dots e) - (e, \dots a) - (a, \dots e, f, a, \dots),$$

also nach (36):

$$= f - (e, \dots a, f, e, \dots a, f, \dots) = \frac{1}{(f, e, \dots a, f, e, \dots a, f, \dots)}.$$

Wir folgern hieraus: *Die quadratische Gleichung, zu welcher ein periodischer Kettenbruch von der Form* (37) *führt, von welcher also derselbe die eine Wurzel ist, hat zur anderen Wurzel den reciproken Werth des Kettenbruchs, welcher durch Umkehrung der Elemente des ersteren entsteht.*

Dasselbe Theorem lässt sich auch unmittelbar aus der Betrachtung von (40) ableiten. Denn da von dieser Gleichung der Werth von x in (37) die eine Wurzel ist, so muss auch, wenn $a, \ldots e, f$ mit $f, e, \ldots a$ vertauscht werden, $(f, e, \ldots b, a, f, e, \ldots b, a, f, \ldots)$ die eine Wurzel der Gleichung

$$[b, \ldots f]\, y^2 - \{[a, \ldots f] + [b, \ldots e]\}\, y + [a, \ldots e] = 0$$

sein. Da aber, wie man sogleich sieht, die Wurzeln dieser Gleichung den reciproken Werthen der Wurzeln von (40) gleich sind, so muss auch das Reciproke von $(f, \ldots a, f, \ldots a, \ldots)$ eine Wurzel von (40) sein.

Das Product aus den beiden Wurzeln der Gleichung (40) ist

$$\frac{[b, \ldots f]}{[a, \ldots e]} = \frac{[b, \ldots f]}{[a, \ldots f]} \cdot \frac{[a, \ldots f]}{[a, \ldots e]} = \frac{(a, \ldots f)}{(f, \ldots a)},$$

und man hat daher die nicht minder merkwürdige Relation:

$$\frac{(a, \ldots f, a, \ldots f, a, \ldots f, a, \ldots)}{(f, \ldots a, f, \ldots a, f, \ldots a, f, \ldots)} = \frac{(a, \ldots f)}{(f, \ldots a)}. \tag{41}$$

Ist der Kettenbruch von der Form $(a, -b, c, -d, \ldots)$, sind also die einzelnen Brüche durch Addition mit den Nennern der jedesmal vorhergehenden verbunden, so unterscheide man, ob die Anzahl der die Perioden bildenden Elemente gerade oder ungerade ist. Im ersteren Falle kehren in gedachter Form die gleichnamigen Elemente immer mit denselben Zeichen zurück, und das letzte Element f jeder Periode hat das negative Zeichen. Zu $(a, -b, \ldots e, -f, a, -b, \ldots)$ gehört daher als zweite Wurzel:

$$\frac{1}{(-f, e, \ldots -b, a, -f, e, \ldots)} = \frac{-1}{(f, -e, \ldots b, -a, f, -e, \ldots)}.$$

Dasselbe findet aber auch statt, wenn zweitens die Anzahl der periodischen Glieder ungerade ist. Man muss nämlich alsdann immer zwei Perioden für eine rechnen, damit die Elemente nicht nur ihrem absoluten Werthe, sondern auch ihrem Vorzeichen nach periodisch wiederkehren.

Von der quadratischen Gleichung, zu welcher ein periodischer Kettenbruch mit bloss positiven Zeichen führt, wird daher die andere Wurzel gefunden, indem man die Elemente in umgekehrter Folge nimmt und hierauf den Kettenbruch in die negative Einheit dividirt. So sind z. B.

$$x' = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \text{etc.}}}}}} \quad \text{und} \quad x'' = -c - \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \text{etc.}}}}}$$

die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(ab + 1)\,x^2 + (abc + a - b + c)\,x - bc - 1 = 0\,.$$

Werden für a, b, c, wie gewöhnlich, positive ganze Zahlen genommen, so ist die Wurzel x' ein positiver echter Bruch, und x'' negativ und absolut grösser als die Einheit.

Die reciproken Werthe von x' und x'' sind:

$$y' = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \text{etc.}}} \quad \text{und} \quad y'' = \cfrac{-1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \text{etc.}}}}$$

und diese die Wurzeln der Gleichung:

$$(bc + 1)\,y^2 - (abc + a - b + c)\,y - ab - 1 = 0\,.$$

Nimmt man auch hier für a, b, c positive ganze Zahlen, so ist y' grösser als 1, und y'' zwischen 0 und -1 enthalten.

§. 12. Die hiermit erörterte Art und Weise, nach welcher zwei periodische Kettenbrüche als Wurzeln einer quadratischen Gleichung zusammengehören, ist von Galois entdeckt und in Gergonne's *Annales*, Tom. XIX, bekannt gemacht worden. Doch ist mir davon nur die Anzeige in de Férussac's *Bulletin des sciences mathém.* Avril 1829, pag. 254, zu Gesicht gekommen.

Wird die von Galois gemachte, wenn auch a. a. O. nicht ausdrücklich beigefügte Bedingung, dass a, b, c, ... positive ganze Zahlen sind, weggelassen, so können die Wurzeln einer quadratischen Gleichung, wenn sie anders reell sind, stets durch zwei Kettenbrüche von der gedachten Form annäherungsweise gefunden werden.

So folgt, um dieses auf die möglich einfachste Weise zu bewerkstelligen, aus der quadratischen Gleichung:

$$x^2 - px + q = 0$$

unmittelbar:

$$x = \frac{q}{p-x} = \cfrac{q}{p - \cfrac{q}{p - \cfrac{q}{p - \text{etc.}}}} = \left(\frac{p}{q}, p, \frac{p}{q}, p, \ldots\right).$$

Hat nun die Gleichung zwei reelle Wurzeln, ist also $p^2 > 4q$, so convergirt dieser Kettenbruch, und giebt so genau, als man will, die absolut kleinere der beiden Wurzeln. Die absolut grössere ist:

$$1 : \left(p, \frac{p}{q}, p, \frac{p}{q}, \ldots\right) = p - \cfrac{q}{p - \cfrac{q}{p - \text{etc.}}}$$

Um dieses Verhalten der Wurzeln — welche wir a und b nennen wollen — darzuthun, schreibe man

$$p = a + b, \quad q = ab,$$

und der erstere Kettenbruch wird:

$$\cfrac{ab}{a+b - \cfrac{ab}{a+b - \cfrac{ab}{a+b-\text{etc.}}}} = \cfrac{am}{1+m - \cfrac{m}{1+m - \cfrac{m}{1+m-\text{etc.}}}} = aM,$$

wenn man noch $b = am$, und den Kettenbruch, durch a dividirt, gleich M setzt. Die angenäherten Werthe von M werden in ihrer Folge sein:

$$M' = \frac{m}{1+m}, \quad M'' = \frac{m}{1+m-M'}, \quad M''' = \frac{m}{1+m-M''},$$

u. s. w., folglich, wenn man

$$M' = 1 - N', \quad M'' = 1 - N'', \quad M''' = 1 - N''',$$

u. s. w., setzt:

$$N' = \frac{1}{1+m}, \quad N'' = \frac{N'}{m+N'}, \quad N''' = \frac{N''}{m+N''},$$

u. s. w., woraus sich weiter ergiebt:

$$N' = \frac{1}{1+m}, \quad N'' = \frac{1}{1+m+m^2}, \quad N''' = \frac{1}{1+m+m^2+m^3},$$

und nach diesem Gesetze weiter fort. Sei nun b die absolut grössere der beiden Wurzeln, also m absolut grösser als 1, so werden sich die $N''^{\cdots}$ in ihrem Fortgange immer mehr und ohne Grenzen der Null, folglich die $M''^{\cdots}$ der positiven Einheit nähern, so dass M selbst

gleich 1 ist. Der Grenzwerth, dem obiger Kettenbruch immer näher kommt, ist daher gleich $aM = a =$ der absolut kleineren von beiden Wurzeln.

§. 13. Unter den Kettenbrüchen mit wiederkehrenden Elementen dürften diejenigen noch einige Aufmerksamkeit verdienen, bei denen das wiederkehrende Element die Einheit selbst ist. Man findet leicht, dass:

$$(1, y) = \frac{y}{y-1}, \quad (1, 1, y) = 1 - y, \quad (1,1,1,y) = \frac{1}{y}, \quad (1,1,1,1,y) = \frac{y}{y-1},$$

und so fort zu dreien abwechselnd. Es folgt hieraus:

$$(1, 1, a, 1, 1, b) = (1, 1, a - (1, 1, b)) = (1, 1, a + b - 1) = 2 - a - b,$$

und eben so:

$$(1, 1, a, 1, 1, b, 1, 1, c) = 3 - a - b - c. \quad \text{u. s. w.}$$

Man hat ferner:

$$(a, b, 1, 1, 1, c, d, e) = (a, b - (1, 1, 1, c - (d, e)))$$

$$= \left(a, b - \frac{1}{c - (d, e)}\right) = (a, b - (c, d, e)) = (a, b, c, d, e).$$

Kommen daher in dem Ausdrucke eines Kettenbruchs drei der Einheit gleiche Elemente unmittelbar hinter einander vor, so kann man sie, ohne den Werth des Kettenbruchs zu ändern, auch weglassen. So ist z. B.:

$$(1, 1, 1, a, 1, 1, 1, b, 1, 1, 1, c) = (a, b, c).$$

Dass mehrere auf einander folgende Elemente in dem Ausdrucke eines Kettenbruchs ohne Aenderung seines Werthes gestrichen werden können, ist noch auf unzählig viele andere Arten möglich. Denn, wie schon aus dem vorigen speciellen Falle erhellet, ist überhaupt zur Weglassung der Elemente $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda, \mu, \nu$ in einem Kettenbruche, wie $(a, b, \alpha, \beta, \ldots \nu, c, d, \ldots)$, nur nöthig, dass für jeden Werth von y

$$(\alpha, \beta, \ldots \mu, \nu, y) = (y) = \frac{1}{y}$$

sei, also wenn diese Gleichung nach (16*) entwickelt wird:

$$[\alpha, \ldots \nu] - [\alpha, \ldots \mu]\frac{1}{y} - [\beta, \ldots \nu] y + [\beta, \ldots \mu] = 0;$$

woraus wegen der Unbestimmtheit von y die drei Bedingungsgleichungen:

$$[\alpha, \dots \nu] + [\beta, \dots \mu] = 0\,, \qquad (a)$$

$$[\alpha, \dots \mu] = 0\,, \qquad (b)$$

$$[\beta, \dots \nu] = 0 \qquad (c)$$

fliessen, die sich aber für die Anwendung folgendergestalt noch bequemer einrichten lassen. Nach (15) ist:

$$[\alpha, \dots \mu][\beta, \dots \nu] - [\alpha, \dots \nu][\beta, \dots \mu] = 1\,,$$

folglich wegen (*a*), (*b*), (*c*):

$$[\beta, \dots \mu] = \pm 1\,. \qquad (d)$$

Hiermit wird wegen (*b*):

$$[\alpha, \dots \mu] = \alpha[\beta, \dots \mu] - [\gamma, \dots \mu] = 0\,,$$

folglich:

$$\alpha = \pm[\gamma, \dots \mu]\,, \qquad (e)$$

und eben so wegen (*c*):

$$\nu = \pm[\beta, \dots \lambda]\,. \qquad (f)$$

Man wähle daher von den Elementen $\beta, \dots \mu$, eines ausgenommen, die übrigen nach Belieben, und bestimme dieses Eine mit Hülfe der Gleichung (*d*), worauf sich dann α und ν durch (*e*) und (*f*) ergeben.

So ist z. B. bei fünf Elementen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, wenn man β und δ willkürlich nimmt, und von den doppelten Zeichen bloss die oberen beibehält:

$$\gamma = \frac{1 + \beta + \delta}{\beta\delta}\,, \qquad \alpha = \frac{1 + \delta}{\beta}\,, \qquad \varepsilon = \frac{1 + \beta}{\delta}\,.$$

Setzt man daher $\beta = \delta = 1$, so wird $\gamma = 3$, $\alpha = \varepsilon = 2$, und es ist:

$$(\dots a, b, 2, 1, 3, 1, 2, c, d, \dots) = (\dots a, b, c, d, \dots)\,.$$

Anwendung der Lehre von den Kettenbrüchen auf die Dioptrik.

§. 14. Bei einem System von drei Linsengläsern, welche eine gemeinschaftliche Axe haben, sei a das Reciproke der Brennweite des ersten, d. i. das Licht zuerst empfangenden Glases; c und e die reciproken Brennweiten des zweiten und dritten Glases; b der Abstand des zweiten Glases vom ersten; d der Abstand des dritten vom zweiten. Beide Abstände sind positiv, indem die positive Richtung der Axe

der Gläser diejenige sein soll, nach welcher das Licht fortgeht. a, c, e sind positiv oder negativ, je nachdem die Gläser, denen sie zugehören, erhaben oder hohl sind. Sei endlich noch x der Abstand des ersten Glases von einem Objecte, y der Abstand des durch die drei Gläser gemachten Bildes vom letzten Glase, so folgt aus den Grundformeln der Dioptrik (vergl. den Aufsatz*) *Ueber die Haupteigenschaften eines Systems von Linsengläsern*, §. 3):

$$(15)\qquad y = (e, d, c, b, a, x),$$

und auf ähnliche Weise verhält sich die Gleichung zwischen x und y bei jeder anderen Zahl von Gläsern. Man kann aber dieser Gleichung auch noch die Gestalt geben:

$$(16)\qquad \{x - \alpha\}\{y - \beta\} = \gamma^2,$$

wo

$$\alpha = (a, \ldots e), \quad \beta = (e, \ldots a), \quad \gamma = \frac{1}{[a, \ldots e]}.$$

Bezeichnet daher P den Mittelpunkt des ersten Glases, Q den Mittelpunkt des letzten, X den Ort des Objectes, Y den Ort des Bildes, und bestimmt man zwei Punkte F, G in der Axe so, dass

$$FP = \alpha, \quad QG = \beta,$$

so wird

$$x - \alpha = XP - FP = XF, \qquad y - \beta = QY - QG = GY,$$

und (16) geht über in:

$$XF \,.\, GY = \gamma^2.$$

Ist also X in F, so liegt Y unendlich weit entfernt, und wird X in das Unendliche entfernt, so rückt Y nach G.

Ueberhaupt aber ist das negative Product aus den Abständen des Objects und des Bildes von den Punkten F und G (negativ, weil $XF \,.\, GY = - FX \,.\, GY$) *einem constanten Quadrate gleich.*

Analog mit den Eigenschaften einer einzigen Linse hatte ich daher in jenem Aufsatze (§. 8) F und G die beiden Brennpunkte, γ die Brennweite des Linsensystems genannt. Statt dass aber dort F der erste, G der zweite Brennpunkt geheissen hatte, möchte es wohl bezeichnender und daher angemessener sein, F, als den Ort des Objects für ein unendlich entferntes Bild, den Brennpunkt des Objects, und eben so G den Brennpunkt des Bildes zu nennen.

Sei jetzt Q nicht mehr das letzte Glas, sondern folge darauf an derselben Axe ein zweites Gläsersystem, welches eben so durch die Constanten a', ... e', wie das erste System durch a, ... e, bestimmt

*) S. 479—501 dieses Bandes.

werde. Die Mittelpunkte des ersten und letzten Glases des zweiten Systems nennen wir P' und Q', die Brennpunkte dieses Systems seien F', G', und die Brennweite $= \gamma'$, so ist (Fig. 1):

$$F'P' = (a', \dots e') = \alpha', \quad Q'G' = (e', \dots a') = \beta', \quad \gamma' = \frac{1}{[a', \dots e']} .$$

X P Q Y P' Q' Z
F'' F G F' G' G''

Fig. 1.

Setzt man aber noch QP', oder den Abstand des ersten Glases des zweiten Systems vom letzten Glase des ersten, gleich f, so sind $a, \dots e, f, a', \dots e'$ die Constanten beider Systeme, als eines einzigen betrachtet, dessen Brennpunkte F'', G'' und Brennweite γ'' durch die Gleichungen

$$F''P = (a, \dots e') = \alpha'', \quad Q'G'' = (e', \dots a) = \beta'', \quad \gamma'' = \frac{1}{[a, \dots e']}$$

bestimmt werden.

Diese Brennpunkte und Brennweite des ganzen Systems lassen sich nun, sobald die Brennpunkte und Brennweiten der beiden einzelnen Systeme gegeben sind, mittelst der in §. 6 erhaltenen Relationen zwischen $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \dots \gamma''$ sehr leicht finden. Man hat nämlich:

$$\delta = f - \beta - \alpha' = QP' - QG - F'P' = GF' ,$$

$$\alpha'' - \alpha = F''P - FP = F''F , \quad \beta'' - \beta' = Q'G'' - Q'G' = G'G'' ,$$

und hiermit werden die Gleichungen (g) und (h) in §. 6:

$$F''F = \frac{\gamma^2}{GF'} , \quad G'G'' = \frac{\gamma'^2}{GF'} , \quad \gamma'' = \sqrt{F''F . G'G''} = \frac{\gamma\gamma'}{GF'} ,$$

wodurch der vorgesetzte Zweck erreicht wird.

§. 15. Es sind diese Gleichungen so einfach, dass man wohl hoffen darf, sie auch ohne Zuhülfenahme jener aus der Theorie der Kettenbrüche entlehnten Relationen zu finden. In der That seien von einem einfachen Glase F, G die beiden Brennpunkte, γ die Brennweite, in X das Object, in Y das Bild, so folgt ohne Schwierigkeit aus der für ein einfaches Glas bekannten Grundformel (*Haupt-Eigensch.* §. 8):

$$XF . GY = \gamma^2. \qquad (a)$$

Dass bei einem einzigen Glase $\gamma = \frac{1}{2}FG$ ist, braucht nicht berücksichtigt zu werden. Das von diesem Glase ausgehende Licht falle

auf ein zweites Glas, welches mit dem ersten eine gemeinschaftliche Axe hat, und dessen Brennpunkte und Brennweite durch F', G' und γ' bezeichnet werden sollen. Für dieses zweite Glas dient Y als Object; das durch das zweite von Y, oder durch beide Gläser von X gemachte Bild sei Z, so hat man:

$$(b) \qquad YF' \,.\, G'Z = \gamma'^2 .$$

Heissen nun für beide Gläser, als ein System betrachtet, die beiden Brennpunkte F'', G'', so muss nach der oben davon gegebenen Definition, wenn X in F'' ist, Z unendlich entfernt liegen, also wegen (b) Y mit F' zusammenfallen; folglich wegen (a):

$$(c) \qquad F''F \,.\, GF' = \gamma^2 .$$

Ist zweitens X unendlich entfernt, kommt also, wegen (a), Y nach G, so muss Z in G'' sein, und hiermit wird nach (b):

$$(d) \qquad GF' \,.\, G'G'' = \gamma'^2 .$$

Aus (a) und (c) in Verbindung folgt aber:

$$(e) \quad XF : GF' = F''F : GY = XF - F''F : GF' - GY = XF'' : YF',$$

und eben so aus (b) und (d):

$$(f) \quad YF' : G'G'' = GF' : G'Z = GF' - YF' : G'Z - G'G'' = GY : G''Z,$$

und daraus weiter:

$$F''F : XF'' = GY : YF' = G''Z : G'G'',$$

folglich:

$$(g) \qquad XF'' \,.\, G''Z = F''F \,.\, G'G'' = \frac{\gamma^2 \gamma'^2}{GF'^2} .$$

Ein System von zwei Gläsern besitzt daher ebenfalls die Eigenschaft eines einzigen Glases, dass das negative Product aus den Abständen des Objects und Bildes von ihren Brennpunkten einem constanten Quadrate gleich ist. Nennen wir daher die Wurzel dieses Quadrats, der Analogie nach, die Brennweite des Systems, und bezeichnen sie mit γ'', so ist

$$(h) \qquad F''F \,.\, G'G'' = \gamma''^2 .$$

Hiermit ist aber unser Satz für ein System nicht bloss von zwei, sondern auch von jeder grösseren Anzahl von Gläsern dargethan. Denn nach dem von zwei Gläsern Erwiesenen können nunmehr F, G, γ in (a) die Brennpunkte und Brennweite eines Systems von zwei Gläsern bezeichnen, und F', G', γ' einem dritten, auf erstere zwei folgenden Glase, oder einem dritten und vierten Glase in Vereinigung

angehören: und somit gilt der Satz auch für ein System von drei oder vier Gläsern; u. s. w.

Ueberhaupt also kann man F, G, γ auf ein System von Gläsern in beliebiger Anzahl beziehen, und eben so F', G', γ' auf ein dergleichen zweites, auf das erste folgendes System. Die Brennpunkte F'', G'' und die Brennweite γ'' für beide Systeme in Verbindung werden sich alsdann mittelst der Formeln (c) (d) und (h) ergeben, derselben, welche wir zu Ende des vorigen Paragraphen durch die Theorie der Kettenbrüche gefunden hatten.

Sollen drei auf einander folgende Systeme mit einander verbunden werden, so kann dies geschehen, indem man zuerst das erste mit dem zweiten verbindet und zu dieser Vereinigung das dritte setzt, oder auch, indem man mit der Verbindung des zweiten und dritten anfängt und mit der Hinzufügung des ersten schliesst. Auf beiden Wegen müssen für alle drei Systeme, als ein einziges betrachtet, dieselben Brennpunkte und dieselbe Brennweite gefunden werden. Sind der zu verbindenden Systeme noch mehrere, so mehrt sich auch die Anzahl der Wege, auf denen man zur Verknüpfung aller Systeme gelangen kann; nur darf dabei nicht ausser Acht gelassen werden, dass zwischen den zwei zu verbindenden Systemen niemals ein zu ihnen nicht gehöriges Glas liegen darf.

§. 16. Es haben diese Zusammensetzungen von Systemen einige Aehnlichkeit mit der Art und Weise, nach welcher von einem Systeme gewichtiger Punkte der Schwerpunkt bestimmt wird. Was dort einzelne Punkte sind, sind hier Paare von Punkten, nämlich je zwei zusammengehörige Brennpunkte; den dortigen Gewichten der Punkte entsprechen hier die den Paaren von Brennpunkten zugehörigen Brennweiten, und so wie durch allmähliche Combination der gewichtigen Punkte, in welcher Ordnung sie auch vorgenommen werden mag, man doch immer denselben Schwerpunkt mit demselben Gewicht findet, so gelangt man auch hier bei den verschiedenen möglichen Arten der Verbindung stets zu denselben beiden Brennpunkten und zu derselben Brennweite. Dem Falle, in welchem die Summe der Gewichte, die sowohl negativ als positiv sein können, gleich Null ist, und wo daher der Schwerpunkt unendlich entfernt liegt entspricht ein Fernrohr, indem von einem System von Gläsern, welche ein Fernrohr bilden, die beiden Brennpunkte ebenfalls unendlich entfernt sind. Mit dem noch specielleren Falle endlich, wo zwischen den positiven und den negativen Gewichten Gleichgewicht herrscht, kann ein Fernrohr verglichen werden, dessen Vergrösserungszahl gleich 1 ist, und welches daher nahe

und ferne Gegenstände in ihrer natürlichen Grösse zeigt, indem, eben so wie dort die Wirkungen der Kräfte, so hier die Wirkungen der Gläser sich gegenseitig aufheben.

Ein solches dioptrisches Gleichgewicht findet, wenn auch nicht ganz vollkommen, bei einem System zweier Gläser statt, welche gleiche positive Brennweiten haben und um das Doppelte dieser Brennweite von einander entfernt sind. Denn hier ist das Bild mit dem Object immer von gleicher Grösse, allein verkehrt und dem Auge stets um das Vierfache der Brennweite des einen oder anderen Glases näher, als das Object.

Ein vollkommneres Gleichgewicht, so dass Bild und Object nicht nur gleiche Grösse, sondern auch von dem Auge gleiche Entfernung haben, lässt sich hervorbringen, wenn man zwischen jene zwei Gläser in die Mitte ein drittes setzt, dessen Brennweite vier Mal kürzer als die Brennweite der ersteren ist; oder noch allgemeiner: Werden bei einem System von drei Linsen die Buchstaben a, b, c, d, e, x, y in derselben Bedeutung, wie in §. 14 genommen, so ist der Abstand des Bildes vom Object gleich $x + b + d + y$. Giebt man daher der Gleichung $x = (a, \dots e, y)$ die Form (16*) des §. 5) und setzt darin, weil das Bild mit dem Object immer zusammenfallen soll,

$$y = -(b + d + x)\ ,$$

so kommt eine nach x quadratische Gleichung, aus der, weil sie für jeden Werth von x bestehen muss, die drei Bedingungsgleichungen hervorgehen:

$$[a, \dots e] = 0\ , \quad [a, \dots d] - [b, \dots e] = 0\ , \quad [b, \dots e](b + d) + [b, \dots d] = 0\ ,$$

welche sich vermöge der Relation (15) auf:

$$[a, \dots d] = [b, \dots e] = \pm 1\ , \quad b + d \pm [b, \dots d] = 0$$

reduciren. Nimmt man darin die unteren Vorzeichen, indem die oberen, wie man leicht findet, auf ein System von drei Plangläsern führen, so erhält man, nach weiterer Entwickelung, die Brennweiten der drei Gläser durch ihre Entfernungen von einander ausgedrückt:

$$\frac{1}{a} = \frac{b(b + d)}{2d}\ , \quad \frac{1}{c} = \frac{bd}{2(b + d)}\ , \quad \frac{1}{e} = \frac{d(b + d)}{2b}\ ,$$

wodurch man, wenn die Entfernungen b und d gegeben sind, die Brennweiten $\frac{1}{a}$, u. s. w. finden kann. Eliminirt man b und d, so ergiebt sich zwischen den Brennweiten allein die nicht uninteressante Relation:

$$\frac{1}{\sqrt{ae}} = \frac{1}{\sqrt{ac}} + \frac{1}{\sqrt{ce}} .$$

Dieses System von Gläsern ist, weil vermöge der Relation $x + b + d + y = 0$ für $x = \infty$ auch $y = \infty$ wird, ein Fernrohr, wie auch die Gleichung $[a, \ldots e] = 0$ zu erkennen giebt (*H.-E.* §. 11). Das Verhältniss zwischen den Durchmessern des Objects und des Bildes ist bei einem aus den Elementen $a, \ldots e$ construirten Fernrohr

$$= -[b, \ldots e] : -1$$

(*H.-E.* §. 13), also bei gegenwärtigem $= 1 : -1$, d. h. das Bild ist mit dem Object von gleicher Grösse, aber verkehrt.

Sollen die Wirkungen der Gläser sich vollkommen aufheben, so dass das Bild mit dem Objecte stets nicht nur von gleicher Grösse und in gleicher Entfernung vom Auge, sondern auch in derselben Lage wie das Object erscheint, so werden, wenn anders keine der gegenseitigen Entfernungen der Gläser gleich Null sein soll, zum wenigsten vier Gläser erfordert.

§. 17. Auch der (in *H.-E.* §. 9 erwiesene) allgemeine Satz, *dass bei einem System von Gläsern, welche kein Fernrohr bilden, die Durchmesser von Object und Bild sich wie die Quadratwurzeln aus den Entfernungen des Objects und Bildes von ihren Brennpunkten verhalten*, lässt sich mittelst des vorhin Entwickelten sehr einfach darthun.

Für ein einziges Glas fliesst er leicht aus den Grundformeln der Dioptrik (*H.-E.* §. 8). Sind also, wie vorhin, F, G und F', G' die Brennpunkte zweier Gläser, x, y, z die resp. Durchmesser des Objects in X, des vom ersten Glase in Y, und des von beiden zugleich in Z gemachten Bildes, so hat man:

$$x : y = \sqrt{XF} : \sqrt{GY} , \quad y : z = \sqrt{YF'} : \sqrt{G'Z} ,$$

folglich:

$$x : z = \sqrt{XF . YF'} : \sqrt{GY . G'Z} . \qquad (i$$

Sind aber F'', G'' die Brennpunkte des von den zwei Gläsern gebildeten Systems, so verhält sich zufolge (e) und (f) in §. 15:

$$XF : GF' := XF'' : YF' , \quad \text{und} \quad GF' : G'Z = GY : G''Z ,$$

mithin

$$XF : G'Z = XF'' . GY : YF' . G''Z ,$$

und

$$x : z = \sqrt{XF''} : \sqrt{G''Z} . \qquad k)$$

Unser Satz ist daher auch für ein System von zwei Gläsern richtig, folglich auch für ein System von drei, vier, u. s. w. Gläsern, wenn man F, G nach und nach als die Brennpunkte eines Systems von zwei, drei, u. s. w. Gläsern nimmt.

§. 18. Sollen zwei Systeme von Gläsern, welche durch F, G, γ und F', G', γ' bestimmt werden, ein Fernrohr bilden, so muss, wenn das Object (Bild) unendlich entfernt ist, der Ort G'' (F'') des Bildes (Objects) ebenfalls unendlich enfernt sein. Die Brennpunkte F'', G'' eines Fernrohrs sind also zwei unendlich entfernte Punkte und daher, vermöge (c) oder (d), $GF' = 0$, d. h.:

Von zwei Systemen, welche in ihrer Vereinigung ein Fernrohr ausmachen, fällt des Bildes Brennpunkt beim ersten System mit dem Brennpunkte des Objects beim zweiten System zusammen.

Hiermit wird

$$YF' = YG = -GY ,$$

und daher zufolge der Gleichungen (a) und (b):

$$XF : ZG' = \gamma^2 : \gamma'^2 ,$$

also auch, wenn X', Z' zwei andere zusammengehörige Oerter von Object und Bild sind:

$$XX' : ZZ' = \gamma^2 : \gamma'^2 .$$

Die Proportion (i) aber wird:

$$x : z = \sqrt{XF} : \sqrt{ZG'} = \pm \gamma : \gamma' .$$

Wir folgern hieraus die (in *H.-E.* §. 13 bewiesenen) Sätze:

Beim Fernrohr ist das Verhältniss $\gamma' : \gamma$ zwischen den wahren nicht scheinbaren *Durchmessern des Bildes und Objects, so wie das Verhältniss $\gamma'^2 : \gamma^2$ zwischen den Geschwindigkeiten beider, wenn das Object längs der Axe bewegt wird, von constanter Grösse, und zwar ist letzteres Verhältniss dem Quadrate des ersteren gleich.*

Das Verhältniss zwischen den scheinbaren Durchmessern von Bild und Object ist zusammengesetzt aus dem Verhältniss der wahren Durchmesser und dem umgekehrten Verhältniss ihrer Entfernungen vom Auge, und daher die Vergrösserung des Fernrohrs, oder das Verhältniss der scheinbaren Durchmesser von Bild und Object in dem Falle, wenn beide unendlich entfernt sind, und wo daher die Entfernungen der Punkte F, G' vom Auge gegen die Entfernungen der Punkte X und Z verschwinden:

$$= (\gamma' : \gamma) : (\gamma'^2 : \gamma^2) = \gamma : \gamma' .$$

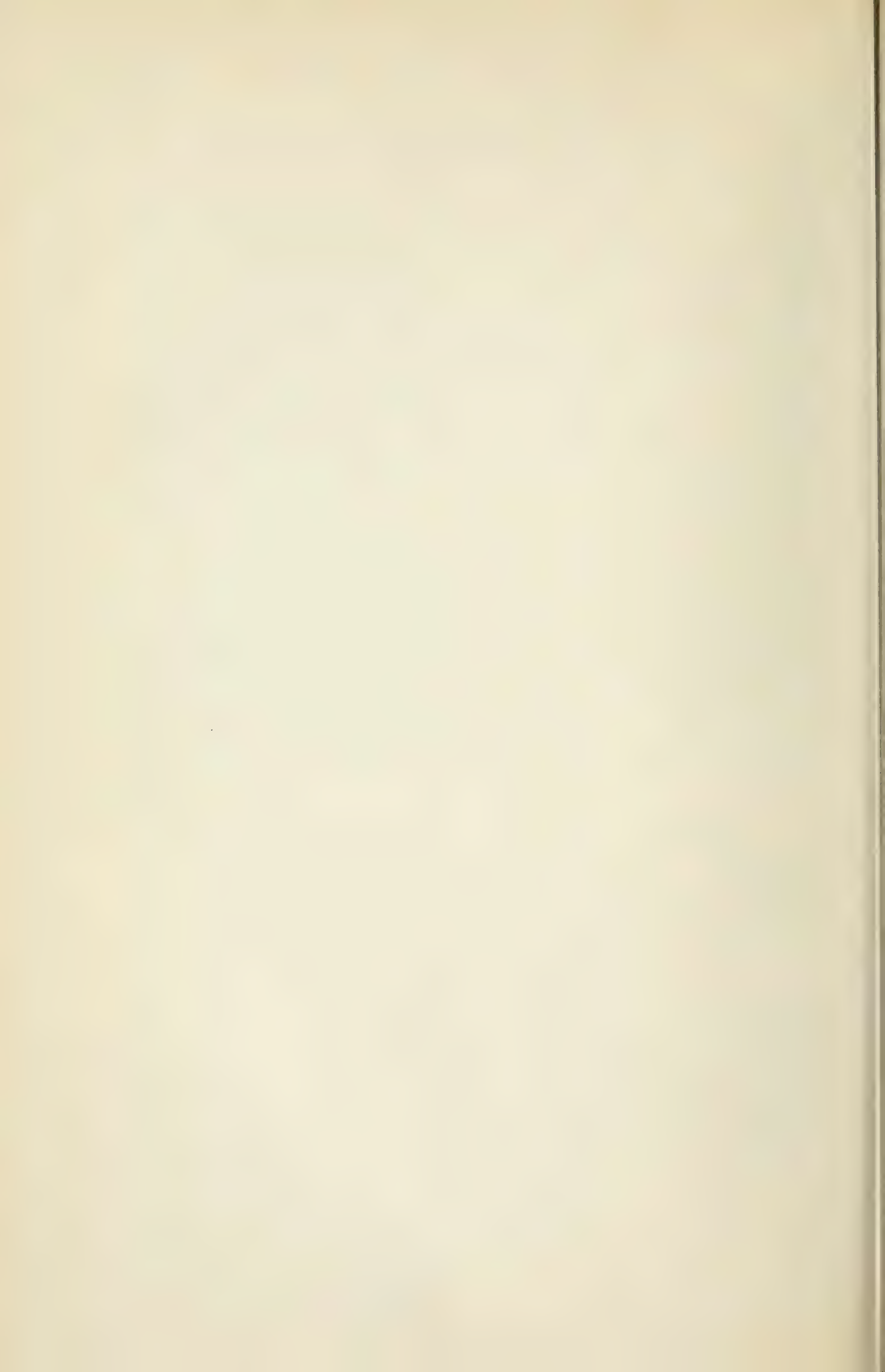
Die Vergrösserung eines Fernrohrs ist daher dem umgekehrten Verhältniss der wahren Durchmesser von Bild und Object gleich.

Zusätze: *a*) *Denkt man sich ein System von Gläsern, welche ein Fernrohr bilden, in zwei Systeme zerlegt* (welches auf $n - 1$ Arten geschehen kann, wenn das Fernrohr aus n Gläsern besteht), *so fällt immer des Bildes Brennpunkt beim ersten System mit dem Brennpunkte des Objects beim zweiten zusammen, und immer ist die Brennweite des ersten Systems, dividirt durch die Brennweite des zweiten, der Vergrösserung gleich*: — zwei Eigenschaften, ganz denen analog, welche man schon längst bei einem nur aus zwei Gläsern bestehenden Fernrohr kannte. Es wird also auch bei einem Fernrohr mit zwei oder mehreren Oculargläsern die Vergrösserung gefunden, wenn man die Brennweite des Objectivs durch die Brennweite des Systems der Oculare dividirt.

b) Ist die Vergrösserung eines Fernrohrs der Einheit gleich, so ist

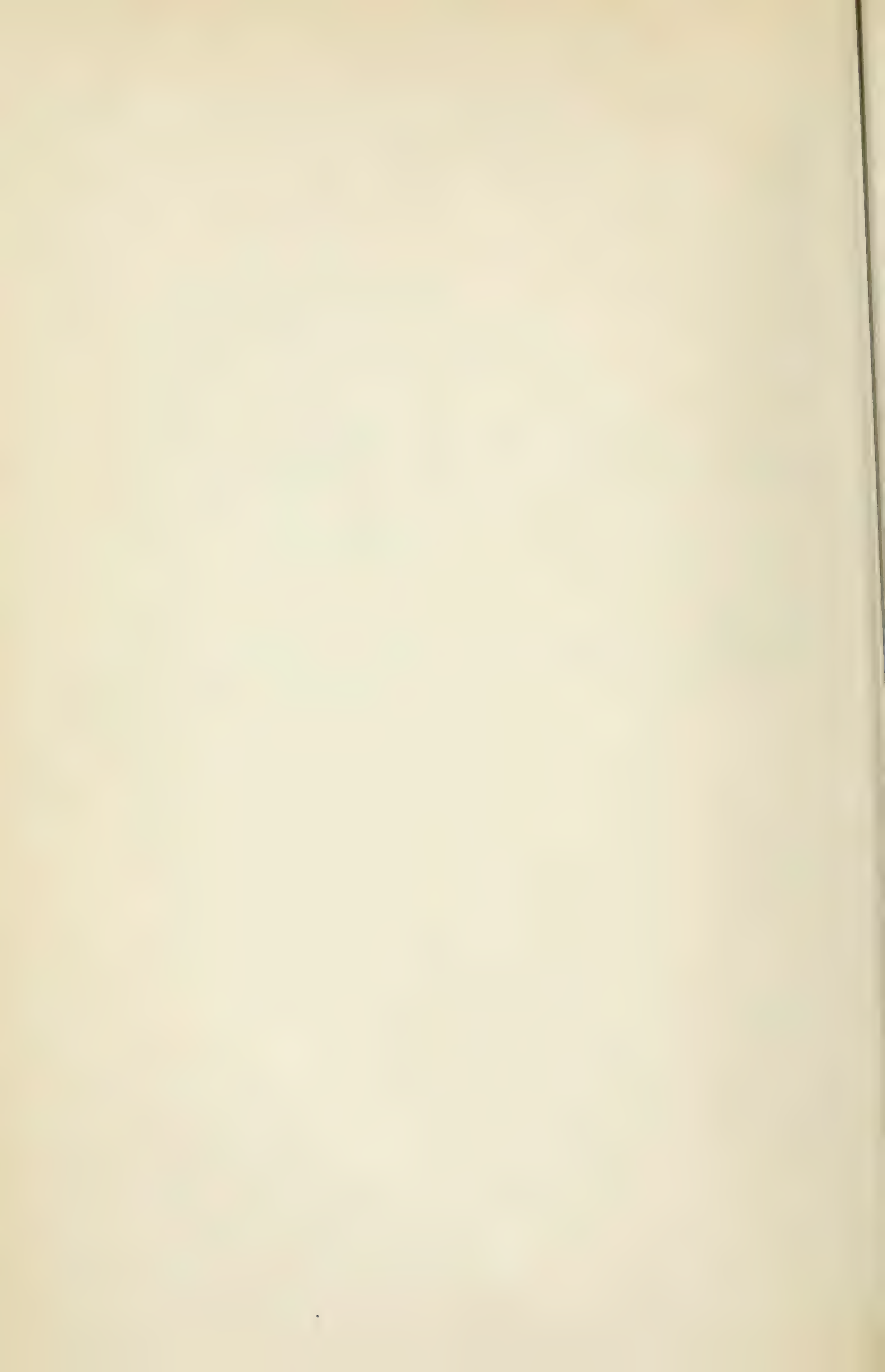
$$\gamma = \gamma' \,, \quad \text{also} \quad x = z \quad \text{und} \quad XF = ZG' \,,$$

d. h. das Bild ist mit dem Object immer von gleicher Grösse und von ihm stets um einen Abstand $= FG'$ entfernt. Soll daher überdies das Bild mit dem Object immer zusammenfallen, so muss $FG' = 0$ sein. Wird demnach ein solches Fernrohr (vergl. §. 16) in zwei Systeme zerlegt, so haben diese immer einander gleiche Brennweiten, und die Brennpunkte des einen Systems coincidiren mit den ungleichnamigen des anderen, F' mit G und G' mit F.



Entwickelung der Lehre von dioptrischen Bildern mit Hülfe der Collineationsverwandtschaft.

[Berichte der K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-phys. Classe, Bd. 7, S. 8—32, Sitzung vom 10. Februar 1855.]



Im Jahre 1830 habe ich in einer im 5. Bande des Crelle'schen *Journals für Mathematik* veröffentlichten Abhandlung die Haupteigenschaften eines Systems von Linsengläsern mit Anwendung von Kettenbrüchen entwickelt, und hierzu am Schlusse einer im 6. Bande desselben Journals erschienenen Abhandlung, die mehrere aus jenen dioptrischen Sätzen umgekehrt gefolgerte Eigenschaften und Transformationen der Kettenbrüche enthält, einen Nachtrag geliefert.

Wie ich mich aber in letzterer Zeit überzeugt habe, lassen sich die Haupteigenschaften eines Linsensystems und die Lehre von dioptrischen Bildern überhaupt, statt mit Anwendung von Kettenbrüchen, weit einfacher auf rein geometrischem Wege mittelst der Theorie der Collineationsverwandtschaft ableiten. Dieses zu zeigen ist der Zweck des vorliegenden Aufsatzes. Ich bin darin bis zu dem Brechungsgesetze selbst zurückgegangen, indem sich dieses also umgestalten lässt, dass aus seiner neuen Form nicht nur der Hauptsatz von dioptrischen Bildern als unmittelbare Folge entspringt, sondern auch die zwischen einer Reihe von Objecten und der zugehörigen Reihe von Bildern stattfindende collineare Verwandtschaft und der Nutzen augenfällig wird, der den dioptrischen Grundlehren überhaupt aus dieser Verwandtschaft erwachsen dürfte.

Uebrigens habe ich im Vorliegenden den Gegenstand ungleich allgemeiner, als in jenen früheren Arbeiten, behandelt. Denn während ich dort bloss Linsensysteme in Untersuchung nahm und die Dicken der Linsen verschwindend klein setzte, habe ich hier zuerst die Entstehung der Bilder aus einer Reihe von Objecten bei einem System in kugelförmigen Flächen an einander grenzender Mittel überhaupt betrachtet, und bin dann erst zu dem specielleren Falle, in welchem die Mittel abwechselnd Luft und Glas sind, d. i. zu einem Systeme von Linsengläsern von beliebiger Dicke, übergegangen. Die bei meinen früheren Untersuchungen erhaltenen Resultate sind durch

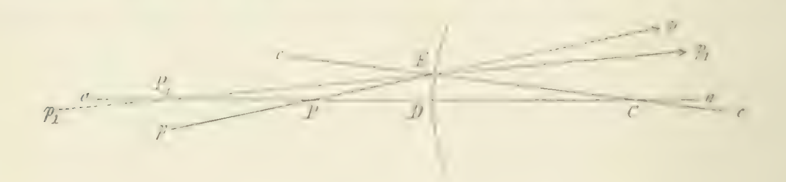
diese allgemeinere Auffassung der Sache im Ganzen nicht geändert worden, was sich auch schon aus den im Jahre 1841 von Gauss (*Dioptrische Untersuchungen*) und Bessel (*Astron. Nachr.* 18. Bd. S. 97) über denselben Gegenstand erschienenen trefflichen Arbeiten vorhersehen liess.

---

§. 1. Beim Uebergange eines Lichtstrahls aus einem durchsichtigen Mittel in ein anderes heisse p der einfallende Strahl, E der Einfallspunkt, c das Einfallsloth, p_1 der gebrochene Strahl, so liegen die drei sich in E schneidenden Geraden c, p, p_1 in einer Ebene, der Brechungsebene, und es ist nach beliebiger Annahme des positiven Sinnes der Drehung in dieser Ebene und der positiven Richtung von c, wenn nur die positiven Richtungen von p und p_1 übereinstimmend mit der Richtung des Lichts (oder beide ihr entgegengesetzt) genommen werden, und wenn $m:1$ das Brechungsverhältniss bezeichnet:

$$\text{(1)} \qquad \sin pc : \sin p_1 c = m : 1 .$$

Werde noch in der Brechungsebene willkürlich eine nicht durch E gehende Gerade a gezogen, welche die c, p, p_1 resp. in C, P, P_1



schneide, so sind in dem Dreiecke, welches die Geraden

p, a, c bilden, die gegenüberstehenden Ecken C, E, P,

p_1, a, c - - - - - - C, E, P_1.

und es ist daher, nach willkürlicher Annahme der positiven Richtung von a, auch den Zeichen nach

$$\frac{\sin pc}{\sin ca} = \frac{CP}{PE} \quad \text{und} \quad \frac{\sin p_1 c}{\sin ca} = \frac{CP_1}{P_1 E} ,$$

woraus in Verbindung mit (1)

$$\text{(2)} \qquad \frac{CP}{PE} : \frac{CP_1}{P_1 E} = m : 1$$

folgt, — eine Proportion, welche, eben so wie (1), als Ausdruck des Brechungsgesetzes angesehen werden kann.*)

§. 2. Ziehen wir nun lediglich den Fall in Betracht, wenn $\sin pc$, mithin auch $\sin p_1 c$, sehr klein ist, legen die willkürliche Gerade a so, dass auch $\sin ca$ sehr klein wird, und nehmen, wie es dann am natürlichsten ist, die positiven Richtungen von a und c also an, dass sie mit der Richtung des Lichtes selbst, nicht mit der entgegengesetzten Richtung, sehr nahe übereinstimmen, so sind, wenn der Fusspunkt des von E auf a gefällten Perpendikels D heisst, die Linien PE, P_1E, CE von resp. PD, P_1D, CD nur um Grössen der zweiten Ordnung verschieden, und man kann mit Vernachlässigung derselben, statt (2)

$$\frac{CP}{PD} : \frac{CP_1}{P_1D} = m : 1 \tag{3}$$

schreiben.

§. 3. Die Proportion (3) wird uns als Basis zu allen folgenden Untersuchungen dienen. Zunächst fliesst aus ihr, dass mit den Punkten P, C, D der Geraden a auch der Punkt P_1 derselben gegeben ist, und dass daher, so lange erstere drei ihre Oerter behalten, auch letzterer an seinem Orte bleibt. Alle durch P gehenden und mit a sehr kleine Winkel bildenden Strahlen werden folglich nach ihrer Brechung die Gerade a in P_1 treffen, dafern nur für jeden dieser Strahlen das Einfallsloth durch C geht, und der Abstand des Einfallspunktes von C stets gleich $CE = CD$ ist, dafern also die Normale jedes Flächenelements, an welchem ein Strahl gebrochen wird, den Punkt C trifft, und jedes dieser Elemente von C um CD entfernt ist, d. h. dafern alle diese Elemente einer Kugelfläche angehören, deren Mittelpunkt C, und deren Halbmesser CD ist.

Beim Uebergange des Lichtes aus einem durchsichtigen Mittel in ein anderes wird demnach, wenn die gemeinsame Grenze beider Mittel ein Stück einer Kugelfläche ist, ein Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt P, und dessen Strahlen auf die Grenzfläche sehr nahe perpendikular fallen, in einen anderen Büschel verwandelt, dessen Mittelpunkt P_1 mit P und mit dem Mittelpunkte C der Kugel in einer Geraden und zwar

*) Legt man die Gerade a in der Brechungsebene parallel mit c, so rückt C in die Unendlichkeit, das Verhältniss $CP : CP_1$ wird $= 1 : 1$, und (2) reducirt sich auf

$$P_1E : PE = m : 1 ,$$

welches die von Snellius für das Brechungsgesetz gefundene Form ist.

nach (3) *also liegt, dass, wenn diese Gerade die Grenzfläche in D trifft, das Verhältniss zwischen den Verhältnissen, nach welchen der Abschnitt CD das eine Mal in P, das andere Mal in* P_1 *getheilt wird, dem Brechungsverhältnisse gleich ist.*

§. 4. Wie es in der Dioptrik gewöhnlich ist, wollen wir den Mittelpunkt des Büschels der einfallenden Strahlen Object, und den Mittelpunkt des Büschels der gebrochenen Strahlen Bild nennen. Hiernach und mit Beibehaltung der vorhin gemachten Voraussetzungen und Bezeichnungen, seien $P, Q, R, \ldots$ mehrere Objecte, welche mit C in einer Geraden a liegen, so liegen in a auch die Bilder $P_1, Q_1, R_1, \ldots$ der ersteren, und es verhält sich

$$\frac{CP}{PD}:\frac{CP_1}{P_1D}=\frac{CQ}{QD}:\frac{CQ_1}{Q_1D}=\frac{CR}{RD}:\frac{CR_1}{R_1D}=\text{etc.}=m:1,$$

folglich auch

$$\frac{CP}{PD}:\frac{CQ}{QD}=\frac{CP_1}{P_1D}:\frac{CQ_1}{Q_1D},\quad \frac{CP}{PD}:\frac{CR}{RD}=\frac{CP_1}{P_1D}:\frac{CR_1}{R_1D},\ \text{etc.}$$

Das Verhältniss zwischen den Verhältnissen, nach denen CD das einemal in P_1, das anderemal in Q_1 geschnitten wird, oder, wie wir der Kürze halber sagen wollen, das Doppelverhältniss zwischen C, D, P_1, Q_1, ist hiernach dem Doppelverhältnisse zwischen C, D, P, Q gleich, das Doppelverhältniss zwischen C, D, P_1, R_1 dem zwischen C, D, P, R, u. s. w.; oder noch kürzer: die Doppelverhältnisse, welche die drei Punkte C, D, P_1 der Reihe nach mit $Q_1, R_1, \ldots$ bilden, sind resp. den Doppelverhältnissen von C, D, P mit $R, Q, \ldots$ gleich.

§. 5. Es ist bekannt, dass von vier in einer Ebene liegenden und sich in einem Punkte schneidenden Geraden jede andere Gerade der Ebene nach einem und demselben Doppelverhältnisse geschnitten wird, so dass, wenn von den vier ersteren Geraden eine fünfte in F, G, H, I und eine sechste resp. in F_1, G_1, H_1, I_1 geschnitten wird, sich

$$\frac{FH}{HG}:\frac{FI}{IG}=\frac{F_1H_1}{H_1G_1}:\frac{F_1I_1}{I_1G_1}$$

verhält.

Eben so bekannt ist auch die Umkehrung dieses Satzes, dass nämlich, wenn zwischen vier Punkten $F, \ldots I$ einer Geraden und vier Punkten $F_1, \ldots I_1$ einer anderen Geraden die eben bemerkte Proportion besteht, und man die zwei Geraden in eine solche Lage gegen

einander bringt, dass zwei gleichnamige Punkte, etwa F und F_1, zusammenfallen, — dass dann die Geraden GG_1, HH_1, II_1, welche die drei übrigen Paare gleichnamiger Punkte verbinden, sich stets in einem Punkte schneiden.

Hat man daher ein System von n Punkten F, G, H, I, K, ... in einer Geraden, und entsprechen ihnen die gleichfalls in einer Geraden liegenden n Punkte F_1, G_1, H_1, I_1, K_1, ... dergestalt, dass die $n - 3$ Doppelverhältnisse gewisser drei Punkte F, G, H des einen Systems mit jedem der $n - 3$ übrigen Punkte I, K, ... des Systems, den Doppelverhältnissen zwischen den entsprechenden Punkten des anderen Systems der Reihe nach gleich sind: so werden nach letzterem Satze bei solch' einer gegenseitigen Lage der beiden Geraden, bei welcher zwei einander entsprechende Punkte, wie F und F_1, zusammenfallen, alle die Geraden GG_1, HH_1, II_1, KK_1, ... sich in einem Punkte schneiden; woraus wir mit Anwendung des ersteren Satzes weiter folgern, dass unter den gemachten Voraussetzungen auch jedes andere Doppelverhältniss zwischen vier Punkten des einen Systems, dem Doppelverhältnisse zwischen den entsprechenden Punkten des anderen, z. B. das zwischen K, H, I, G dem zwischen K_1, H_1, I_1, G_1 gleich ist.

Die gemachten Voraussetzungen haben aber bei den zwei Systemen

$$C, D, P, Q, R, \dots \quad \text{und} \quad C, D, P_1, Q_1, R_1, \dots$$

des vorigen Paragraphen statt; mithin werden z. B. die Doppelverhältnisse zwischen D, P_1, Q_1, R_1, zwischen R_1, Q_1, P_1, S_1, etc. resp. den Doppelverhältnissen zwischen D, P, Q, R, zwischen R, Q, P, S, etc. gleich sein.

§. 6. Zwei Systeme von Punkten, deren jedes in einer Geraden enthalten ist, heissen einander c o l l i n e a r v e r w a n d t, wenn jedes Doppelverhältniss des einen Systems dem Doppelverhältnisse zwischen den entsprechenden Punkten des anderen gleich ist.

Nach dem eben Erwiesenen stehen daher diese zwei Systeme C, D, P, Q, R, ... und C, D, P_1, Q_1, R_1, ... in dieser Verwandtschaft; d. h.

Ist von zwei an einander stossenden durchsichtigen Mitteln die gemeinsame Grenze ein Stück einer Kugelfläche, so ist von einer Reihe von Objecten, welche mit dem Mittelpunkte C der Kugelfläche in einer Geraden a liegen, die Reihe der Bilder ebenfalls in a enthalten und mit der Reihe der Objecte collinear verwandt. Dabei sind C und der Punkt D, in welchem die Grenzfläche von a getroffen wird, sich selbst

entsprechende Punkte, so dass von einem in C oder in D befindlichen Objecte das Bild gleichfalls in C oder in D ist.

§. 7. Denken wir uns jetzt auf das zweite durchsichtige Mittel unmittelbar ein drittes, auf dieses eben so ein viertes, u. s. w. folgend; die gemeinsame Grenze des zweiten und dritten, die des dritten und vierten, u. s. w. seien eben so, wie die des ersten und zweiten, Stücke von Kugelflächen, und die Mittelpunkte aller dieser Kugelflächen sollen in der Geraden a liegen, die deshalb die Axe der Mittel genannt werde. Beim Fortgange des Lichts aus dem zweiten Mittel in das dritte vertreten nun die vorigen Bilder $P_1, Q_1, R_1, \ldots$ die Stelle von Objecten, und es entsteht eine Reihe von Bildern $P_2, Q_2, R_2, \ldots$, die, weil $P_1, Q_1, \ldots$ und der Mittelpunkt der zweiten Kugelfläche in a begriffen sind, ebenfalls in a liegen und mit der Reihe $P_1, Q_1, \ldots$ collinear verwandt sein wird. Aus der vorhin gegebenen Definition der Collineationsverwandtschaft zwischen zwei geradlinigen Systemen von Punkten erhellet aber ohne Weiteres, dass zwei solcher Systeme, deren jedes einem und demselben dritten collinear ist, einander selbst collinear sind; und es wird folglich auch die Bilderreihe $P_2, Q_2, R_2, \ldots$ der Reihe von Objecten $P, Q, R, \ldots$ collinear sein.

Analoges gilt für den Eintritt des Lichts in jedes der folgenden Mittel, und wir schliessen hiernach:

Alle die Reihen von Bildern, welche aus einer Reihe in der Axe enthaltener Objecte durch den successiven Uebergang des Lichts aus dem ersten in die folgenden Mittel erzeugt werden, liegen gleichfalls in der Axe und sind mit einander und mit der Reihe der Objecte collinear verwandt.

§. 8. In Bezug auf die Reihe von Objecten und irgend eine der darauf folgenden Bilderreihen heisse der Punkt der Axe, in welchem ein Object sich befinden muss, wenn sein Bild unendlich entfernt liegen soll, der Brennpunkt der Objecte, und der Ort des Bildes von einem in der Axe unendlich entfernten Objecte der Brennpunkt der Bilder. Bezeichnen wir den ersteren Brennpunkt mit F, den letzteren mit G, den unendlich entfernten Punkt der Axe mit U, und sind von irgend zwei anderen in der Axe liegenden Punkten P und Q, als Objecten, die Bilder in P_1 und Q_1, so sind P und P_1, Q und Q_1, F und U, U und G vier Paare einander entsprechender Punkte beider Reihen, und es muss sich wegen der Collineationsverwandtschaft der Reihen und nach der in §. 6 gegebenen Definition dieser Verwandtschaft

$$\frac{PF}{FQ} : \frac{PU}{UQ} = \frac{P_1 U}{UQ_1} : \frac{P_1 G}{GQ_1}$$

verhalten. Wegen der unendlichen Entfernung des Punktes U ist aber

$$\frac{PU}{UQ} = -1 \quad \text{und} \quad \frac{P_1 U}{UQ_1} = -1 \,,$$

folglich

$$FQ \,.\, GQ_1 = PF \,.\, P_1 G = FP \,.\, GP_1 \,.$$

Das Product aus dem Abstande eines Objects P vom Brennpunkte F der Objecte in den Abstand seines Bildes P_1 vom Brennpunkte G der Bilder ist demnach von einem Objecte P zum anderen Q von constanter Grösse.

Werde diese Grösse, die, wie die Folge lehren wird, stets negativ ist, mit $-f^2$ bezeichnet, und f^2 das Quadrat der Brennweite genannt. Wir haben hiernach die Gleichung

$$PF \,.\, GP_1 = f^2 \,. \tag{4}$$

wodurch, wenn in Bezug auf die Reihe der Objecte und irgend eine der Bilderreihen die beiden Brennpunkte und das Quadrat der Brennweite, oder die drei Elemente des Reihenpaares, wie wir diese drei Stücke im Folgenden nennen wollen, gegeben sind, für jeden Ort P eines Objects in der Axe der Ort P_1 seines Bildes gefunden werden kann.

Auch gilt dieselbe Gleichung in Bezug auf irgend zwei Bilderreihen, indem sich die Bilder der früheren Reihe als die Objecte für die Bilder der späteren betrachten lassen.

§. 9. Bei nur einmaliger Brechung, d. i. für zwei unmittelbar auf einander folgende Reihen, ist die Bestimmung ihrer drei Elemente sehr einfach. Denn die alsdann statthabende Proportion (3) wird, wenn wir darin für P und P_1 das eine Mal F und U, das andere Mal U und G setzen, und weil

$$CU : UD = -1$$

ist:

$$\frac{CF}{FD} = -m \quad \text{und} \quad \frac{GD}{CG} = -m \,,$$

mithin

$$\frac{CD}{FD} = \frac{CF + FD}{FD} = 1 - m \quad \text{und} \quad \frac{CD}{CG} = \frac{CG + GD}{CG} = 1 - m \,.$$

folglich

(5) $$FD = -\frac{1}{m-1} \cdot CD\,, \quad GD = \frac{m}{m-1} \cdot CD\,,$$

wodurch die Lage der beiden Brennpunkte gegen D, und

(6) $$CF = \frac{m}{m-1} \cdot CD\,, \qquad CG = -\frac{1}{m-1} \cdot CD\,,$$

wodurch die Lage derselben gegen C bestimmt wird.

Auch folgen hieraus noch

(7) $$FD = CG \quad \text{und} \quad CF = GD\,,$$

zwei identische Gleichungen, indem jede derselben ausdrückt, dass die zwei Abschnitte FG und DC einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben. Uebrigens ist, wie man leicht findet, das Verhältniss dieser Abschnitte

(8) $$FG : DC = m + 1 : m - 1\,.$$

Weil endlich in C, so wie in D, Object und Bild zusammenfallen (§. 6), so ist nach (4)

$$CF \,.\, GC = f^2\,,$$

und wenn man hierin für CF und GC, oder $-CG$, ihre Werthe aus (6) substituirt:

(9) $$f^2 = \frac{m}{(m-1)^2}\, CD^2\,,$$

wodurch das Quadrat der Brennweite gefunden ist.

§. 10. Hat man auf solche Weise für je zwei nächstfolgende Reihen die drei Elemente bestimmt, so kann man für irgend einen Punkt P der Axe als Object, die successiven Bilder P_1, P_2, ... desselben successive durch die Gleichungen

(10) $$PF_1 \,.\, G_1 P_1 = f_1^2\,,$$

(11) $$P_1 F_2 \,.\, G_2 P_2 = f_2^2\,, \quad P_2 F_3 \,.\, G_3 P_3 = f_3^2\,,$$

u. s. w. finden, worin, wenn jetzt und im Folgenden um der Kürze willen die Reihe von Objecten mit ϱ, die erste Bilderreihe mit ϱ_1, die zweite mit ϱ_2, u. s. w. bezeichnet wird, F_1, G_1, f_1^2 die drei Elemente in Bezug auf die Reihen ϱ und ϱ_1; F_2, G_2, f_2^2 die drei Elemente in Bezug auf ϱ_1 und ϱ_2; u. s. w. bedeuten.

In dem Falle, wenn von einer grösseren Anzahl von Objecten die Bilder einer späteren Reihe, als der ersten, es sei zunächst von ϱ_2, gefunden werden sollen, wird es vortheilhafter sein, vorher in Bezug auf die Reihe von Objecten und die spätere Bilderreihe (ϱ_2) die drei Elemente, welche man F, G, f^2 setze, zu ermitteln. Denn alsdann wird von jedem Objecte P sein zweites Bild P_2 unmittelbar durch die Gleichung

$$PF \,.\, GP_2 = f^2 \tag{12}$$

erhalten. Die drei neuen Elemente F, G, f^2 aber ergeben sich aus den als berechnet vorausgesetzten früheren F_1, G_1. f_1^2 und F_2, G_2, f_2^2 durch folgende einfache Betrachtung.

Angenommen, dass P_2 unendlich entfernt liegt, coincidirt P wegen (12) mit F, und P_1 wegen (11) mit F_2. Es sind folglich F und F_2 zwei zusammengehörige Oerter von P und P_1, und daher wegen (10):

$$FF_1 \,.\, G_1 F_2 = f_1^2 \,. \tag{13}$$

Eben so erhellet aus (10) und (12), indem man P unendlich entfernt sein lässt, dass G_1 und G zwei zusammengehörige Oerter von P_1 und P_2 sind, und dass mithin wegen (11)

$$G_1 F_2 \,.\, G_2 G = f_2^2 \tag{14}$$

ist.

Liegt ferner P_1 unendlich entfernt, so coincidiren P mit F_1 und P_2 mit G_2, wie man aus (10) und (11) ersieht, und es ist folglich wegen (12)

$$F_1 F \,.\, G G_2 = f^2 \,. \tag{15}$$

Endlich fliesst aus (13), (14) und (15) in Verbindung

$$(G_1 F_2)^2 \,.\, f^2 = f_1^2 f_2^2 \,. \tag{16}$$

Hiermit aber ist unsere Aufgabe gelöst; denn mittelst (13), (14) und (16) werden die gesuchten Elemente F, G und f^2 für ϱ und ϱ_2 aus den als gegeben angenommenen Elementen für ϱ und ϱ_1 und für ϱ_1 und ϱ_2 bestimmt.

Auf ähnliche Art lassen sich nun auch die Elemente für ϱ in Verbindung mit ϱ_3, oder ϱ_4, etc. finden. Denn die Gleichungen (10), (11), (12), von welchen wir bei der vorigen Betrachtung ausgingen, sind zufolge des über die Gleichung (4) Bemerkten auch dann noch gültig, wenn P, P_1, P_2 zu irgend drei verschiedenen Reihen gehören, und zwar P_1, als Bild von P, zu einer späteren als P, und P_2, als Bild von P_1, zu einer noch späteren, und wenn dem-

gemäss die Elemente F_1, G_1, f_1^2 auf die erste und zweite dieser drei Reihen, die Elemente F_2, G_2, f_2^2 auf die zweite und dritte, und die Elemente F, G, f^2 auf die erste und dritte bezogen werden. Hiernach wird man mit Hülfe derselben Gleichungen (13), (14) und (16), nur unter veränderter Bedeutung ihrer Buchstaben, aus den vorhin bestimmten Elementen für ϱ und ϱ_2, und aus den als berechnet vorausgesetzten Elementen für ϱ_2 und ϱ_3 die Elemente für ϱ und ϱ_3, u. s. w. bestimmen können.

Zusätze. *a*) Dass, wenn F, G die beiden Brennpunkte irgend eines Reihenpaars bezeichnen, das von einem Paare zusammengehöriger Punkte P, P_1 der beiden Reihen zum anderen constante Product $PF \cdot GP_1$ stets, wie schon in §. 8 vorläufig bemerkt wurde, einen positiven und daher durch ein Quadrat f^2 auszudrückenden Werth hat, dies fliesst, wenn die zwei Reihen unmittelbar auf einander folgen, aus (9), weil das Brechungsverhältniss $m : 1$ stets positiv ist. Bei zwei nicht unmittelbar auf einander folgenden Reihen erhellet dasselbe aus (16), indem man darin f_1 zunächst auf die n-te und die $(n + 1)$-ste Reihe, f_2 auf die $(n + 1)$-ste und die $(n + 2)$-te, also f auf die n-te und die $(n + 2)$-te; sodann f_1 auf die n-te und die $(n + 2)$-te Reihe, u. s. w. bezieht.

Uebrigens kann man aus dem positiven constanten Werthe von $PF \cdot GP_1$ noch schliessen:

Dass, wenn das Object, und damit auch jedes seiner Bilder, wie P_1, in der Axe sich fortbewegt, alle diese Bewegungen nach einerlei Richtung erfolgen, und dass sich die Geschwindigkeiten je zweier dieser Punkte (P und P_1) wie die Abstände (PF und GP_1) dieser letzteren von den Brennpunkten des Reihenpaares verhalten, welchem sie zugehören.

b) Bei vier oder mehreren auf einander folgenden Reihen kann man aus den Elementen für je zwei nächstfolgende Reihen die Elemente für die erste und die letzte Reihe immer auf verschiedene Arten finden. Ist nämlich die Anzahl der Reihen gleich $n + 1$, so berechne man nach dem Vorigen aus den zwei Ternionen von Elementen für irgend drei nächstfolgende Reihen die drei Elemente in Bezug auf die erste und die dritte dieser Reihen. Hierdurch wird die zweite derselben eliminirt, und man hat nunmehr ein System von nur n Reihen, in welchem ebenfalls für je zwei nächstfolgende Reihen die Elemente bekannt sind. Dieses System kann man auf gleiche Weise durch Elimination einer der n Reihen, die erste und die letzte ausgenommen, auf ein System von $n - 1$ Reihen, dieses auf ein System von $n - 2$ Reihen, u. s. w. reduciren, bis nach $n - 1$

solchen Operationen die Elemente in Bezug auf die erste und die letzte Reihe hervorgehen.*)

§. 11. Die im vorigen Artikel behandelte Aufgabe: aus den Elementen für je zwei nächstfolgende Reihen die Elemente F, G, f^2 für die erste und die letzte aller Reihen zu finden, lässt sich auch leicht mit Hülfe von Kettenbrüchen lösen. Setzt man nämlich die als bekannt anzusehenden Abschnitte der Axe

$$G_1F_2 = g_1\,, \quad G_2F_3 = g_2\,, \quad \text{etc.}\,, \tag{17}$$

so ist auch

$$G_1P_1 + P_1F_2 = g_1\,, \quad G_2P_2 + P_2F_3 = g_2\,, \quad \text{etc.}$$

und es kommt, wenn man mittelst dieser Gleichungen und der Gleichungen (10), (11), etc. nach und nach G_1P_1, P_1F_2, P_2G_2, P_2F_3, etc. eliminirt und sich beispielsweise auf vier Bilderreihen beschränkt:

$$\begin{aligned} PF_1 &= \frac{f_1^2}{g_1 - P_1F_2} = \frac{f_1^2}{g_1 -}\;\frac{f_2^2}{g_2 - P_2F_3} \\ &= \frac{f_1^2}{g_1 -}\;\frac{f_2^2}{g_2 -}\;\frac{f_3^2}{g_3 - P_3F_4} \\ &= \frac{f_1^2}{g_1 -}\;\frac{f_2^2}{g_2 -}\;\frac{f_3^2}{g_3 -}\;\frac{f_4^2}{G_4P_4}\,; \end{aligned} \tag{18}$$

und eben so, wenn man dieselbe Elimination in umgekehrter Ordnung ausführt:

$$G_4P_4 = \frac{f_4^2}{g_3 -}\;\frac{f_3^2}{g_2 -}\;\frac{f_2^2}{g_1 -}\;\frac{f_1^2}{PF_1}\,. \tag{19}$$

Diesen zwei Gleichungen zufolge und gemäss der Definition von F und G, als den Oertern von P und P_4, wenn das eine Mal P_4 und das andere Mal P unendlich entfernt angenommen wird, ist aber

$$FF_1 = \frac{f_1^2}{g_1 -}\;\frac{f_2^2}{g_2 -}\;\frac{f_3^2}{g_3}\,, \tag{20}$$

$$G_4G = \frac{f_4^2}{g_3 -}\;\frac{f_3^2}{g_2 -}\;\frac{f_2^2}{g_1}\,, \tag{21}$$

wodurch die Oerter von F und G bestimmt sind.

Mit ihnen findet sich dann f^2 durch die Gleichung

---

*) Auf die Analogie dieses Verfahrens mit demjenigen, mittelst dessen von drei oder mehreren gewichtigen Punkten der Schwerpunkt bestimmt wird, habe ich bereits in Crelle's *Journal*. Bd. VI, S. 240 aufmerksam gemacht. [Siehe oben S. 535.]

$$f^2 = PF \,.\, GP_4 ,$$

wenn man darin für P und P_4 irgend zwei nach (18) oder (19) zusammengehörige Oerter dieser Punkte setzt. Auch kann man den einen dieser Punkte, etwa P_4, eliminiren und erhält auf solche Weise f^2 durch die übrigen Elemente und den ganz willkürlich zu bestimmenden Punkt P allein ausgedrückt. In der That ist

$$PF \,.\, GP_4 = (PF_4 - FF_4)\,(G_4 P_4 - G_4 G) ,$$

und damit, wenn man für $G_4 P_4$, FF_4, $G_4 G$ ihre Werthe aus (19), (20), (21) setzt und x statt PF_4 schreibt:

(22)
$$f^2 =$$
$$= \left(x - \frac{f_1^2}{g_1 -}\,\frac{f_2^2}{g_2 -}\,\frac{f_3^2}{g_3}\right)\left(\frac{f_4^2}{g_3 -}\,\frac{f_3^2}{g_2 -}\,\frac{f_2^2}{g_1 -}\,\frac{f_1^2}{x} - \frac{f_4^2}{g_3 -}\,\frac{f_3^2}{g_2 -}\,\frac{f_2^2}{g_1}\right) ,$$

ein von x unabhängiger Ausdruck für f^2, der überdies, wie sich aus (16) schliessen lässt, von quadratischer Form sein muss. Auch kann man aus (16) geradezu noch einen anderen ungleich einfacheren und für die numerische Rechnung geschickteren Ausdruck für f^2 ableiten. Denn hiernach ist, wenn man die Elemente der Reihenpaare, zu denen P und P_2, P und P_3, P und P_4 gehören, resp. mit F'', G'', f''^2; F''', ..; F'''', .. bezeichnet und die Vorzeichen einstweilen nicht berücksichtigt:

$$f'' = \frac{f_1 f_2}{G_1 F_2} , \quad f''' = \frac{f'' f_3}{G'' F_3} , \quad f'''' = \frac{f''' f_4}{G''' F_4} ;$$

folglich

$$f'''' = \frac{f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4}{G_1 F_2 \,.\, G'' F_3 \,.\, G''' F_4} .$$

Man hat ferner nach (17) $G_1 F_2 = g_1$, und nach (21)

$$G'' F_3 = G_2 F_3 - G_2 G'' = g_2 - \frac{f_2^2}{g_1} ,$$

$$G''' F_4 = G_3 F_4 - G_3 G''' = g_3 - \frac{f_3^2}{g_2 -}\,\frac{f_2^2}{g_1} ,$$

und es wird daher, wenn man noch zur Abkürzung

(23)
$$g_2 - \frac{f_2^2}{g_1} = h_2 , \quad g_3 - \frac{f_3^2}{h_2} = h_3$$

setzt:

(24)
$$f'''' = \frac{f_1 f_2 f_3 f_4}{g_1 h_2 h_3} ,$$

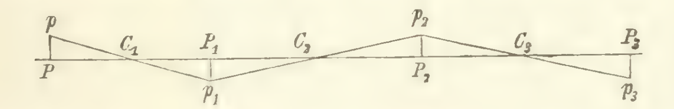
eine Gleichung, die, nachdem sie noch zum Quadrat erhoben, mit der obigen (22) für f^2, wie eine weitere Rechnung zeigt, identisch ist.

Man sieht übrigens von selbst, wie die jetzt für fünf auf einander folgende Reihen entwickelten Formeln für jede grössere oder geringere Anzahl von Reihen umzugestalten sind, und dass sie auch dann gelten müssen, wenn die Reihen, statt unmittelbar auf einander zu folgen, irgend beliebige sind, nur dass man sie stets in der Folge zu nehmen hat, in welcher sie nach einander sich bilden.

§. 12. Suchen wir jetzt noch die Oerter der successiven Bilder p_1, p_2, ... für ein Object p zu bestimmen, welches ausserhalb der Axe, jedoch derselben sehr nahe liegt, so dass die Strahlen des p, welche nahe perpendikular auf die erste brechende Fläche fallen, auch die folgenden Flächen nahe rechtwinklig treffen.

Heissen, dem Vorigen analog, C_1, C_2, ... die Mittelpunkte der Kugelflächen, von denen die erste, zweite, etc. brechende Fläche Stücke sind, so liegen nach dem Satze des §. 3 p und p_1 mit C_1, p_1 und p_2 mit C_2, etc. in gerader Linie, also sämmtliche Bilder p_1, p_2, ... in der durch das Object p und die Axe $C_1\,C_2$ ... bestimmten Ebene.

Sind ferner von einem Punkte P der Axe, als Object, P_1, P_2, ... die successiven Bilder, und wird die erste brechende Fläche



von PC_1 oder der Axe in D_1 und von pC_1 in d_1 geschnitten, so verhält sich

$$\frac{C_1 p}{p\,d_1} : \frac{C_1 p_1}{p_1 d_1} = \frac{C_1 P}{P D_1} : \frac{C_1\,P_1}{P_1\,D_1},$$

indem nach demselben Satze jedes dieser beiden Verhältnisse dem Brechungsverhältnisse beim Uebergange aus dem ersten in das zweite Mittel gleich ist. Nehmen wir hierbei noch an, dass P eben so weit als p von der ersten brechenden Fläche entfernt ist und mit p auf einerlei Seite derselben liegt, dass also Pp als eine auf der Axe perpendikulare Linie betrachtet werden kann, so sind, wegen $C_1 d_1 = C_1 D_1$, das erste und das dritte Glied jener Proportion einander gleich; mithin ist auch das zweite gleich dem vierten, woraus umgekehrt folgt, dass $P_1\,p_1$ ebenfalls auf der Axe perpendikular ist.

Hieraus aber wird auf gleiche Art weiter geschlossen, dass auch $P_2 p_2$, etc. rechtwinklig auf der Axe stehen.

Um daher die successiven Bilder p_1, p_2, ... des nicht in der Axe begriffenen Objects p zu finden, bestimme man zuerst von dem Fusspunkte P des von p auf die Axe zu fällenden Perpendikels die successiven Bilder P_1, P_2, ... und errichte in diesen Punkten in der durch p und die Axe zu legenden Ebene Perpendikel auf der Axe. Der Durchschnitt des ersten dieser Perpendikel mit der Geraden pC_1 giebt alsdann den Punkt p_1, der Durchschnitt des zweiten mit $p_1 C_2$ giebt p_2, der Durchschnitt des dritten mit $p_2 C_3$ giebt p_3, u. s. w.

§. 13. Der eben bemerkten Construction gemäss wollen wir noch die Verhältnisse, in denen die kleinen Linien $P_1 p_1$, $P_2 p_2$, etc. zu Pp stehen, durch den Ort von P und die Constanten, durch welche das System der brechenden Mittel bestimmt wird, auszudrücken suchen.

Indem wir diese Linien, von denen die ersteren als die successiven Bilder der letzteren Linie Pp zu betrachten sind, resp. mit x_1, x_2, etc. und x bezeichnen, verhält sich nach jener Construction:

$$x : x_1 = C_1 P : C_1 P_1 ,$$

und dieses auch den Zeichen nach. Je nachdem nämlich die Richtungen von $C_1 P$ und $C_1 P_1$ einerlei, oder einander entgegengesetzt sind, haben x und x_1 einerlei, oder verschiedene Zeichen, und es liegen p und p_1 auf einerlei, oder verschiedenen Seiten der Axe.

Nach (10) ist aber

$$PF_1 \,.\, G_1 P_1 = f_1^2 = C_1 F_1 \,.\, G_1 C_1 ,$$

weil mit einem in C_1 befindlichen Objecte (sein Bild zusammenfällt (§. 6); folglich

$$\frac{G_1 P_1 - G_1 C_1}{G_1 C_1} = \frac{C_1 F_1 - PF_1}{PF_1}, \quad \text{d. i.} \quad \frac{C_1 P_1}{G_1 C_1} = \frac{C_1 P}{PF_1} .$$

und daher

$$x : x_1 = PF_1 : G_1 C_1 . \tag{25}$$

und eben so

$$x_1 : x_2 = P_1 F_2 : G_2 C_2 , \tag{a}$$

$$x_2 : x_3 = P_2 F_3 : G_3 C_3 . \quad \text{u. s. w.} \tag{a*}$$

Es folgt ferner aus (10) und (13) und mit Anwendung der in §. 11 gebrauchten Bezeichnung:

$$PF_1 \,.\, G_1 P_1 = F'' F_1 \,.\, G_1 F_2 \,;$$

mithin ist

$$\frac{G_1 F_2 - G_1 P_1}{G_1 F_2} = \frac{PF_1 - F'' F_1}{PF_1},$$

d. i.

$$\frac{P_1 F_2}{G_1 F_2} = \frac{PF''}{PF_1}. \qquad (b)$$

und ähnlicher Weise (vergl. die Bemerkung in §. 10):

$$\frac{P_2 F_3}{G'' F_3} = \frac{PF'''}{PF''}, \quad \text{etc.}$$

Hiernach giebt die Zusammensetzung der Proportionen (25) und (a):

$$x : x_2 = PF'' \,.\, G_1 F_2 : G_1 C_1 \,.\, G_2 C_2 \,; \qquad (25^*)$$

und wenn man hiermit die Proportion (a^*) verbindet:

$$x : x_3 = PF''' \cdot G_1 F_2 \cdot G'' F_3 : G_1 C_1 \cdot G_2 C_2 \cdot G_3 C_3, \text{ u. s. w.} \qquad (25^{**})$$

Zusatz. Dass, wie diese Proportionen zu erkennen geben, der *Exponent des Verhältnisses zwischen dem Object x und seinem n-ten Bilde x_n dem Abstande $PF^{(n)}$ des Objects von dem zu der Reihe der Objecte und der n-ten Bilderreihe gehörigen Brennpunkte der Objecte proportional ist*, dies kann man auch aus folgender einfacher Betrachtung schliessen. — Durch zwei beliebige Punkte P und Q der Axe lege man zwei in einer Ebene enthaltene und die Axe rechtwinklig schneidende Gerade und durch $F^{(n)}$ in derselben Ebene und unter einem sehr kleinen Winkel mit der Axe eine dritte Gerade l, welche die ersteren beiden resp. in p und q schneide. Hiernach verhält sich

$$Pp : Qq = PF^{(n)} : QF^{(n)}.$$

Nun wird ein Lichtstrahl, welcher, im ersten Mittel befindlich, mit l zusammenfällt und daher die Punkte p, q und $F^{(n)}$ trifft, nach n Brechungen durch die n-ten Bilder dieser Punkte, d. i. durch p_n, q_n und den unendlich entfernten Punkt der Axe gehen. Mithin sind p_n und q_n gleich weit von der Axe entfernt, und man kann folglich statt voriger Proportion auch schreiben

$$\frac{Pp}{P_n p_n} : \frac{Qq}{Q_n q_n} = PF^{(n)} : QF^{(n)}.$$

Hierdurch aber, und wenn man noch bemerkt, dass das Verhältniss des Objects Pp zu seinem n-ten Bilde $P_n p_n$ bloss von seinem Orte P in der Axe, nicht aber von seiner Grösse Pp abhängt, ist die Proportionalität dieses Verhältnisses mit $PF^{(n)}$ dargethan.

§. 14. Die in §. 13 entwickelten Werthe der Verhältnisse von x zu x_1, x_2, etc. lassen sich durch Einführung der Brennweiten noch sehr vereinfachen. Zu dem Ende muss aber vorher eine, an sich willkürliche, Bestimmung über die Vorzeichen der Brennweiten gemacht werden, da im Bisherigen stets nur die Quadrate der Brennweiten in Rechnung kamen.

Werde demnach in Bezug auf zwei nächstfolgende Reihen, der Formel (9) gemäss, und indem man unter $\sqrt{m}$ die positive Quadratwurzel aus m versteht, die Brennweite

$$= \frac{\sqrt{m}}{m - 1} DC = - \frac{\sqrt{m}}{m - 1} CD$$

gesetzt.

Sei ferner, nach (16), bei drei Reihen, von denen die dritte unmittelbar auf die zweite folgt, und die erste, sei es unmittelbar, oder nicht, der zweiten vorangeht, die Brennweite in Bezug auf die erste und die dritte Reihe:

$$= \frac{f_1 \cdot f_2}{F_2 G_1} = - \frac{f_1 \cdot f_2}{G_1 F_2} .$$

Hiernach und mit Rücksicht auf (6) ist

$$G_1 C_1 = \frac{1}{m_1 - 1} C_1 D_1 = - \frac{1}{\sqrt{m_1}} f_1 ,$$

$$G_2 C_2 = - \frac{1}{\sqrt{m_2}} f_2 , \quad G_3 C_3 = - \frac{1}{\sqrt{m_3}} f_3 , \quad \text{etc.}$$

$$G_1 F_2 = - \frac{f_1 \cdot f_2}{f''} , \quad G'' F_3 = - \frac{f'' \cdot f_3}{f'''} , \quad \text{etc.}$$

(vgl. §. 11), wodurch, nachdem vorher die positive Richtung der Axe festgesetzt worden, die Vorzeichen der Abschnitte $G_1 C_1, \ldots G_1 F_2, \ldots$ der Axe, und damit die der Brennweiten $f_1, \ldots f'', \ldots$ bestimmt sind.

Hiermit, und wenn man noch um der Kürze willen

$$(26) \qquad \frac{1}{\sqrt{m_1}} = \mu_1 , \quad \frac{1}{\sqrt{m_2}} = \mu_2 , \text{ etc.}$$

setzt, reduciren sich die Proportionen (25), (25*), (25**) auf

$$x : x_1 = F_1 P : \mu_1 f_1 \ , \qquad x : x_2 = F'' P : \mu_1 \mu_2 f'' \ ,$$

$$x : x_3 = F''' P : \mu_1 \mu_2 \mu_3 f''' \ ,$$

und man hat allgemein:

$$x : x_n = F^{(n)} P : \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n f^{(n)} \ , \tag{27}$$

eine zufolge der gemachten Bestimmungen auch hinsichtlich der Vorzeichen gültige Proportion. Es hat nämlich x_n mit x einerlei Lage, oder die entgegengesetzte, je nachdem $F^{(n)}P$ und $f^{(n)}$ einerlei Zeichen haben, oder nicht.

Weil nach (4)

$$PF^{(n)} . G^{(n)} P_n = f^{(n)} f^{(n)}$$

ist, so kann man statt (27) auch schreiben:

$$x : x_n = f^{(n)} : \mu_1 \ldots \mu_n . P_n G^{(n)} \ , \tag{28}$$

so wie

$$x : x_n = \sqrt{F^{(n)} P} : \mu_1 \ldots \mu_n \sqrt{P_n G^{(n)}}. \tag{29}$$

§. 15. Es ist ein Grundgesetz der Dioptrik, dass das Brechungsverhältniss $m : 1$ in Bezug auf zwei unmittelbar auf einander folgende durchsichtige Mittel sich in das reciproke $1 : m$ verwandelt, wenn die zwei Mittel in umgekehrter Folge vom Lichte durchgangen werden, und dass daher der gebrochene Weg eines durch zwei oder mehrere Mittel gehenden Strahles zugleich als Weg einem Strahle dienen kann, der die Mittel nach entgegengesetzter Richtung durchgeht.

Wenn daher bei $n + 1$ auf einander folgenden Mitteln von den noch im ersten Mittel befindlichen Strahlen ein Object x an der Stelle P der Axe formirt wird, und dadurch im letzten Mittel ein Bild x_n in P_n entsteht, so wird, wenn wir das Licht die $n + 1$ Mittel in umgekehrter Folge durchgehend annehmen, von Strahlen, welche, im letzten Mittel befindlich, ein Object x_n in P_n erzeugen, nach ihrer Ankunft im ersten Mittel ein Bild x in P hervorgebracht werden. Dabei werden die auf die zwei äussersten Mittel oder Reihen sich beziehenden Brennpunkte dieselben geblieben sein, nur mit Vertauschung ihrer Namen, nämlich $G^{(n)}$ wird jetzt der Brennpunkt der Objecte, und $F^{(n)}$ der der Bilder sein. Statt der Brechungsverhältnisse aber und der von ihnen abhängigen Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ wird man die Reciproken in umgekehrter Folge zu setzen haben. Bezeichnet man daher noch die Brennweite in Bezug auf die jetzige Reihe von Objecten im letzten Mittel und die letzte Bilderreihe im ersten Mittel schlechthin mit f, so wird sich nach (27) verhalten:

(27*) $$x_n : x = G^{(n)} P_n : \frac{1}{\mu_n \cdot \mu_{n-1} \cdots \mu} \cdot f.$$

Zunächst folgt hieraus in Verbindung mit (28), dass f mit $f^{(n)}$ einerlei absoluten Werth hat. Setzen wir ferner, dass das Licht auf seinem Wege vom ersten zum letzten Mittel etwa zuerst durch P_n und dann durch $G^{(n)}$ gehe, und dass daher $P_n G^{(n)}$ seine Richtung ausdrücke, also $G^{(n)} P_n$ seine Richtung auf dem nachherigen entgegengesetzten Wege, und nehmen wir in dem einen Falle, wie im anderen, die positive Richtung der Axe übereinstimmend mit der des Lichtes an, so sind $P_n G^{(n)}$ in (28) und $G^{(n)} P_n$ in (27*) beide positiv, $f^{(n)}$ und f haben folglich einerlei Zeichen, und wir schliessen nach diesem Allen:

Die irgend zwei Mitteln oder Reihen zukommende Brennweite ist nicht allein ihrem absoluten Werthe, sondern auch ihrem Zeichen nach die nämliche, mag das Licht nach der einen oder der anderen Richtung die Mittel durchgehen, dafern nur zur positiven Richtung der Axe stets die Richtung des Lichts (oder stets die entgegengesetzte) genommen wird.

§. 16. Sind ϱ, ϱ_1, ϱ_2 irgend drei Reihen in der Ordnung, in welcher sie nach einander, wenn auch nicht unmittelbar, gebildet werden, bezeichnet man die Bilder dieser drei Reihen und die Elemente für je zwei derselben eben so, wie in §. 10 und §. 11, wo die drei Reihen unmittelbar auf einander folgten, und bedeuten M_1 und M_2 die Producte aus den Zahlen μ in Bezug auf die von ϱ bis ϱ_1 und von ϱ_1 bis ϱ_2 statthabenden Brechungen, so verhält sich nach (27)

$$x : x_1 = F_1 P : M_1 . f_1 , \qquad x_1 : x_2 = F_2 P_1 : M_2 . f_2$$

und

$$x : x_2 = F'' P : M_1 . M_2 . f'' ,$$

folglich

$$F_1 P . F_2 P_1 : f_1 . f_2 = F'' P : f'' .$$

Mit Hülfe der Gleichung (b) in §. 13, welche zufolge ihrer Herleitung für irgend drei nach einander folgende Reihen ϱ, ϱ_1, ϱ_2 gelten muss, reducirt sich aber die letztere Proportion auf

$$F_2 G_1 : f_1 . f_2 = 1 : f'' ,$$

und wir ersehen hieraus, dass die Gleichung

$$f'' = \frac{f_1 . f_2}{F_2 G_1} ,$$

mittelst welcher in §. 14 unter der Voraussetzung, dass ϱ_2 unmittelbar auf ϱ_1 folgte, durch die Elemente der Reihenpaare ϱ, ϱ_1 und ϱ_1, ϱ_2 die Brennweite des Reihenpaares ϱ, ϱ_2 nicht bloss ihrem absoluten Werthe, sondern auch ihrem Zeichen nach definirt wurde, auch dann noch besteht, wenn ϱ_1 und ϱ_2 zwei nicht unmittelbar auf einander folgende Reihen sind.

Wir können hieraus weiter folgern, dass die Bemerkung, welche in §. 10 über die verschiedenen Arten hinzugefügt wurde, nach denen aus den Elementen für je zwei nächstfolgende Reihen die Elemente für die erste und die letzte Reihe gefunden werden können, wörtlich auch dann anwendbar ist, wenn als jedesmaliges drittes Element nicht das Quadrat der Brennweite, sondern sie selbst mit dem ihr gehörigen Zeichen genommen wird.

Um dieses noch an dem einfachsten Beispiele, an vier nächstfolgenden Reihen ϱ_0, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 zu erläutern, so ist, wenn wir leichteren Verständnisses willen die drei Elemente in Bezug auf die Reihen ϱ_i und ϱ_k mit F_{ik}, G_{ik}, f_{ik} bezeichnen, das eine Mal

$$f_{02} = -\frac{f_{01} \cdot f_{12}}{G_{01} F_{12}},$$

und daher

$$f_{03} = -\frac{f_{02} \cdot f_{23}}{G_{02} F_{23}} = \frac{f_{01} \cdot f_{12} \cdot f_{23}}{G_{01} F_{12} \cdot G_{02} F_{23}};$$

das andere Mal

$$f_{13} = -\frac{f_{12} \cdot f_{23}}{G_{12} F_{23}},$$

und daher

$$f_{03} = -\frac{f_{01} \cdot f_{13}}{G_{01} F_{13}} = \frac{f_{01} \cdot f_{12} \cdot f_{23}}{G_{01} F_{13} \cdot G_{12} F_{23}};$$

woraus zugleich noch die Relation zwischen den Brennpunkten bei einem System von vier Reihen

$$G_{01} F_{12} \cdot G_{02} F_{23} = G_{01} F_{13} \cdot G_{12} F_{23}$$

hervorgeht.

Eigenschaften eines Systems von Linsengläsern.

§. 17. In der Praxis kommt fast ausschliesslich nur der Fall in Betracht, dass das erste, dritte, fünfte, etc. Mittel atmosphärische Luft, das zweite, vierte, sechste, etc. aber durchsichtige feste Körper

sind, die man wegen ihrer von zwei Stücken von Kugelflächen begrenzten Form **Linsen** oder **Linsengläser** nennt. Weil bei einem solchen Systeme von Mitteln nur diejenigen Bilder wahrgenommen werden können, welche von Objecten der ersten Luftschicht in den folgenden Luftschichten, also im dritten, fünften, etc. Mittel, erzeugt werden, so wollen wir, um die Wirkungen eines solchen Systems zu berechnen, damit anfangen, dass wir das zweite, vierte, etc. Mittel zu eliminiren, d. h. (§. 10, Zus. *b*) die Elemente für je zwei nächstfolgende Luftschichten, welche im Folgenden die **Elemente der Linse** selbst heissen, die zwischen den zwei Luftschichten begriffen ist, zu bestimmen suchen. Wir stellen uns daher zunächst die Aufgabe:

Aus der Form und der Brechungskraft einer Linse die drei Elemente derselben zu finden.

Seien C und C' die Mittelpunkte der Kugelflächen, von denen die vordere und die hintere Fläche der Linse Theile sind; D und D' die Durchschnitte der vorderen und der hinteren Fläche mit CC' oder der Axe der Linse; $m : 1$ und $m' : 1 = 1 : m$ die Brechungsverhältnisse beim Uebergange des Lichts aus der Luft in die Linse und aus der Linse in die Luft. Endlich seien die drei Elemente für die vordere Luftschicht und die Linsenmasse gleich F, G, f; für die Linsenmasse und die hintere Luftschicht gleich F', G', f'; und die gesuchten für die Linse selbst gleich F_1, G_1, f_1. Nach den Formeln (5) und nach der Bestimmung in §. 14 ist alsdann:

$$FD = -\frac{1}{m-1}CD, \quad GD = \frac{m}{m-1}CD, \quad f = -\frac{\sqrt{m}}{m-1}CD,$$

$$F'D' = -\frac{1}{m'-1}C'D', \quad G'D' = \frac{m'}{m'-1}C'D', \quad f' = -\frac{\sqrt{m'}}{m'-1}C'D',$$

$$= \frac{m}{m-1}C'D', \qquad = -\frac{1}{m-1}C'D', \quad = \frac{\sqrt{m}}{m-1}C'D';$$

und nach (13), (14) und (16) mit Rücksicht auf §. 14

$$F_1F \,.\, GF' = f^2, \quad GF' \,.\, G'G_1 = f'^2, \quad f_1 = \frac{ff'}{F'G}.$$

Hieraus folgt, wenn wir

$$DD' = d, \quad DC = r \text{ und } C'D' = r'$$

setzen, d. h. die Dicke der Linse mit d und die Krümmungshalbmesser ihrer vorderen und ihrer hinteren Fläche mit r und r' bezeichnen und diese Halbmesser positiv nehmen, wenn die Linse

convex-convex ist:

$$F'G = F'D' + D'D + DG = \frac{m}{m-1}r' - d + \frac{m}{m-1}r\,,$$

$$f = \frac{\sqrt{m}}{m-1}\,r\,,\quad f' = \frac{\sqrt{m}}{m-1}\,r'\,.$$

$$\left.\begin{aligned} F_1D &= F_1F + FD = -\frac{f^2}{F'G} + \frac{r}{m-1} = \\ &= \frac{r}{m-1}\cdot\frac{mr' - (m-1)d}{m(r+r') - (m-1)d}\,, \end{aligned}\right\}\quad (30)$$

$$\left.\begin{aligned} D'G_1 &= D'G' + G'G_1 = \frac{r'}{m-1} - \frac{f'^2}{F'G} = \\ &= \frac{r'}{m-1}\cdot\frac{mr - (m-1)d}{m(r+r') - (m-1)d}\,, \end{aligned}\right\}\quad (31)$$

$$f_1 = \frac{m}{m-1}\cdot\frac{rr'}{m(r+r') - (m-1)d}\,. \quad (32)$$

Hiermit aber sind die Abstände der beiden Brennpunkte F_1 und G_1 von resp. der vorderen und der hinteren Fläche der Linse und die Brennweite f_1, also sämmtliche drei Elemente der Linse, durch die die Form der Linse bestimmenden Linien d, r, r' und durch das Brechungsverhältniss $m:1$ ausgedrückt, wie verlangt wurde, gefunden.

§. 18. Nachdem auf solche Weise für jede Linse des Systems einzeln die drei Elemente bestimmt worden, hat man, etwa nach den in §. 11 entwickelten Formen (17), (20), (21), (23), (24), worin jetzt F_1, G_1, f_1 als die Elemente der ersten Linse; F_2, G_2, f_2 als die der zweiten, u. s. w. zu nehmen sind, die Elemente $F^{(n)}$, $G^{(n)}$, $f^{(n)}$ des ganzen Systems, d. i. die Elemente in Bezug auf die zwei Reihen in der ersten und der letzten Luftschicht, zu berechnen, worauf sich zuletzt für jedes seinem Orte P und seiner Grösse x nach gegebene Object der Ort P_n und die Grösse x_n des durch das Linsensystem hervorgebrachten Bildes mittelst der Proportionen (27), (28), (29), welche sich gegenwärtig auf

$$F^{(n)}P : f^{(n)} = f^{(n)} : P_nG^{(n)} = \sqrt{F^{(n)}P} : \sqrt{P_nG^{(n)}} = x : x_n \quad (33)$$

reduciren, bestimmen lassen. Denn weil jetzt das erste, dritte, fünfte, etc. und letzte Mittel Luftschichten, also sämmtlich von gleicher Be-

schaffenheit sind, so ist zufolge des in §. 15 gedachten Gesetzes in jenen Proportionen

$$\mu_1 \mu_2 = 1\,, \qquad \mu_3 \mu_4 = 1\,, \qquad \text{etc.}\,,$$

mithin auch das Product

$$\mu_1 \mu_2 \mu_3 \ldots = 1\,,$$

da die Zahl seiner Factoren gleich der Zahl der Brechungen, gleich der doppelten Zahl der Linsen, und daher gerade ist.

Bei einem Systeme von Linsengläsern ist demnach das Verhältniss des Abstandes des Objects vom Brennpunkte der Objecte zur Brennweite, und das nach §. 8 ihm gleiche Verhältniss der Brennweite zum Abstande des Brennpunkts der Bilder vom Bilde, also auch das diesen Verhältnissen gleiche zwischen den Quadratwurzeln aus den zwei genannten Abständen, dem Verhältnisse zwischen den auf der Axe normalen Dimensionen des Objects und des Bildes gleich.

Von Fernröhren.

§. 19. Eine besondere Betrachtung verdienen noch die Eigenschaften der Fernröhre, d. i. solcher Linsensysteme, bei welchen parallel auf die erste Linse fallende Strahlen von der letzten Linse parallel unter sich wieder ausfahren, und wo daher das Bild eines unendlich entfernten Objects gleichfalls unendlich entfernt liegt. Deshalb und dem Begriffe der Brennpunkte gemäss ist bei einem Fernrohr der eine Brennpunkt, und damit auch der andere, unendlich entfernt; seine Brennweite aber ist unendlich gross, indem nur dann zufolge der Grundformel (4) beide Brennpunkte unendlich entfernt liegen können.

Da hiernach bei einem Fernrohr die Brennpunkte und Brennweite desselben zur Rechnung nicht tauglich sind, so wollen wir uns seine Linsen in zwei Systeme zunächst auf einander folgender Linsen zerlegt denken, welches, wenn n die Anzahl aller Linsen ist, auf $n - 1$ verschiedene Arten geschehen kann. Dasjenige der beiden Systeme, welches vom Lichte zuerst durchgangen wird, heisse das Objectivsystem, das andere das Ocularsystem. Unter der Voraussetzung, dass nicht das eine, und damit auch nicht das andere von beiden, ein Fernrohr für sich ist, heissen F_1, G_1, f_1 die Elemente des Objectivsystems und F_2, G_2, f_2 die Elemente des Ocularsystems. Sei ferner das vom Objecte P durch das erstere System gemachte Bild P_1, und das von P_1 durch das letztere System, also auch das von P durch das Fernrohr selbst erzeugte Bild P_2, so hat man

$$PF_1 \cdot G_1P_1 = f_1^2 \,, \qquad P_1F_2 \cdot G_2P_2 = f_2^2 \,, \qquad (a)$$

und es verhält sich nach (33), wenn x, x_1, x_2 die auf der Axe normalen Durchmesser von P, P_1, P_2 bedeuten:

$$x : x_1 = F_1P : f_1 \,, \qquad x_1 : x_2 = f_2 : P_2G_2 \,. \qquad (b)$$

Ist nun P unendlich entfernt, so fällt P_1 in G_1; und weil alsdann — nach der Natur des Fernrohrs — auch P_2 unendlich entfernt liegt, so muss P_1 gleichzeitig in F_2 fallen. Mithin sind G_1 und F_2 zwei coincidirende Punkte, folglich

$$G_1P_1 = -P_1F_2 \,,$$

wodurch aus den Gleichungen (a) in Verbindung die Proportion

$$F_1P : G_2P_2 = f_1^2 : f_2^2 \qquad (34)$$

fliesst. Es verhält sich daher auch, wenn Q und Q_2 zwei andere als Object und Bild zusammengehörige Punkte der Axe sind:

$$PQ : P_2Q_2 = f_1^2 : f_2^2 \,. \qquad (35)$$

Die Proportion (34), mit den zwei Proportionen (b) zusammengesetzt, giebt

$$x : x_2 = -f_1 : f_2 \,. \qquad (36)$$

Ist das Object P, und daher auch sein Bild P_2, unendlich entfernt, so verhalten sich, wenn O den Ort des in die Axe hinter die letzte Linse gebrachten Auges bezeichnet, die scheinbaren Durchmesser beider

$$= \frac{x}{OP} : \frac{x_2}{OP_2} \quad \text{d. i.} = \frac{x}{F_1P} : \frac{x_2}{G_2P_2} \,,$$

weil alsdann OF_1 und OG_2 gegen OP und OP_2 verschwindend klein sind. Das letztere Verhältniss aber reducirt sich mittelst (34) und (36) auf $-f_2 : f_1$.

Die Haupteigenschaften eines Fernrohrs lassen sich hiernach in folgenden Sätzen zusammenfassen:

1) *Wie auch das System von Linsen, welche ein Fernrohr bilden, in ein Objectiv- und ein Ocularsystem zerlegt werden mag, so coincidirt immer der Brennpunkt der Objecte des letzteren mit dem Brennpunkte der Bilder des ersteren Systems.*

2) *Die Brennweiten beider Systeme stehen bei demselben Fernrohre stets in demselben Verhältnisse*, da das dem Quotienten $-f_1 : f_2$ nach (36) gleiche Verhältniss $x : x_2$ von der Zerlegung unabhängig ist.

3) *Das hiernach constante Verhältniss der Brennweite des Objectivsystems zu der Brennweite des Ocularsystems* $= c : 1$ *gesetzt, sind die in der Axe begriffenen zwei Reihen von Objecten und deren letzten Bildern in dem Verhältnisse* $cc : 1$ (35) *einander ähnlich und von einerlei Richtung. Dabei fällt das Bild in den Brennpunkt der Bilder eines der Ocularsysteme, wenn das Object im Brennpunkte der Objecte des zugehörigen Objectivsystems ist* (34).

4) *Die nach einer auf der Axe normalen Richtung geschätzten wahren Grössen des Objects und des Bildes verhalten sich wie* $- c : 1$ (36). *Bei einem Fernrohr ist daher die Grösse des Bildes bloss von der Grösse des Objects, nicht auch von dessen Orte in der Axe abhängig.*

Diese merkwürdige Eigenschaft eines Fernrohrs erklärt sich sehr einfach auch daraus, dass ein auf die erste Linse parallel mit der Axe fallender Strahl von der letzten Linse parallel mit der Axe wieder ausgeht. Denn sind p_2 und q_2 die letzten Bilder zweier ausserhalb der Axe befindlicher Objecte p und q, so wird ein durch p und q zugleich gehender einfallender Strahl nach seiner letzten Brechung die Punkte p_2 und q_2 treffen, und es wird folglich, wenn pq parallel mit der Axe ist, dasselbe auch $p_2 q_2$ sein. Alsdann ist aber

$$Pp = Qq \quad \text{und} \quad P_2 p_2 = Q_2 q_2 ,$$

wo $P, \ldots Q_2$ die Fusspunkte der von $p, \ldots q_2$ auf die Axe gefällten Perpendikel bedeuten. Wird folglich das Object Pp parallel mit der Axe von P nach Q gerückt, so bewegt sich sein Bild $P_2 p_2$ parallel mit der Axe und ohne seine Grösse zu ändern von P_2 nach Q_2.

Man kann hierbei noch bemerken, dass sich in den zwei Rechtecken Pq und $P_2 q_2$ die Grundlinien

$$PQ : P_2 Q_2 = cc : 1$$

und die Höhen

$$Pp : P_2 p_2 = - c : 1 ,$$

also die Grundlinien wie die Quadrate der Höhen verhalten.

5) *Die scheinbaren Grössen des Objects und des Bildes verhalten sich, wenn das eine, und damit auch das andere, unendlich entfernt ist, wie* $- 1 : c$. *Die Constante* c *drückt daher zugleich die Vergrösserungszahl des Fernrohrs aus, wenn durch dasselbe ein unendlich fernes Object vergrössert erscheint.*

Im gegentheiligen Falle hat man nur das Fernrohr umzukehren als wodurch sich c in $1 : c$ und damit die vorherige Verkleinerung in eine eben so vielmalige Vergrösserung verwandelt. Vergl. §. 15.

§. 20. **Schlussbemerkungen.** Nach §. 7 ist eine Reihe von Objecten, welche in der Axe liegen, mit jeder der darauf folgenden und gleichfalls in der Axe begriffenen Bilderreihen collinear verwandt. Dieselbe Verwandtschaft erstreckt sich aber auch auf alle ausser der Axe, jedoch ihr sehr nahe liegenden Objecte und deren Bilder, wie schon daraus gefolgert werden kann, dass, wenn drei Objecte in einer gegen die Axe nur wenig geneigten Geraden liegen, ein Lichtstrahl, welcher die Lage dieser Geraden hat, nach seiner ein- oder mehrmaligen Brechung immer auch die drei Bilder jener Objecte in jedem der nachfolgenden Bildersysteme treffen wird, und dass die Collineationsverwandtschaft zweier ebenen oder im Raume überhaupt enthaltenen Systeme von Punkten als darin bestehend sich definiren lässt, dass von je drei Punkten des einen Systems, welche in einer Geraden liegen, die entsprechenden Punkte des anderen gleichfalls in einer Geraden begriffen sind.

Bei der Collineationsverwandtschaft zwischen Objecten und deren Bildern tritt aber noch die aus §. 12 leicht zu erkennende Modification hinzu, dass von einem Systeme von Objecten, welches in einer auf der Axe normalen Ebene begriffen ist, auch jedes entsprechende Bildersystem sich in einer die Axe rechtwinklig schneidenden Ebene befindet, dem ersteren ähnlich ist und eine ähnliche Lage hat, so dass alle die Geraden, welche die als Object und Bild einander entsprechenden Punkte beider Systeme verbinden, sich in einem Punkte, dem Aehnlichkeitspunkte der Systeme, schneiden.

Bei einem Fernrohr findet zwischen den Objecten und deren letzten Bildern eine noch engere Verwandtschaft statt. Denn ausser der vorhin gedachten Aehnlichkeit und ähnlichen Lage zweier einander entsprechender ebener und auf der Axe normaler Systeme, sind hier die in der Axe selbst enthaltenen Reihen von Objecten und deren letzten Bildern einander ähnlich, was übrigens auch daraus erhellet, dass die Collineationsverwandtschaft zweier geradliniger Systeme in Aehnlichkeit übergeht, wenn, wie beim Fernrohr, dem unendlich entfernten Punkte des einen Systems der unendlich entfernte des anderen entspricht. Wegen dieser doppelten Aehnlichkeit aber, das eine Mal nach jeder auf der Axe perpendikularen Richtung, und das andere Mal nach der mit ihr parallelen Richtung, und weil die Exponenten der einen und der anderen Aehnlichkeit ($-c$ und cc), im Allgemeinen wenigstens, von einander verschieden sind, besteht zwischen beiden Systemen die schon von Euler bemerkte und von ihm Affinität genannte Verwandtschaft (*Baryc. Calc.* S. 195).*)

---

*) [Ges. Werke, I. Bd. S. 180.]

Als Anhang will ich noch eine auf die Proportionen 33 sich gründende Construction hinzufügen, mittelst welcher man, wenn bei einem Linsensystem in Bezug auf das System der Objecte und ein System der Bilder die Brennpunkte F und G der Objecte und der Bilder und die Brennweite f gegeben sind, für jedes Object sein Bild finden kann.

In einer durch die Gerade FG oder die Axe gelegten Ebene errichte man auf der Axe und auf einerlei Seite derselben die Perpendikel

$$FF' = GG' = f ,$$

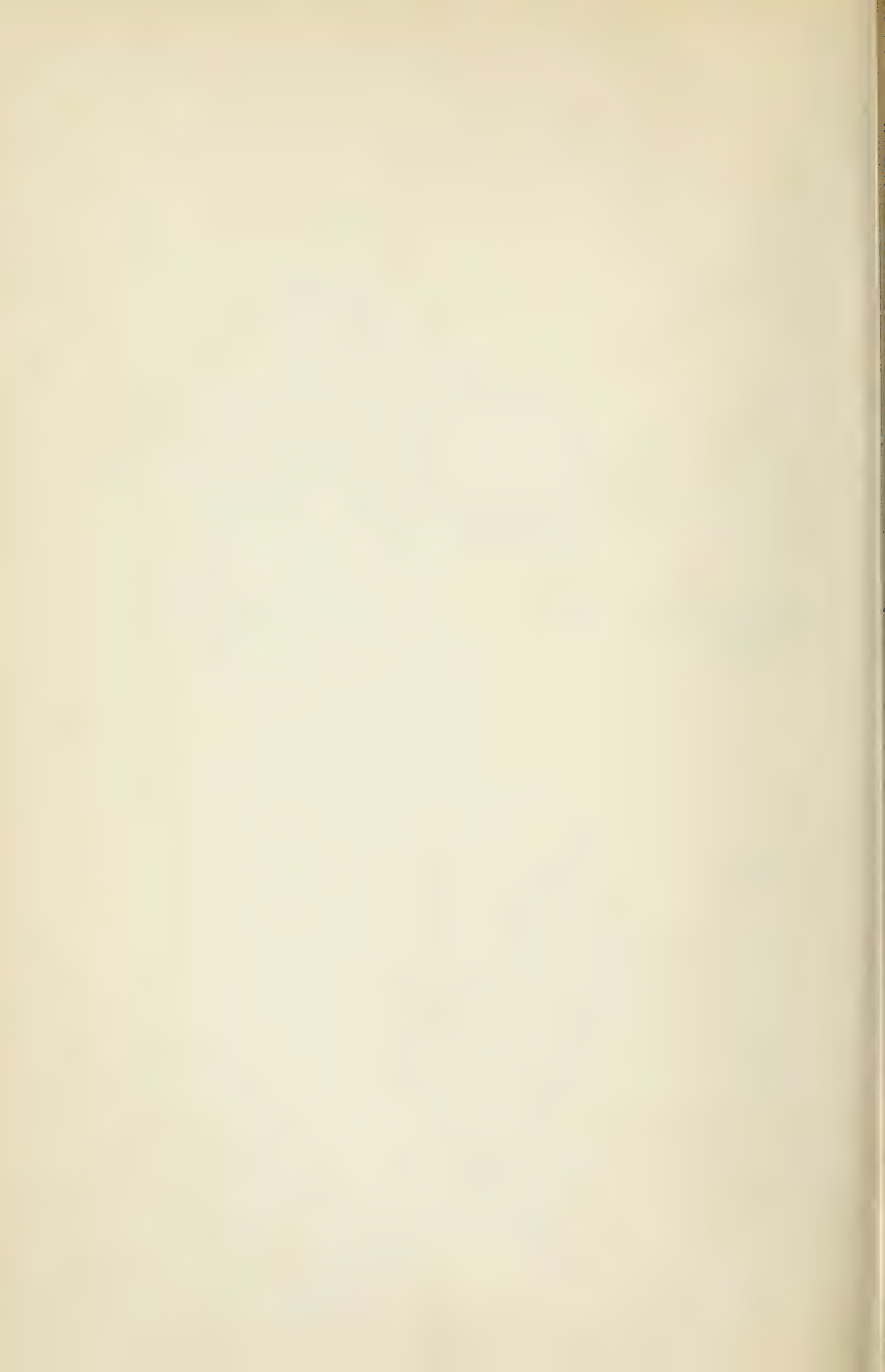
so ist von einem in der Axe gelegenen Objecte P sein Bild P_1 der Durchschnitt der Axe mit dem von G' auf PF' gefällten Perpendikel; oder, was dasselbe sagt: man beschreibe um $F'G'$ als Durchmesser einen Kreis, und es werden die von irgend einem Punkte X dieses Kreises nach F' und G' gezogenen Geraden die Axe in zusammengehörigen Oertern P und P_1 treffen. — Fällt P in einen der beiden Durchschnitte des Kreises mit der Axe, dafern anders diese Durchschnitte statthaben, so ist P_1 mit P identisch.



Indem wir ferner FG positiv, oder negativ nehmen, je nachdem FG, oder GF die Richtung des Lichtes ist, sei H einer der beiden Endpunkte des auf FG perpendikularen Kreisdurchmessers, und zwar der der Axe näher liegende Endpunkt, oder der von ihr entferntere, je nachdem FG und f einerlei, oder verschiedene Zeichen haben. Alsdann wird die Gerade XH der Axe im Aehnlichkeitspunkte S des durch die Geraden XF' und XG' in der Axe bestimmten Objects P und Bildes P_1 begegnen, so dass, wenn man durch P und P_1 zwei die Axe rechtwinklig schneidende Ebenen legt, jede durch S gezogene Gerade diese Ebenen in zwei als Object und Bild zusammengehörigen Punkten p und p_1 treffen wird.

Geometrische Entwickelung der Eigenschaften unendlich dünner Strahlenbündel.

[Berichte über die Verhandlungen der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathem.-physische Classe, Bd. 14, S. 1—16. Sitzung am 15. März 1862.]



Herr E. E. Kummer hat im 57. Bande des *Borchardt-Crelleschen Journals* eine durch die Allgemeinheit der Darstellung und durch den Reichthum ihres Inhalts gleich ausgezeichnete Abhandlung über geradlinige Strahlensysteme veröffentlicht. Im Eingange zu derselben bemerkt er, dass zur Behandlung dieses Gegenstandes die Optik den ersten Anstoss gegeben habe, dass man sich deshalb bisher fast nur auf solche Strahlensysteme beschränkt habe, wo alle Strahlen als Normalen einer Fläche auftreten, und dass zuerst Hamilton in seiner im 16. Bande der *Transactions of the Royal Irish Academy* erschienenen Abhandlung, obgleich noch immer von physikalischen Principien ausgehend, die allgemeineren geometrischen Eigenschaften der Strahlensysteme entwickelt habe. Diese von Hamilton gegebene Theorie habe er (Hr. Kummer) in seiner Abhandlung, durch eine neue Begründung, der analytischen Geometrie des Raumes anzueignen und in mehreren wesentlichen Punkten zu vervollständigen gesucht.

Der Calcul, dessen sich Kummer zu diesem Zwecke bedient, ist demjenigen nahe verwandt, welchen Gauss in der Abhandlung *Disquisitiones generales circa superficies curvas* angewendet hat und dürfte hinsichtlich der analytischen Eleganz Nichts zu wünschen übrig lassen. Es scheint mir aber, dass sich der in Rede stehende Gegenstand, ohne dass seiner Allgemeinheit in etwas Abbruch geschieht, um einen guten Theil einfacher und anschaulicher behandeln lasse, wenn man statt des Calculs einige geometrische Betrachtungen zu Hülfe nimmt, und insbesondere von einer rein geometrischen Definition eines unendlich dünnen Strahlenbündels ausgeht. Die Darlegung dieser Betrachtungen und die damit zu bewerkstelligende Entwickelung der Eigenschaften unendlich dünner Strahlenbündel, als mit denen sich der grössere Theil der Kummer'schen Abhandlung beschäftigt, und aus welchen die Eigenschaften ganzer Strahlensysteme ohne weitere Rechnung fliessen, —

dies bildet den Inhalt des vorliegenden Aufsatzes, welcher daher keine neuen Resultate enthält, sondern nur die Form der Darstellung, einige rein geometrische Folgerungen, und etwa noch die Gleichungen (5) und (6) in §. 9 und §. 11 als dem Verfasser gehörig beansprucht.

§. 1. Soll ein Strahlensystem den ganzen Raum füllen, und soll dieses nach dem Gesetze der Stetigkeit geschehen, so muss jeder Punkt des Raumes von einem Strahle des Systems, und — im Allgemeinen wenigstens — nur von einem, getroffen werden, und es müssen alle Strahlen, welche eine beliebig im Raume gezogene stetige Linie p treffen, eine durch die Bewegung einer Geraden erzeugte stetige Fläche bilden. Wird diese Fläche von irgend einer anderen Fläche in der Linie p_1 geschnitten, so wird, wenn p eine in sich zurücklaufende, sich nicht schneidende Linie ist, auch die Linie p_1, ohne sich zu schneiden, in sich zurückkehren, und wenn in diesem Falle alle Sehnen der Linie p unendlich klein sind, so werden es auch alle Sehnen von p_1 sein. Wir können alsdann die Linien p und p_1, wegen ihrer unendlichen Kleinheit, als in zwei Ebenen ε und ε_1 begriffen annehmen, und wenn e und e_1 die von p und p_1 umschlossenen Elementartheile dieser Ebenen bezeichnen, so wird jeder die Fläche e treffende Strahl auch die Fläche e_1 schneiden.

Indem wir daher die zwei Durchschnitte eines Strahles mit den Ebenen ε und ε_1 zwei einander entsprechende Punkte von ε und ε_1 nennen, wird jedem Punkte der Curve p ein Punkt der Curve p_1, jedem Punkte der Fläche e ein Punkt der Fläche e_1, und jeder geradlinigen Sehne von p eine geradlinige Sehne von p_1 entsprechen; letzteres deshalb, weil wir uns diese zwei Sehnen als entsprechende Elementartheile zweier in ε und ε_1 begriffenen und einander entsprechenden Linien denken können, von denen, wenn die Krümmung der einen eine endliche ist, auch die andere im Allgemeinen eine endliche Krümmung haben wird. Von je drei in einer Geraden liegenden Punkten der Fläche e liegen daher auch die drei ihnen in e_1 entsprechenden in einer Geraden, und es entsprechen sich daher die Punkte dieser zwei Flächenelemente nach dem Gesetze der Collineation.

Sie werden sich aber zugleich nach dem Gesetze der engeren Verwandtschaft der Affinität entsprechen, so dass, wenn P, Q, R drei in einer Geraden enthaltene Punkte des einen Flächenelements sind, die drei ihnen entsprechenden Punkte P_1, Q_1, R_1 des anderen nicht nur ebenfalls in einer Geraden liegen, sondern dass sich auch

$$P_1Q_1 : Q_1R_1 = PQ : QR$$

verhält *Baryc. Calc.* §. 149. *c*), Werke Bd. I, S. 183), — weil überhaupt, wenn die Punkte einer Ebene zu denen einer anderen Ebene in der Verwandtschaft der Collineation stehen, von je zwei einander entsprechenden Elementartheilen der beiden Ebenen die Punkte des einen Theils und die entsprechenden des anderen immer auch zwei affine Systeme von Punkten sind.

§. 2. Der Inbegriff aller derjenigen Strahlen des den ganzen Raum stetig ausfüllenden Systems, welche von der in sich zurücklaufenden Linie p, und damit auch von p_1, umfasst werden, dieses unendlich dünne Bündel von Strahlen ist der Gegenstand der nachfolgenden Untersuchungen. Um uns dieselben möglichst zu erleichtern, wollen wir die zwei Ebenen ε und ε_1, in denen p und p_1 enthalten sind, einander parallel annehmen; wir wollen ferner das zwischen den Punkten innerhalb p und denen innerhalb p_1 herrschende Gesetz der Affinität auf die ganzen Ebenen ε und ε_1 ausdehnen, d. h. statt jenes unendlich dünnen Bündels soll das den ganzen Raum erfüllende System in Untersuchung genommen werden, welches hervorgeht, wenn man die obige Relation zwischen den Ternionen P, Q, R und P_1, Q_1, R_1 in ε und ε_1 nicht bloss in dem Falle bestehend annimmt, wenn die Punkte der einen, und eben so die der anderen Ternion einander unendlich nahe sind, sondern auch dann, wenn diese Punkte in endlichen Entfernungen von einander liegen. Denn es ist von selbst klar, dass alle Eigenschaften eines solchen Systems auch einem unendlich dünnen Bündel zukommen müssen.

Ein Strahlensystem dieser Art ist aber gegeben, wenn nächst den zwei parallelen Ebenen ε und ε_1 die Durchschnitte A, B, C und A_1, B_1, C_1 derselben mit drei Strahlen des Systems gegeben sind, vorausgesetzt, dass weder die ersteren, noch die letzteren drei Durchschnitte in einer Geraden liegen. Denn um für irgend einen vierten Punkt D der Ebene ε den entsprechenden D_1 in ε_1, und damit den durch D zu legenden Strahl DD_1 zu finden, bestimme man den Durchschnitt S der Geraden AD und BC, und theile hierauf die Gerade B_1C_1 in S_1 in dem Verhältnisse

$$B_1S_1 : S_1C_1 = BS : SC\ ,$$

und die Gerade A_1S_1 in D_1 in dem Verhältnisse

$$A_1D_1 : D_1S_1 = AD : DS\ ,$$

wodurch D gefunden ist.

Es verhalten sich hiernach die Dreiecksflächen

$$ABC : A_1B_1C_1 = BCD : B_1C_1D_1 \ ,$$

und eben so

$$= CDE : C_1D_1E_1 = DEF : D_1E_1F_1 \ ,$$

wenn E und E_1, F und F_1 noch andere Paare einander entsprechender Punkte in ε und ε_1 sind; und man kann daher das zwischen den Punkten der Ebenen ε und ε_1 stattfinden sollende Gesetz der Affinität auch dadurch ausdrücken, dass je zwei in ε und ε_1 einander entsprechende Dreiecksflächen in einem constanten Verhältnisse zu einander stehen (*Baryc. Calcul*, §. 145, Werke Bd. I, S. 179).

§. 3. Eine Haupteigenschaft des jetzt in Betrachtung genommenen Strahlensystems besteht darin, dass von den Strahlen eines solchen auch jede andere mit ε und ε_1 parallele Ebene ε_2 in einem Systeme von Punkten geschnitten wird, welches den Systemen von Punkten in ε und ε_1 affin ist. Es lässt sich dieses sehr leicht mit Hülfe des Satzes der Mechanik darthun, dass der Schwerpunkt zweier sich geradlinig und gleichförmig bewegender schwerer Punkte sich ebenfalls geradlinig und gleichförmig bewegt.

In der That, wenn von drei parallelen Ebenen ε, ε_1, ε_2 zwei Gerade, die eine in A, A_1, A_2, die andere in B, B_1, B_2 geschnitten werden, so verhält sich

$$AA_1 : A_1A_2 = BB_1 : B_1B_2 \ ,$$

und man kann daher A und B, A_1 und B_1, A_2 und B_2 als drei Paare gleichzeitiger Oerter zweier sich geradlinig und gleichförmig bewegender Punkte betrachten. Werden nun AB, A_1B_1, A_2B_2 in C, C_1, C_2 nach gleichen Verhältnissen, wie $\beta : \alpha$, getheilt, und denkt man sich die beiden sich bewegenden Punkte A und B als schwere Punkte, deren Massen sich wie α und β verhalten, so sind C, C_1, C_2 die Schwerpunkte von A und B, von A_1 und B_1, von A_2 und B_2, und liegen zufolge jenes Satzes in einer Geraden; woraus wir weiter schliessen: Liegen A, B, C in einer Geraden der Ebene ε, und A_1, B_1, C_1 in einer Geraden einer mit ε parallelen Ebene ε_1, und verhält sich

$$A_1B_1 : B_1C_1 = AB : BC \ ,$$

so liegen auch die Durchschnitte A_2, B_2, C_2 von AA_1, BB_1, CC_1 mit irgend einer anderen zu ε parallelen Ebene ε_2 in einer Geraden, und es verhält sich

$$A_2B_2 : B_2C_2 = AB : BC \ .$$

Hieraus aber, und mit Anwendung der in §. 1 gegebenen Definition der Affinität, folgt ohne Weiteres der zu beweisende Satz, *dass nämlich, wenn zwei der drei Systeme von Punkten, in welchen drei parallele Ebenen von Strahlen geschnitten werden, einander affin sind, diesen zweien auch das dritte affin ist.*

§. 4. Sind a, b, c irgend drei Strahlen des Systems, deren Durchschnitte mit der Ebene ε, die hinfür die Grundebene heissen mag, nicht in einer Geraden liegen, und legt man durch einen beliebigen Punkt Q drei ihnen parallele Strahlen, welche von einer Ebene ζ von veränderlicher, aber stets mit ε paralleler Lage in F, G, H geschnitten werden, so bleibt sich für alle Lagen von ζ das Dreieck FGH ähnlich und behält einerlei Sinn, letzteres auch für je zwei Ebenen ζ, welche auf entgegengesetzten Seiten von Q liegen. Sind ferner A, B, C die Durchschnitte von a, b, c mit ζ, so ist das Dreieck ABC im Allgemeinen erst für eine unendlich entfernte Lage von ζ dem Dreiecke FGH ähnlich und hat mit diesem auch einerlei Sinn, so dass, wenn wir die zwei von ε zu verschiedenen Seiten unendlich weit entfernten Lagen von ζ mit ζ_u und ζ_v bezeichnen, die zwei in ζ_u und ζ_v begriffenen Dreiecke ABC einerlei Sinnes sind. Indem wir daher die Ebene ζ parallel mit sich aus der Lage ζ_u in die Lage ζ_v fortführen, wird das Dreieck ABC entweder gar nicht, oder eine gerade Anzahl Male seinen Sinn wechseln, und damit jedesmal der Werth des Inhalts von ABC durch Null in den entgegengesetzten übergehen. Es werden folglich bei dieser Bewegung von ζ die drei Punkte A, B, C entweder gar nicht, oder eine gerade Anzahl Male in eine mit ε parallele Gerade zu liegen kommen. Diese gerade Zahl kann aber nur gleich 2 sein. Denn wären A, B, C bei drei Lagen von ζ in einer Geraden, so müssten sie es bei allen sein. Alle diese Geraden ABC würden nämlich die Fläche eines hyperbolischen Paraboloids bilden, und es würden dann die Durchschnitte von a, b, c mit ε selbst in einer Geraden liegen, was gegen die Voraussetzung ist.

Seien nun zwei Lagen von ζ, die von der besagten Art sind, in der That vorhanden, so dass, wenn wir diese Lagen mit ζ_1 und ζ_2 bezeichnen, die Durchschnitte von a, b, c mit ζ_1 (mit ζ_2) in einer Geraden f_1 (in f_2) liegen. Alsdann wird auch jeder vierte Strahl d des Systems die Geraden f_1 und f_2 treffen. Denn heissen A_1, .. D_1 die Durchschnitte von a, .. d mit ζ_1, und A, .. D die Durchschnitte derselben Strahlen mit irgend einer anderen Lage von ζ, so müssen

sich, infolge der zwischen den Punkten der Ebene Σ und den entsprechenden Punkten von Σ_1 herrschenden Affinität, die Flächen

$$ABC : BCD = A_1 B_1 C_1 : B_1 C_1 D_1$$

verhalten. Es ist aber, der gemachten Annahme zufolge, $A_1 B_1 C_1 = 0$, mithin auch $B_1 C_1 D_1 = 0$; folglich u. s. w. Und eben so ist der Beweis auch hinsichtlich der Geraden f_2 zu führen.

Bei dem in §. 2 angenommenen Strahlensysteme giebt es demnach zwei mit der Grundebene ε, aber nicht mit einander, parallele, reelle oder imaginäre, gerade Linien, deren jede von jedem Strahle des Systems geschnitten wird, und die wir deshalb die zwei Brennlinien *des Systems nennen wollen. Und umgekehrt ist jede Gerade, welche diese zwei Linien zugleich trifft, ein Strahl des Systems*, weil durch jeden Punkt des Raumes ein Strahl geht, und weil durch einen gegebenen Punkt stets Eine und nur Eine Gerade gelegt werden kann, welche zwei gegebenen, nicht in einer Ebene enthaltenen und den Punkt nicht treffenden Geraden zugleich begegnet.

Umgekehrt können wir hieraus noch den an sich nicht uninteressanten Satz folgern: *Ein System von Geraden, deren jede zwei nicht in einer Ebene enthaltene Gerade trifft, schneidet je zwei Ebenen, deren jede mit den zwei Geraden zugleich parallel ist, in zwei affinen Systemen von Punkten.*

§. 5. Es mag hier noch die analytische Entwickelung der im vorigen Paragraphen auf rein geometrischem Wege erhaltenen Resultate eine Stelle finden.

Seien O und O', A und A', M und M' die Durchschnitte dreier Strahlen des Systems mit der Ebene ε und einer ihr parallelen Ebene ε'. Man nehme OO' zur Axe der z, ε zur Ebene der x, y, und darin OA und OM zu den Axen der x und der y eines Systems paralleler Coordinaten, und setze demzufolge

$$O = (0, 0, 0)\ , \qquad O' = (0, 0, c')$$
$$A = (a, 0, 0)\ , \qquad A' = (a + a', b', c')$$
$$M = (0, n, 0)\ , \qquad M' = (m', n + n', c')\ .$$

Es ergeben sich hiermit die Gleichungen des Strahles AA':

$$\frac{x - a}{a'} = \frac{y}{b'} = \frac{z}{c'}\ ,$$

und die Gleichungen des Strahles MM':

$$\frac{x}{m'} = \frac{y - n}{n'} = \frac{z}{c'}\ .$$

Bezeichnen folglich O'', A'', M'' die Durchschnitte der drei Strahlen mit einer dritten Ebene ε'', deren Gleichung $z = \gamma c'$ ist, und welche daher gleichfalls mit ε parallel liegt so hat man

$$O'' = (0, 0, \gamma c'), \quad A'' = (a + \gamma a', \gamma b', \gamma c'), \quad M'' = (\gamma m', n + \gamma n', \gamma c').$$

Hiermit findet sich, wenn man die Flächen der in ε, ε', ε'' begriffenen Dreiecke OAM, $O'A'M'$, $O''A''M''$ resp. gleich $\frac{1}{2}\Delta$, $\frac{1}{2}\Delta'$, $\frac{1}{2}\Delta''$ setzt:

$$\Delta = an, \quad \Delta' = (a + a')(n + n') - b'm',$$

$$\Delta'' = (a + \gamma a')(n + \gamma n') - \gamma^2 b'm'.$$

Sollen demnach von den drei durch ihre Durchschnitte mit den zwei parallelen Ebenen ε und ε' bestimmten Strahlen die Durchschnitte O'', A'', M'' mit einer anderen der ε parallelen Ebene ε'' in einer Geraden liegen, so muss $\Delta'' = 0$, d. i.

$$an + (an' + a'n)\gamma + (a'n' - b'm')\gamma^2 = 0$$

sein.

Da diese Gleichung rücksichtlich der Zahl γ, als wodurch die Lage von ε'' bestimmt wird, vom zweiten Grade ist, so giebt es immer zwei solcher Ebenen, wie ε'', die entweder beide reell, oder beide imaginär sind. Heissen nämlich γ_1 und γ_2 die beiden Wurzeln letzterer Gleichung, und macht man in der Axe der z die Abschnitte

$$OO_1 = \gamma_1 c' = \gamma_1 . OO', \quad \text{und} \quad OO_2 = \gamma_2 . OO',$$

so werden die Durchschnitte der drei Strahlen mit jeder der zwei durch O_1 und O_2 parallel mit ε zu legenden Ebenen ε_1 und ε_2 in einer Geraden enthalten sein. Es sind dies die beiden im Vorigen mit f_1 und f_2 bezeichneten Brennlinien des Strahlensystems.

§. 6. Aus der jetzt erhaltenen quadratischen Gleichung lässt sich noch ein anderer merkwürdiger Schluss ziehen. Ihr zufolge ist nämlich, wenn man noch

$$a'n' - b'm' = d$$

setzt:

$$\gamma_1 \gamma_2 = \frac{an}{d} = \frac{\Delta}{d} \quad \text{und} \quad \gamma_1 + \gamma_2 = -\frac{an' + a'n}{d}.$$

Es ist aber

$$an' + a'n = (a + a')(n + n') - an - a'n'$$

$$= \Delta' + b'm' - \Delta - a'n' = \Delta' - \Delta - d,$$

folglich

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 1 - \frac{\Delta' - \Delta}{d} = 1 - \frac{\Delta' - \Delta}{\Delta} \gamma_1 \gamma_2 .$$

d. i.

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1)}{\gamma_1 \gamma_2} = \frac{O'O_1 . O'O_2}{OO_1 . OO_2} ,$$

wenn man für γ_1 und γ_2 ihre aus dem Ende des vorigen Paragraphen fliessenden Werthe substituirt.

Wird demnach von drei Strahlen die eine der beiden Brennlinien in O_1, A_1, M_1, die andere in O_2, A_2, M_2, und *irgend eine mit den zwei Brennlinien parallele Ebene* ε *in* O. A. M *geschnitten, so ist die Dreiecksfläche* OAM dem Producte $OO_1 . OO_2$, also *dem Producte aus den Abständen der beiden Brennlinien von der Ebene des Dreiecks* (mithin auch den Producten $AA_1 . AA_2$, so wie $MM_1 . MM_2$) *proportional.*

Zusatz. Man kann aus diesem der Geometrie des Raumes angehörigen Satze ohne Mühe einen bemerkenswerthen planimetrischen Satz folgern. Man denke sich nämlich die eben genannten Punkte durch Parallellinien mit O_1O_2 auf eine mit ε parallele Ebene projicirt, so fallen die Projectionen von O, O_1, O_2 in einem Punkte, welcher O sei, zusammen; und wenn man die Projectionen der übrigen Punkte A, A_1, ... M_2 mit A, A_1, ... M_2 bezeichnet, so sind $\mathrm{OA_1M_1}$, $\mathrm{OA_2M_2}$, $\mathrm{AA_1A_2}$, $\mathrm{MM_1M_2}$ gerade Linien, es verhalten sich

$$\mathrm{A_1A : AA_2 = M_1M : MM_2} = A_1A : AA_2 = M_1M : MM_2 ,$$

und das Dreieck OAM ist dem Dreiecke OAM gleich und ähnlich. Dies giebt uns den Satz:

Ist $\mathrm{A_1M_1M_2A_2}$ *ein ebenes Viereck,* O *der gegenseitige Durchschnitt seiner Gegenseiten* $\mathrm{A_1M_1}$ *und* $\mathrm{A_2M_2}$, *und werden die zwei anderen Gegenseiten* $\mathrm{A_1A_2}$ *und* $\mathrm{M_1M_2}$ *in* A *und* M *nach einem und demselben beliebigen Verhältnisse getheilt, so ist die Fläche des Dreiecks* OAM *dem Producte* $\mathrm{AA_1 . AA_2}$ (*also auch dem Producte* $\mathrm{MM_1 . MM_2}$) *proportional.*

Es ist nicht schwer diesen planimetrischen Satz für sich zu beweisen, und man sieht von selbst, wie aus ihm umgekehrt der obige stereometrische Satz abgeleitet werden kann. Man wird übrigens bei dieser planimetrischen Untersuchung noch finden, dass die Dreiecksfläche

$$\mathrm{OAM} = \frac{\mathrm{A_1A . AA_2}}{\mathrm{A_1A_2}^2} (\mathrm{OA_1M_2} + \mathrm{OA_2M_1})$$

ist.

§. 7. Der im vorigen Paragraphen erwiesene Satz giebt uns zugleich Aufschluss über den Grad der Dichtigkeit, in welchem die Strahlen des Systems in verschiedenen Entfernungen von den beiden Brennlinien neben einander liegen.

Unter der Annahme, dass je zwei einander nächste Strahlen einander unendlich nahe sind, und dass überdies ihre Durchschnitte mit einer den zwei Brennlinien parallelen Ebene ε gleichmässig darin vertheilt sind, dass also je zwei gleiche Flächentheile g und h dieser Ebene gleich viel Durchschnitte enthalten, werden auch in jeder anderen mit ε parallelen Ebene ε' die Strahlendurchschnitte mit derselben gleichmässig vertheilt sein. Denn sind g' und h' die Flächen, innerhalb welcher die Ebene ε' von den innerhalb g und h in ε fallenden Strahlen geschnitten wird, so verhält sich, zufolge der zwischen entsprechenden Figuren beider Ebenen stattfindenden Affinität:

$$g' : h' = g : h \ ,$$

und daher ist $g' = h'$, weil $g = h$ sein sollte.

Nächstdem ist ersichtlich, dass, bei der gleichmässigen Vertheilung der Durchschnitte in ε für sich und in ε' für sich, die Dichtigkeiten dieser Systeme von Punkten sich umgekehrt wie g und g' verhalten. Hiernach aber, und wenn wir für g die vorhin betrachtete Dreiecksfläche OAM setzen, haben wir zu schliessen:

Dass bei einem Systeme einander unendlich naher Strahlen die Dichtigkeit ihrer Durchschnittspunkte mit einer den zwei Brennlinien parallelen Ebene dem Producte aus den Abständen der Brennlinien von dieser Ebene umgekehrt proportional ist.

In den Brennlinien selbst ist demnach die Dichtigkeit unendlich gross, und unter allen Ebenen, die parallel mit beiden Brennlinien und zwischen ihnen liegen, hat die Mittelebene die kleinste Dichtigkeit. Sind die Brennlinien imaginär, so bleibt ihre Mittelebene nichtsdestoweniger reell, und es kommt ihr dann unter allen ihr parallelen Ebenen überhaupt die grösste Dichtigkeit zu.

Zusatz. Ein unendlich dünnes Strahlenbündel kann nach den verschiedenen Lagen, welche man der Grundebene ε gegen dasselbe giebt, auf unendlich viele Arten nach der in §. 2 bemerkten Weise zu einem den ganzen Raum füllenden Strahlensysteme erweitert werden. Wie aber auch die Ebene ε gelegt worden sein mag, so werden sich doch immer für die Oerter, in denen das unendlich dünne Bündel von den mit ε parallelen Brennlinien und der damit gleichfalls parallelen Mittelebene getroffen wird, stets dieselben Stellen

finden, indem an diesen Stellen die Dichtigkeit des Bündels ein Maximum oder Minimum ist.

§. 8. Wir wollen jetzt von zwei Strahlen des wieder zu einem System erweitert gedachten unendlich dünnen Bündels ihren kleinsten gegenseitigen Abstand und die Lage dieser Abstandslinie zu bestimmen suchen. Zu dem Ende beziehen wir das System auf drei rechtwinklig coordinirte Axen der x, y, z, von denen die Axe der z der eine jener zwei Strahlen selbst sei. Die auf z normale Ebene der x, y lassen wir die Grundebene ε sein und legen dieselbe durch den Mittelpunkt O der Punkte O_1 und O_2, in denen die Axe der z, also ein Strahl des Systems, von den zwei Brennlinien f_1 und f_2 getroffen wird. Bezeichnet man endlich die sich in O schneidenden rechtwinkligen Projectionen von f_1 und f_2 auf ε, als die Ebene der x, y, mit g_1 und g_2, so werde, nach Vorausbestimmung der positiven Richtungen von f_1 und f_2 und damit auch von den ihnen parallelen g_1 und g_2, zur Axe der x die den Winkel $g_1\,g_2$ halbirende Gerade genommen. Die Lage von f_1 und f_2 gegen das Axensystem wird alsdann durch die Linie

$$O\,O_1 = -\,O\,O_2 = c\ ,$$

und durch den Winkel

$$(x\,g_1) = (x\,f_1) = -(x\,f_2) = \vartheta$$

bestimmt sein.

Sind nun L_1 und L_2 die zwei Durchschnitte irgend eines Strahles l des Systems mit f_1 und f_2, und setzt man noch

$$O_1\,L_1 = r_1 \quad \text{und} \quad O_2\,L_2 = r_2\ ,$$

so hat man

$$L_1 = (r_1 \cos\vartheta\,,\ r_1 \sin\vartheta,\ c)\ ,\quad L_2 = (r_2 \cos\vartheta\,,\ -r_2 \sin\vartheta,\ -c)\ ,$$

und es verhält sich für jeden anderen Punkt (x, y, z) von l:

$$x - r_1 \cos\vartheta : y - r_1 \sin\vartheta : z - c =$$

$$= (r_1 - r_2) \cos\vartheta : (r_1 + r_2) \sin\vartheta : 2c\ .$$

Die Gleichungen von l sind folglich

$$\frac{x - r_1 \cos\vartheta}{(r_1 - r_2) \cos\vartheta} = \frac{y - r_1 \sin\vartheta}{(r_1 + r_2) \sin\vartheta} = \frac{z - c}{2c}$$

oder

$$\frac{2x - (r_1 + r_2)\cos\vartheta}{(r_1 - r_2)\cos\vartheta} = \frac{2y - (r_1 - r_2)\sin\vartheta}{(r_1 + r_2)\sin\vartheta} = \frac{z}{c}.$$

Sie gestalten sich noch einfacher, wenn man, $z = 0$ setzend, die Coordinaten des Durchschnitts von l mit der Ebene der x, y bestimmt und diese Coordinaten, welche p und q heissen, statt r_1 und r_2 in den Gleichungen einführt. Man erhält auf solche Weise

$$2p = (r_1 + r_2)\cos\vartheta, \quad 2q = (r_1 - r_2)\sin\vartheta,$$

und damit die Gleichungen für l

$$\frac{x - p}{q}\operatorname{tang}\vartheta = \frac{y - q}{p}\operatorname{cotg}\vartheta = \frac{z}{c}.$$

Man bemerke hierzu noch, dass, wenn die zwei Brennlinien imaginär sind (§. 1), dies auch die beiden ihre Lage bestimmenden Grössen c und ϑ sind, dass aber, damit auch in diesem Falle die zwei Gleichungen eines Strahles ihre Realität behalten, die Werthe von $c\operatorname{tang}\vartheta$ und $c\operatorname{cotg}\vartheta$ reell sein, und folglich c sowohl, als $\operatorname{tang}\vartheta$, von der Form $m\sqrt{-1}$ sein müssen.

Die allgemeinen Gleichungen eines Strahles lassen sich daher immer unter der Form

$$a\frac{x - p}{q} = b\frac{y - q}{p} = z$$

darstellen, worin p und q von einem Strahle zum anderen eines und desselben Systems, a und b aber erst von einem Systeme zum anderen ihre Werthe ändern. Dabei sind die beiden Brennlinien reell oder imaginär, je nachdem a und b (d. i. $c\operatorname{tang}\vartheta$ und $c\operatorname{cotg}\vartheta$) einerlei oder verschiedene Zeichen haben.

§. 9. Um nun den kürzesten Abstand des Strahles l von dem Hauptstrahle oder der Axe der z zu bestimmen, projicire man l rechtwinklig auf die Ebene der x, y oder die Grundebene, fälle von O auf diese Projection das Perpendikel OP, und wenn Q der Punkt ist, in welchem das in P auf der Grundebene errichtete Perpendikel den Strahl l schneidet, so mache man in der Axe der z den Abschnitt

$$OR = PQ.$$

Hiernach ist $OPQR$ ein Rechteck, R und Q sind die einander nächsten Punkte des Hauptstrahls und des Strahles l, also der kürzeste Abstand beider $= RQ = OP$, und die Entfernung dieser mit der Grundebene parallelen Abstandslinie RQ von letzterer Ebene $= PQ = OR$.

Nun ist (§. 8) die Gleichung der Projection von l:

$$ap(x - p) = bq(y - q),$$

oder wenn man zur Abkürzung

$$(1) \qquad \frac{bq}{ap} = -t$$

setzt,

$$(2) \qquad x - p = -t(y - q),$$

und daher die Gleichung des von O auf diese Projection gefällten Perpendikels OP:

$$(3) \qquad y = tx .$$

Aus (2) und (3) ergeben sich aber die Coordinaten des Fusspunktes P dieses Perpendikels

$$(4) \qquad x = \frac{p + qt}{1 + t^2}, \qquad y = \frac{t(p + qt)}{1 + t^2},$$

und hieraus das Quadrat des kleinsten Abstandes des Strahles l vom Hauptstrahle:

$$OP^2 = x^2 + y^2 = \frac{(p + qt)^2}{1 + t^2}.$$

Die Entfernung PQ dieses kleinsten Abstandes von der Grundebene findet sich, wenn man in der Gleichung des §. 8,

$$z = a\frac{x - p}{q},$$

für x seinen Werth aus (4) setzt; und es ist daher

$$z = PQ = \frac{at(q - pt)}{q(1 + t^2)},$$

und wenn man hieraus mittelst (1) das Verhältniss $p:q$ eliminirt

$$PQ = (a + b)\frac{t}{1 + t^2}.$$

Zufolge (3) ist aber t gleich der Tangente des Winkels, den das auf die Projection des Strahles l gefällte Perpendikel OP mit der Grundlinie, d. i. mit der Axe der x, bildet. Bezeichnet man daher diesen Winkel mit λ und setzt demnach

$$t = \tan \lambda,$$

so wird

$$(5) \qquad PQ = OR = \tfrac{1}{2}(a + b)\sin 2\lambda .$$

Wir ersehen aus dieser einfachen Formel:

1) *dass für alle Strahlen des Systems, deren Projectionen auf die Grundebene einander parallel sind, und für welche daher der Winkel λ von constanter Grösse ist, auch die Entfernungen der kürzesten Abstandslinien QR von der Grundebene einander gleich sind;*

2) *dass diese Entfernungen von der einen, so wie von der anderen Seite der Grundebene die Grenze $\frac{1}{2}(a+b)$ nicht überschreiten;*

3) *dass diese Grenzwerthe von PQ oder OR bei denjenigen Strahlen stattfinden, für welche $\lambda = \pm 45^\circ$ ist, d. h. deren Projectionen mit der Grundlinie auf der einen oder anderen Seite der letzteren einen halben rechten Winkel machen, und dass daher von zwei zu der einen und anderen Grenze gehörigen Strahlen die Projectionen sich rechtwinklig schneiden und damit zugleich symmetrisch gegen die Projectionen der beiden Brennlinien liegen;*

4) *dass von zwei Strahlen überhaupt, deren Projectionen, also auch die auf diese gefällten Perpendikel OP, sich rechtwinklig schneiden, die den Strahlen zugehörigen Entfernungen der kleinsten Abstände von der Grundebene einander entgegengesetzt gleich sind.*

§. 10. Aus der Gleichung (5) des vorigen Paragraphen kann man ohne Mühe noch die von Hamilton aufgestellte Formel

$$r = r_1 \cos\omega^2 + r_2 \sin\omega^2$$

(Kummer S. 199, [16]) ableiten.

Man setze

$$\lambda = 45^\circ + \omega \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}(a+b) = m ,$$

so geht (5) über in

$$OR = m \cos 2\omega .$$

Statt dessen kann man auch schreiben:

$$n + OR = (n+m)\cos\omega^2 + (n-m)\sin\omega^2 ,$$

wo n eine willkürliche Länge ist. Macht man nun im Hauptstrahle die Linien

$$SO = n \quad \text{und} \quad OR_1 = R_2 O = m ,$$

so wird letztere Gleichung

$$SR = SR_1 \cos\omega^2 + SR_2 \sin\omega^2 , \qquad (H)$$

welches die Hamilton'sche Formel ist. Hierin sind S, R, R_1, R_2 Punkte des Hauptstrahls, und zwar S ein willkürlicher; R ist der

dem Strahle l am nächsten liegende: R_1 und R_2 aber sind die Grenzpunkte, zwischen denen R stets enthalten ist.

Sind ferner, so wie der Strahl l dem Punkte R zugehört, l_1 und l_2 den Punkten R_1 und R_2 zugehörige Strahlen, und bezeichnen l', l'_1, l'_2 die Projectionen dieser Strahlen auf die Grundebene, so ist (§. 9):

$$x\,\widehat{}\,OP = \lambda \quad \text{und} \quad OP\,\widehat{}\,l' = 90^0 ,$$

folglich

$$x\,\widehat{}\,l' = 90^0 + \lambda , \quad \text{und} \quad \omega = \lambda - 45^0 = x\,\widehat{}\,l' - 135^0 .$$

Für $\omega = 0$ coincidirt aber, nach (H), der Punkt R mit R_1, und folglich l' mit l'_1, und es ist daher $c = x\,\widehat{}\,l'_1 - 135^0$; folglich

$$\omega = x\,\widehat{}\,l' - x\,\widehat{}\,l'_1 = l'_1\,\widehat{}\,l' ,$$

d. h. in der Hamilton'schen Formel ist der Winkel ω gleich der Projection des von den Strahlen l_1 und l gebildeten Winkels auf die Grundebene.

§. 11. Eine bemerkenswerthe Form erhält noch die Gleichung (5), wenn man in ihr, unter der Voraussetzung, dass die zwei Brennlinien f_1 und f_2 reell sind, für a und b resp. $c \operatorname{tang} \vartheta$ und $c \operatorname{cotg} \vartheta$ (§. 8 zu Ende) setzt. Denn es findet sich hiermit:

$$PQ = OR = c\,\frac{\sin 2\lambda}{\sin 2\vartheta} . \tag{6}$$

Ohne, wie vorhin, von der Gleichung des Strahles l auszugehen, kann man zu dieser Gleichung auch durch folgende einfache Construction gelangen. Sind, wie in §. 8, L_1, L_2 die Durchschnitte von l mit f_1, f_2, und nennt man K_1, K_2 die Projectionen von L_1, L_2 auf die Grundebene, und C den Durchschnitt von l mit letzterer, so liegen L_1, C, L_2 und Q, desgleichen K_1, C, K_2 und P in gerader Linie, und es sind K_1L_1, K_2L_2, PQ, als Perpendikel auf der Grundebene, mit einander parallel. Mithin verhalten sich



$$K_1L_1 : K_2L_2 : PQ = CK_1 : CK_2 : CP .$$

Es ist aber

$$K_1L_1 = L_2K_2 = OO_1 = O_2O$$

(§. 8): folglich ist C der Mittelpunkt von $K_1 K_2$ sowie von $L_1 L_2$, und man hat

$$PQ = OR = c \frac{CP}{CK_1} .$$

Nächstdem sind OK_1, OK_2, $K_1 K_2$ die Projectionen von f_1, f_2, l auf die Grundebene, und P der Fusspunkt des von O auf $K_1 K_2$ gefällten Perpendikels.

Man mache noch in $K_1 K_2$, den Abschnitt $PK = K_1 P$, so ist P der Mittelpunkt von $K_1 K$, sowie es C von $K_2 K_1$ war. Man hat daher

$$K_2 K = 2\,CP\ , \quad \text{sowie} \quad K_2 K_1 = 2\,CK_1\ ,$$

und die vorige Gleichung wird damit

$$PQ = c \frac{K_2 K}{K_2 K_1} .$$

Nun verhalten sich

$$K_2 K : KO = \sin K_2 O K : \sin K K_2 O\ ,$$

$$K_1 O : K_2 K_1 = \sin K_1 K_2 O : \sin K_2 O K_1\ ,$$

folglich, weil $K_1 O = KO$ ist:

$$K_2 K : K_2 K_1 = \sin K_2 O K : \sin K_2 O K_1$$

$$= \sin 2\,XOP : \sin 2\,XOK_1\ ,$$

wo OX die den Winkel $K_2 O K_1$ halbirende Axe der x ist. Denn da gleichzeitig der Winkel KOK_1 von OP halbirt wird, so ist $K_2 O K = 2\,XOP$.

Weil endlich OK_1 die Projection der Brennlinie f_1 auf die ihr parallele Grundebene ist, so wird letzteres Verhältniss

$$= \sin 2(x, OP) : \sin 2(x, f_1) = \sin 2\lambda : \sin 2\vartheta ;$$

folglich u. s. w.

Uebrigens folgt noch aus (6), dass bei dem durch c und ϑ gegebenen Strahlensysteme der grösstmögliche Werth von PQ

$$= OR = \frac{c}{\sin 2\vartheta}$$

ist. *Die grösstmögliche Entfernung der kürzesten Abstandslinie eines Strahls von der Grundebene ist daher niemals kleiner, als die Entfernung der Brennlinien von der Grundebene*, so dass von den zwei

Linien $R_1 R_2$ (§. 10) und $O_1 O_2$, welche, im Hauptstrahle begriffen, den gemeinschaftlichen Mittelpunkt O haben, — dafern nicht (für $\vartheta = 45^\circ$) die eine mit der anderen zusammenfällt, — die Linie $R_1 R_2$ stets die grössere ist.

§. 12. Schliesslich wollen wir noch ein unendlich dünnes Bündel in Betracht ziehen, dessen Strahlen Normalen einer krummen Fläche sind.

Ein Punkt O des unendlich kleinen Theils der Fläche, dessen Normalen das Bündel ausmachen sollen, werde zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystems genommen. Die Axe der z dieses Systems sei die durch O zu legende Normale, und daher die Ebene der x, y die Berührungsebene der Fläche im Punkte O. Für jeden dem Berührungspunkt unendlich nahen Punkt (x', y', z') der Fläche ist alsdann

$$z' = .\, x'^2 + .\, x'y' + .\, y'^2$$

durch eine Gleichung gegeben, die sich, durch gehörige Drehung des rechten Winkels $x'y$ in seiner Ebene um den Punkt O, im Allgemeinen auf die einfachere Form

$$(m) \qquad z' = \frac{x'^2}{a} + \frac{y'^2}{b}$$

bringen lässt.

Es folgt hieraus

$$\frac{dz'}{dx'} = 2\frac{x'}{a}, \qquad \frac{dz'}{dy'} = 2\frac{y'}{b}.$$

und die allgemeinen Gleichungen für die Normale einer Fläche im Punkte (x', y', z') der Fläche:

$$\frac{x - x'}{z - z'} + \frac{dz'}{dx'} = 0, \qquad \frac{y - y'}{z - z'} + \frac{dz'}{dy'} = 0$$

reduciren sich dadurch, und wenn z', als ein Unendlichkleines der zweiten Ordnung, gegen das im Allgemeinen endliche z weggelassen wird, auf

$$a(x - x') + 2x'z = 0, \quad b(y - y') + 2y'z = 0.$$

Setzt man hier das eine Mal $x = 0$, und das andere Mal $y = 0$, so erhält man resp. $z = \frac{1}{2}a$, und $z = \frac{1}{2}b$. Es sind aber

$$x = 0 \quad \text{und} \quad z = \frac{1}{2}a$$

die Gleichungen einer Geraden, sie heisse f_1, welche, durch den Punkt $(0, 0, \frac{1}{2}a) = O_1$ gehend, mit der Axe der y parallel läuft, und eben so wird durch

$$y = 0 \quad \text{und} \quad z = \frac{1}{2} b$$

eine zweite Gerade f_2 ausgedrückt, welche mit der Axe der x parallel ist und durch den Punkt $(0, 0, \frac{1}{2}b) = O_2$ geht. Jede dem Punkt O unendlich nahe Normale der Fläche wird folglich die Geraden f_1 und f_2 treffen, und man wird daher für jeden dem O unendlich nahen Punkt die Normale erhalten, wenn man durch ihn eine die f_1 und f_2 zugleich treffende Gerade legt. Alle diese Normalen bilden folglich ein unendlich dünnes Strahlenbündel, von welchem die Axe der z der Hauptstrahl, und die Linien f_1 und f_2, welche, als Parallelen mit den Axen der y und der x, einen rechten Winkel mit einander bilden, die zwei Brennlinien sind.

Folgerungen. *a*) Da die zwei Constanten a und b von einander unabhängig sind, so wird auch umgekehrt jedes unendlich dünne Strahlenbündel, dessen zwei Brennlinien reell und in rechtwinkliger Lage gegen einander sind, sich als ein System von Normalen eines unendlich kleinen Theils einer krummen Fläche betrachten lassen.

b) Ist ein solches Bündel gegeben, so kann durch jeden Punkt O seines Hauptstrahls eine Fläche gelegt werden, von welcher die Strahlen des Bündels die Normalen sind. Zufolge der Gleichung (*m*) ist die Krümmung dieser Fläche in unmittelbarer Nähe von O entweder eine elliptische, oder eine hyperbolische, je nachdem die Constanten $a = 2\,OO_1$ und $b = 2\,OO_2$ einerlei, oder verschiedene Zeichen haben, je nachdem also der Hauptstrahl von der Fläche entweder ausserhalb, oder zwischen den beiden Brennlinien getroffen wird.

c) Für diejenige Curve, in welcher die Fläche von der Ebene der x, z geschnitten wird, ist $y' = 0$, und die zwei Gleichungen der Normale, welche in irgend einem, dem O unendlich nahen Punkte dieser Curve auf der Fläche errichtet wird, sind daher

$$a(x - x') + 2x'z = 0\,, \quad y = 0\,.$$

Diese Normale trifft folglich die Axe der z im Punkte $(0, 0, \frac{1}{2}a)$ oder O_1, d. h. O_1 ist der Mittelpunkt der Krümmung jener Curve im Punkte O: und eben so zeigt sich, dass in demselben Punkte O die Durchschnittscurve der Fläche mit der Ebene der y, z den Punkt O_2 zum Mittelpunkte der Krümmung hat.

Uebrigens haben die Krümmungshalbmesser OO_1 und OO_2 dieser zwei Curven unter den dem Punkte O zugehörigen Krümmungshalbmessern aller Durchschnittscurven der Fläche mit Ebenen, die durch die Axe der z gelegt werden, den grössten oder kleinsten Werth, — eben so wie von dem durch (m) für einen constanten Werth von z' ausgedrückten Kegelschnitte unter allen Durchmessern desselben die zwei in die Axen der x und der y fallenden am grössten oder am kleinsten sind.

d) Endlich bemerke man noch, dass bei dem von den Normalen einer Fläche gebildeten Strahlensysteme für zwei solche Strahlen, deren kürzeste Abstände vom Hauptstrahle von der einen und anderen Seite der Grundebene am weitesten entfernt sind, diese Abstandslinien in die zwei Brennlinien f_1 und f_2 fallen.

Denn in Bezug auf das in §. 8 angenommene Coordinatensystem ist jetzt $\vartheta = 45^0$, und die Gleichungen für f_1 und f_2 sind daher

$$(n) \qquad z = c\,, \quad y = x \quad \text{und} \quad z = -c\,, \quad y = -x\,.$$

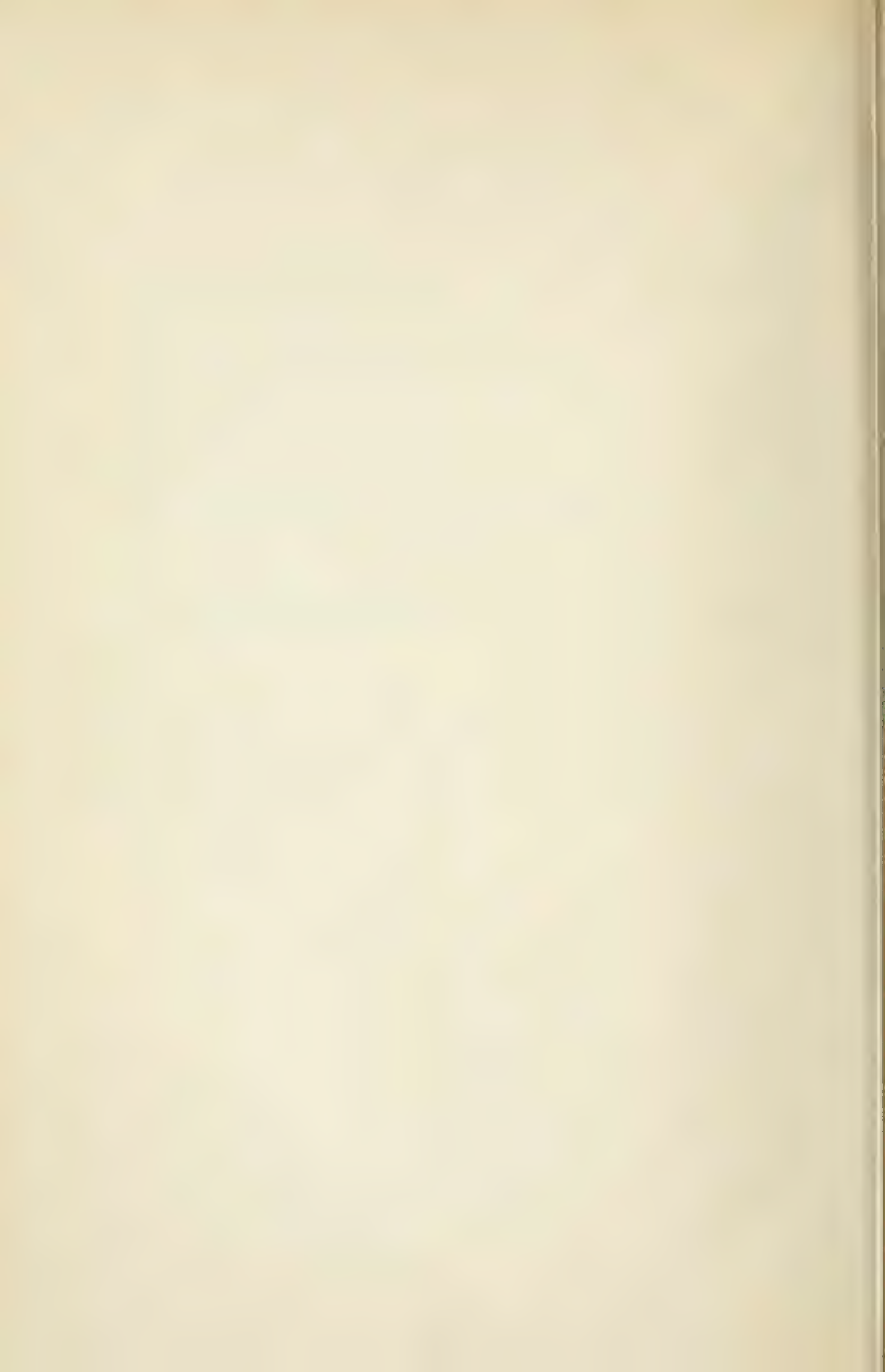
Andererseits sind die Gleichungen der kürzesten Abstandslinie eines Strahls

$$z = c\,\frac{\sin 2\lambda}{\sin 2\vartheta}\,, \quad y = x \operatorname{tang} \lambda\,.$$

und diese reduciren sich für die zwei Abstandslinien, welche am weitesten von der Grundebene entfernt sind, wo also $\lambda = \pm 45^0$ ist, und für den jetzigen Werth von $\vartheta = 45^0$ auf die beiden vorigen Paare von Gleichungen (n).

Ueber eine besondere Art von Umkehrung der Reihen.

[Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band X, S. 105—123. 1831.]



Das berühmte Problem der Umkehrung der Reihen besteht bekanntlich darin, dass, wenn eine Function einer Grösse durch eine nach Potenzen dieser Grösse fortlaufende Reihe gegeben ist, man umgekehrt die Grösse selbst, oder auch irgend eine andere Function derselben, durch eine nach Potenzen jener Function fortschreitende Reihe ausgedrückt verlangt. Man weiss, dass es keines geringen analytischen Scharfsinnes bedurfte, um das Gesetz, nach welchem die Coefficienten der zweiten Reihe von denen der ersteren abhängen, aufzufinden. Ungleich einfacher zu lösen ist folgende Aufgabe.

§. 1. Aufgabe. *Sei eine Function fx einer Grösse x durch eine nach den Potenzen von x geordnete Reihe gegeben*

$$fx = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots \tag{1}$$

Man soll x durch eine, nicht nach den Potenzen der Function fx, sondern nach den Functionen f der Potenzen von x fortgehende Reihe darstellen:

$$x = b_1 fx + b_2 f(x^2) + b_3 f(x^3) + b_4 f(x^4) + \dots \tag{2}$$

Wiewohl diese Aufgabe weder hinsichtlich der Schwierigkeit ihrer Lösung, noch hinsichtlich ihres Nutzens mit dem erst erwähnten eigentlichen Problem der Umkehrung der Reihen in Vergleich gestellt werden kann, indem aus dem Werthe von fx noch nicht die Werthe von $f(x^2)$, $f(x^3)$, ..., also auch noch nicht x nach der Formel (2) sich berechnen lassen, und daher der eigentliche Zweck des Reversionsproblems hierbei unerfüllt bleibt, so wird uns doch die Lösung dieser neuen Aufgabe zu mehreren, für die Theorie der Reihen sowohl, als für die Combinationslehre, nicht ganz unwichtigen Resultaten führen.

Die Hauptforderung unseres Problems ist: die Coefficienten b_1, b_2, b_3, ... der Reihe (2) als Functionen der Coefficienten a_1, a_2, a_3, ...

der Reihe (1) auszudrücken: und dies geschieht durch folgende ganz leichte Rechnung. Aus (1) fliesst:

$$
\begin{aligned}
f(x^2) &= a_1 x^2 + a_2 x^4 + a_3 x^6 + a_4 x^8 + \dots \\
f(x^3) &= a_1 x^3 + a_2 x^6 + a_3 x^9 + \dots \\
f(x^4) &= a_1 x^4 + a_2 x^8 + \dots \\
f(x^5) &= a_1 x^5 + a_2 x^{10} + \dots \\
f(x^6) &= a_1 x^6 + a_2 x^{12} + \dots
\end{aligned}
$$

u. s. w.

Substituirt man diese Werthe von $f(x^2)$, $f(x^3)$, ... und von fx aus (1) selbst in die Gleichung (2), so kommt:

$$
x = a_1 b_1 x + \left.\begin{array}{l} a_2 b_1 \\ + a_1 b_2 \end{array}\right| x^2 + \left.\begin{array}{l} a_3 b_1 \\ + a_1 b_3 \end{array}\right| x^3 + \left.\begin{array}{l} a_4 b_1 \\ + a_2 b_2 \\ + a_1 b_4 \end{array}\right| x^4 + \left.\begin{array}{l} a_5 b_1 \\ + a_1 b_5 \end{array}\right| x^5 + \left.\begin{array}{l} a_6 b_1 \\ + a_3 b_2 \\ + a_2 b_3 \\ + a_1 b_6 \end{array}\right| x^6 + \dots
$$

Das Fortgangsgesetz der Coefficienten dieser Reihe liegt am Tage. Ist nämlich der Coefficient von x^m zu bestimmen, so zerlege man die Zahl m auf alle möglichen Arten in zwei ganze positive Factoren. Jedes dieser Producte giebt dann ein Glied der gesuchten Coefficienten, indem man die zwei Factoren des Products als Indices der in einander zu multiplicirenden a und b nimmt.

Da die zuletzt erhaltene Gleichung für jeden Werth von x bestehen muss, so haben wir

$$
(3) \qquad
\begin{aligned}
& a_1 b_1 = 1 \\
& a_2 b_1 + a_1 b_2 = 0 \\
& a_3 b_1 + a_1 b_3 = 0 \\
& a_4 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_4 = 0 \\
& a_5 b_1 + a_1 b_5 = 0 \\
& a_6 b_1 + a_3 b_2 + a_2 b_3 + a_1 b_6 = 0
\end{aligned}
$$

u. s. w.

wodurch sich jedes b mit Hülfe der vorhergehenden b berechnen lässt.

Um hieraus die einzelnen b unabhängig von einander zu finden, setze man um grösserer Einfachheit willen $a_1 = 1$, und es kommt.

$$
\begin{aligned}
b_1 &= 1 \\
b_2 &= -a_2 \\
b_3 &= -a_3 \\
b_4 &= -a_4 + a_2 a_2 \\
b_5 &= -a_5 \\
b_6 &= -a_6 + a_3 a_2 + a_2 a_3 \\
b_7 &= -a_7 \\
b_8 &= -a_8 + a_4 a_2 + a_2 a_4 - a_2 a_2 a_2
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

u. s. w.

§. 2. Schon aus diesen wenigen Entwickelungen ist hinreichend abzunehmen, wie auch die Werthe der folgenden b aus a_2, a_3, ... zusammengesetzt sein werden. Man zerlege nämlich den Index m von b_m auf alle mögliche Arten in Factoren, indem man m selbst als höchsten Factor mitnimmt, die Einheit aber weglässt, und auch je zwei Zerlegungen, die sich nur durch die Folge ihrer Factoren unterscheiden, als zwei verschiedene betrachtet; oder wie man sich auch in der Sprache der Combinationslehre kurz ausdrücken kann: Man bilde alle Variationen mit Wiederholungen zum Product m. Aus jeder dieser Variationen ergiebt sich dann ein Glied in dem Werthe von b_m dadurch, dass man die Elemente der Variation zu den Indices von a nimmt, und dieses Glied erhält das positive oder negative Zeichen, je nachdem die Anzahl seiner Elemente gerade oder ungerade ist.

So sind z. B. alle Variationen zum Product 12:

12, 2.6, 3.4, 4.3, 6.2, 2.2.3, 2.3.2, 3.2.2,

und daher

$$b_{12} = -a_{12} + 2 a_2 a_6 + 2 a_3 a_4 - 3 a_2 a_2 a_3 .$$

Die allgemeine Richtigkeit dieses Gesetzes fliesst aus den recurrirenden Formeln (3) so leicht, dass es überflüssig sein würde, uns bei dem Beweise desselben aufzuhalten.

Dieselben Relationen zwischen den Coefficienten a und b würden übrigens auch dann erhalten worden sein, wenn man, so wie (1) und (2), auf gleiche Art die allgemeineren Gleichungen

$$fx = a_1 Fx + a_2 F(x^2) + a_3 F(x^3) + \dots$$

$$Fx = b_1 fx + b_2 f(x^2) + b_3 f(x^3) + \dots$$

mit einander verglichen hätte. Finden daher zwischen den a und den b die Relationen (3) statt, so ist von diesen zwei Gleichungen die zweite eine Folge der ersten, und die erste eine Folge der zweiten, was auch im ersteren Falle Fx, und im letzteren fx, für eine Function von x sein mag.

Die Relationen (3) bestehen, wie man leicht wahrnimmt, auch dann noch, wenn man

für a_2, a_3, a_4, ... resp. $2^n a_2$, $3^n a_3$, $4^n a_4$, ... und
für b_2, b_3, b_4, ... resp. $2^n b_2$, $3^n b_3$, $4^n b_4$, ...

substituirt, wo n eine beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl sein kann. Wenn daher

$$(A) \qquad fx = a_1 Fx + 2^n a_2 F(x^2) + 3^n a_3 F(x^3) + \dots,$$

so ist auch

$$(A^*) \qquad Fx = b_1 fx + 2^n b_2 f(x^2) + 3^n b_3 f(x^3) + \dots,$$

und umgekehrt.

Von noch grösserer Allgemeinheit als diese, sind folgende zwei zusammengehörige Gleichungen:

$$(B) \qquad \begin{aligned} fx &= a_1 Fx + c_2 a_2 F(x^2) + c_3 a_3 F(x^3) + \dots \\ Fx &= b_1 fx + c_2 b_2 f(x^3) + c_3 b_3 f(x^3) + \dots \end{aligned}$$

In ihnen können die Coefficienten c_2, c_3, c_5, ..., deren Indices Primzahlen sind, nach Belieben bestimmt werden. Ein Coefficient c, dessen Index eine zusammengesetzte Zahl ist, muss dann gleich genommen werden dem Producte aus den Coefficienten c, deren Indices die einfachen Factoren jener zusammengesetzten Zahl sind, also

$$c_4 = c_2^2, \quad c_6 = c_2 \cdot c_3, \quad \text{u. s. w.}$$

Die zwischen den a und den b erforderlichen Relationen sind dieselben, wie vorhin.

Um jetzt von dieser neuen Art der Reihenumkehrung ein sehr einfaches Beispiel zu geben, wollen wir

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = 1$$

setzen, also nach (1)

$$fx = x + x^2 + x^3 + \dots, \quad \text{und daher } fx = \frac{x}{1 - x}.$$

Mit diesen Werthen von a wird aber nach (4):

$$b_1 = 1, \quad b_2 = -1, \quad b_3 = -1, \quad b_4 = 0,$$
$$b_5 = -1, \quad b_6 = 1, \quad b_7 = -1, \quad b_8 = 0, \quad \text{u. s. w.}$$

und daher nach (2)

$$x = \frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{1-x^2} - \frac{x^3}{1-x^3} - \frac{x^5}{1-x^5} + \frac{x^6}{1-x^6} - \frac{x^7}{1-x^7} + \frac{x^{10}}{1-x^{10}} - \frac{x^{11}}{1-x^{11}} - \frac{x^{13}}{1-x^{13}} + \cdots \qquad (C)$$

§. 3. Man wird es gewiss sehr auffallend finden, dass die Coefficienten dieser Reihe, auch wenn man sie noch weiter fortsetzt, keine anderen als 1, 0, und — 1 sind. Der Grund dieses merkwürdigen Ergebnisses, und das Gesetz, nach welchem die Coefficienten 1, 0 und — 1 mit einander abwechseln, wird sich am leichtesten mit Hülfe der recurrirenden Formeln (3) entdecken lassen. Indem wir darin $a_1, a_2, a_3, \ldots = 1$, und nächstdem, der ersten dieser Formeln zufolge, auch $b_1 = 1$ setzen, werden dieselben:

$$1 + b_2 = 0\ , \quad 1 + b_3 = 0\ , \quad 1 + b_2 + b_4 = 0\ , \quad 1 + b_5 = 0\ ,$$
$$1 + b_2 + b_3 + b_6 = 0\ , \quad 1 + b_7 = 0\ , \quad \text{u. s. w.}\ ,$$

so dass überhaupt, wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ alle von einander verschiedenen Factoren von m sind, man zur Bestimmung von b_m die Gleichung

$$1 + b_\alpha + b_\beta + b_\gamma + \cdots + b_m = 0$$

hat. Hieraus ist nun

1) ohne Weiteres ersichtlich, dass, wenn m eine Primzahl bedeutet, $1 + b_m = 0$, und daher $b_m = -1$ ist. Sei

2) m ein Product aus zwei einander nicht gleichen Primzahlen α und β, und habe also bloss α und β zu Factoren, so gilt für $b_{\alpha\beta}$ die Gleichung:

$$1 + b_\alpha + b_\beta + b_{\alpha\beta} = 0\ ,$$

mithin

$$1 + b_\alpha + b_\beta + b_\alpha \cdot b_\beta = b_\alpha \cdot b_\beta - b_{\alpha\beta}\ .$$

Es ist aber von den zwei Factoren $1 + b_\alpha$ und $1 + b_\beta$, in welche sich die linke Seite dieser Gleichung auflösen lässt, nach 1) jeder für sich gleich Null, folglich

$$b_{\alpha\beta} = b_\alpha \cdot b_\beta\ . \qquad (a)$$

Von einer Zahl, welche ein Product aus drei verschiedenen Primzahlen α, β, γ ist, erhält man sämmtliche Factoren durch Entwickelung des Products

$$(1 + \alpha)(1 + \beta)(1 + \gamma)\ .$$

und es ist daher

$$1 + b_\alpha + b_\beta + b_\gamma + b_{\alpha\beta} + b_{\alpha\gamma} + b_{\beta\gamma} + b_{\alpha\beta\gamma} = 0 .$$

Setzt man darin, der Formel (a) zufolge, statt $b_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\gamma}$, $b_{\beta\gamma}$ resp. $b_\alpha \cdot b_\beta$, $b_\alpha \cdot b_\gamma$, $b_\beta \cdot b_\gamma$, so kann man die Gleichung auch so schreiben:

$$(1 + b_\alpha)(1 + b_\beta)(1 + b_\gamma) = b_\alpha \cdot b_\beta \cdot b_\gamma - b_{\alpha\beta\gamma} ,$$

und da jeder der drei Factoren der linken Seite dieser Gleichung gleich Null ist, so hat man

$$(b) \qquad b_{\alpha\beta\gamma} = b_\alpha \cdot b_\beta \cdot b_\gamma .$$

Hiermit lässt sich auf ganz ähnliche Art zeigen, dass, wenn δ eine vierte, von α, β, γ verschiedene Primzahl ist,

$$(c) \qquad b_{\alpha\beta\gamma\delta} = b_\alpha \cdot b_\beta \cdot b_\gamma \cdot b_\delta ,$$

u. s. w. Nun ist, nach 1), $b_\alpha = b_\beta = b_\gamma =$ etc. $= -1$, und daher

$$b_{\alpha\beta} = +1 , \quad b_{\alpha\beta\gamma} = -1 , \quad b_{\alpha\beta\gamma\delta} = +1 .$$

und so fort abwechselnd. Wenn demnach m das Product aus mehreren einander nicht gleichen Primzahlen ist, so ist $b_m = \pm 1$, und zwar $+1$ bei einer geraden, -1 bei einer ungeraden Anzahl von Primzahlen.

3) Sei $m = \alpha^2$, gleich dem Quadrat einer Primzahl, so hat m den Factor α, und es ist daher

$$(d) \qquad 1 + b_\alpha + b_{\alpha^2} = 0 .$$

folglich, wegen $1 + b_\alpha = 0$,

$$b_{\alpha^2} = 0 .$$

Eben so folgt, wenn $m = \alpha^3$ ist, und daher α und α^2 zu Factoren hat:

$$1 + b_\alpha + b_{\alpha^2} + b_{\alpha^3} = 0 ,$$

mithin, wegen (d), $b_{\alpha^3} = 0$; und auf gleiche Art erhellet, dass überhaupt, wenn m die Potenz einer Primzahl ist,

$$b_m = 0$$

ist.

§. 4. Wir haben jetzt noch den allgemeinen Fall zu untersuchen, wo m aus mehreren, zum Theil einander gleichen, zum Theil verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt ist. Sei daher

$$m = \alpha^p \beta^q \gamma^r \ldots \zeta^z ,$$

also p, q, r, ... z positive ganze Zahlen, von denen wenigstens Eine grösser als 1 ist. Auch ist darunter der vorige Fall, wo $m = \alpha^p$, als ein specieller mitbegriffen. Die Anzahl aller einfachen Factoren, in welche m aufgelöst werden kann, ist $= p + q + r + \ldots + z$, und werde mit N bezeichnet. Ich behaupte nun, dass für ein m von der angegebenen Beschaffenheit immer $b_m = 0$ ist, und werde dies beweisen, indem ich zeige, dass wenn die Behauptung für alle Formen gilt, welche m bei allen Werthen von N, die kleiner als eine gewisse Zahl M sind, haben kann, die Behauptung auch für $N = M$ richtig ist.

Sämmtliche Factoren von $\alpha^p \beta^q \gamma^r \ldots \zeta^z$ sind einerlei mit den Gliedern, welche durch Entwickelung des Products

$$(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^p)(1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^q)(1+\gamma+\gamma^2+\ldots+\gamma^r)\ldots(1+\zeta+\ldots\zeta^z)$$

erhalten werden, und es ist folglich

$$1 + b_\alpha + b_\beta + \ldots + b_\zeta + b_{\alpha\beta} + b_{\alpha\gamma} + b_{\beta\gamma} + \ldots + b_{\alpha\beta\gamma} + \ldots$$
$$+ b_{\alpha\beta\gamma\ldots\zeta} + S + b_{\alpha^p\beta^q\gamma^r\ldots\zeta^z} = 0 \;,$$

wo S die Summe aller durch die angezeigte Entwickelung entstehenden Glieder von der Form b_n bedeutet, in denen n dieselbe Beschaffenheit, wie die vorhin von m bemerkte, hat, nur dass dabei die Summe der Exponenten der Primzahlen nie die Summe der Exponenten p, q, r, ... z im letzten Gliede der Reihe erreicht. Nun sind von den ersten Gliedern der Reihe bis mit zum Gliede $b_{\alpha\beta\gamma\ldots\zeta}$ die Indices sämmtliche Factoren des aus den nicht potenzirten Primzahlen α, β, γ, ... ζ zusammengesetzten Products, und es ist mithin die Summe dieser Glieder nach 2) für sich gleich Null. Wenn folglich jedes der unter S begriffenen Glieder gleich Null ist, so muss auch das letzte Glied $b_{\alpha^p\beta^q\ldots\zeta^z}$ selbst Null sein, wie zu erweisen war.

Aus dem in 3) gefundenen $b_{\alpha^2} = 0$ folgt daher

$$b_{\alpha^2\beta} = 0 \;,$$

und hieraus und aus $b_{\alpha^3} = 0$:

$$b_{\alpha^3\beta} = 0 \;, \quad b_{\alpha^2\beta^2} = 0 \;, \quad b_{\alpha^2\beta\gamma} = 0 \;,$$

und hieraus und aus $b_{\alpha^4} = 0$:

$$b_{\alpha^4\beta},\; b_{\alpha^3\beta^2},\; b_{\alpha^3\beta\gamma},\; b_{\alpha^2\beta^2\gamma},\; b_{\alpha^2\beta\gamma\delta} = 0 \;,$$

u. s. w.

In der Reihe (C) des §. 2, deren allgemeines Glied $\dfrac{x^m}{1 - x^m}$ und deren Summe $= x$ ist, herrscht demnach das Gesetz:

Dass für $m = 1$ und für jedes m, welches ein Product aus einer geraden Anzahl von einander verschiedener Primzahlen ist, der Coefficient des Gliedes gleich 1 ist, dass jedes Glied, dessen m eine Primzahl selbst, oder ein Product aus einer ungeraden Menge sich nicht gleicher Primzahlen ist, den Coefficienten -1 hat, und dass endlich alle Glieder wegfallen, deren Exponenten Quadrate oder höhere Potenzen von Primzahlen zu Factoren haben.

Wir entwickelten dieses Gesetz mit Hülfe der recurrirenden Formeln (3). Indessen wird es nicht unnütz sein, hierbei auch den independenten Bestimmungen (4) Aufmerksamkeit zu schenken. Da gegenwärtig

$$a_2 = a_3 = a_4 = \text{etc.} = 1$$

ist, so ist nach den Formeln (4) und nach dem, was zunächst über sie bemerkt worden:

> $b_m = -1 +$ der Anzahl der Binionen oder der Variationen der zweiten Classe, $-$ der Anzahl der Ternionen, oder der Variationen der dritten Classe, $+$ u. s. w.,

welche mit Wiederholungen zum Product m gebildet werden können. Hieraus, und weil die erste Classe bloss aus der Zahl m besteht, mithin die Anzahl der Unionen $= 1$ ist, fliesst in Verbindung mit dem Vorhergehenden folgender bemerkenswerthe Satz:

Bildet man alle Variationen mit Wiederholungen zu einem bestimmten Producte m, und ordnet diese Variationen nach Classen, wobei die Zahl m selbst die erste Classe ausmacht, die Einheit aber als Factor ausgeschlossen bleibt (indem sonst die Menge der Variationen unendlich sein würde), *so ist die Anzahl der Variationen in den geraden Classen der Anzahl der Variationen in den ungeraden entweder gleich, oder um 1 grösser, oder um 1 kleiner als die letztere, je nachdem von den einfachen Factoren von m einige, oder auch alle, einander gleich sind, oder m ein Product aus sämmtlich von einander verschiedenen Primzahlen ist, und dann die Menge dieser Primzahlen entweder gerade oder ungerade ist.*

§. 5. Dieser Satz steht in nahem Zusammenhang mit dem analogen Satze bei Variationen mit Wiederholungen zu einer bestimmten Summe m. Die erste Classe dieser Variationen hat bloss eine Complexion, nämlich m selbst, die zweite Classe besteht aus den Variationen:

$$1, m-1;\quad 2, m-2;\quad 3, m-3;\ \ldots\quad m-2, 2;\quad m-1, 1;$$

und die Anzahl derselben ist $= m - 1$: die Anzahl der Variationen der dritten Classe findet sich $= \frac{m-1 \,.\, m-2}{1 \,.\, 2}$: u. s. w.: und weil

$$1 - (m-1) + \frac{m-1 \,.\, m-2}{1 \,.\, 2} - \ldots = (1-1)^{m-1} = 0\,,$$

so ist bei Variationen mit Wiederholungen zu einer bestimmten Summe, die Anzahl der Variationen in den geraden Classen der Variationszahl in den ungeraden Classen immer gleich, — statt dass bei Variationen zu einem bestimmten Product die eine Zahl bald der anderen gleich, bald um 1 grösser, bald um 1 kleiner als die andere war.

Die Variationen zu bestimmten Summen sind in den Schriften über die Combinationslehre zur Genüge behandelt worden, während über Variationen zu bestimmten Producten, wenigstens unter diesem Namen, noch keine Untersuchungen angestellt sein dürften. Gleichwohl ist aber auch von letzteren Variationen der Nutzen nicht zu verkennen, wie unter Anderem schon daraus hervorgeht, dass die Aufgabe, alle Variationen der n-ten Classe zum Product $\alpha^p \beta^q \gamma^r \ldots$ zu finden, ganz einerlei ist mit der Aufgabe, $p + q + r + \ldots$ Elemente, von denen p Elemente unter sich, q Elemente unter sich, u. s. w. gleich sind, auf alle mögliche Arten in n verschiedene Fächer zu vertheilen. Auf dieselbe Art ist auch die Bildung der n-ten Classe von Variationen zur Summe p offenbar nicht verschieden von der Forderung: p einander gleiche Elemente auf alle mögliche Arten in n Fächer zu vertheilen: woraus man zugleich ersieht, dass das Variiren zu einer bestimmten Summe als ein specieller Fall des Variirens zu einem bestimmten Producte betrachtet werden kann.

Der so eben erhaltene Satz von Variationen zu bestimmten Producten möchte vielleicht einer der merkwürdigsten in diesem noch nicht bebauten Felde der Combinationslehre sein. Obschon er nun durch die vorhergehenden Betrachtungen ganz bündig erwiesen ist, so will ich doch einen zweiten Beweis noch mittheilen, der in höherem Grade, als der vorige, auf der Natur der Variationen selbst beruht, und uns zugleich noch eine andere mit jener verwandte Eigenschaft dieser Variationen entdecken lassen wird.

§. 6. Sei das Product, zu welchem man Variationen bilden will, zuerst eine Potenz einer Primzahl, also $= a^p$, wo $p > 1$. Irgend eine Classe der Variationen zu diesem Product wird man erhalten, wenn man die ebensovielte Classe von Variationen zur Summe p

entwickelt, und die Elemente dieser Variationen zu Exponenten von α nimmt. So ergiebt sich z. B. die zweite Classe:

$$\alpha^1 . \alpha^{p-1}\ ,\quad \alpha^2 . \alpha^{p-2},\ \ldots\ \alpha^{p-2} . \alpha^2\ ,\quad \alpha^{p-1} . \alpha^1\ .$$

Die Anzahl der Variationen in der n-ten Classe zum Product α^p ist mithin der Variationenzahl der n-ten Classe zur Summe p gleich. Da nun, wie vorhin bemerkt worden, beim Variiren zu einer bestimmten Summe die Anzahl der Variationen in den geraden Classen der Anzahl der Variationen in den ungeraden gleich ist, so muss dasselbe auch beim Variiren zu einem Product gelten, welches eine Potenz einer Primzahl ist.

Werde jetzt die Anzahl von Variationen zu einem Product m, welche resp. in der ersten, zweiten, dritten, ... n-ten Classe enthalten sind, durch A_m, B_m, C_m, ... N_m bezeichnet. Sei n die Anzahl der einander sämmtlich oder nur theilweise gleichen, oder durchweg von einander verschiedenen Primzahlen, aus denen m zusammengesetzt ist; also die n-te Classe die höchste. Sei ferner α eine in m nicht mit enthaltene Primzahl, und werden die Mengen der Variationen zum Product $m\alpha$ nach den verschiedenen Classen, deren höchste die $(n+1)$-ste ist, gleicherweise durch $A_{m\alpha}$, $B_{m\alpha}$, ... $\overset{+1}{N}_{m\alpha}$ ausgedrückt. Alsdann wird sein

$$\begin{aligned}
A_{m\alpha} &= A_m = 1\ ,\\
B_{m\alpha} &= 2\,A_m + 2\,B_m\ ,\\
C_{m\alpha} &= 3\,B_m + 3\,C_m\ ,\\
&\quad\cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\\
N_{m\alpha} &= n\overset{-1}{N}_m + n\,N_m\ .\\
\overset{+1}{N}_{m\alpha} &= (n+1)\,N_m\ .
\end{aligned}$$

Denn die zweite Classe zum Product $m\alpha$ findet sich, indem man erstlich die erste Classe zum Product m, d. i. m selbst nimmt, und diesem das eine Mal α vor-, das andere Mal nachsetzt. Dies giebt:

$$2 = 2\,A_m\ \text{ Variationen: }\ \alpha,\, m\ \text{ und }\ m,\, \alpha\ .$$

Die übrigen Variationen der zweiten Classe zum Product $m\alpha$ erhält man aus den Variationen derselben Classe zum Product m, indem man von den zwei Elementen einer solchen Variation, — sie seien f, g, und daher $fg = m$, — das eine Mal das eine, das andere Mal das andere Element mit α verbindet: also $f\alpha . g$ und $f . g\alpha$. Jede dieser B_m Variationen giebt daher zwei, und sämmtliche B_m geben $2\,B_m$ Variationen der zweiten Classe zum Product $m\alpha$, so dass

die Anzahl aller dieser Variationen überhaupt

$$= 2A_m + 2B_m$$

ist. Eben so bekommt man aus jeder der B_m Variationen, wie $f.g$, drei:

$$\alpha.f.g\,,\quad f.\alpha.g\,,\quad f.g.\alpha\,,$$

und aus jeder der C_m Variationen, wie $h.i.k$, wenn $hik = m$ ist, ebenfalls drei, nämlich

$$h\alpha.i.k\,,\quad h.i\alpha.k\,,\quad h.i.k\alpha\,,$$

der $C_{m\alpha}$ Variationen; folglich u. s. w.

Addiren wir nun die obigen Gleichungen mit abwechselnden Zeichen und setzen das Aggregat, mit dessen Werthbestimmung wir uns jetzt beschäftigen:

$$A_m - B_m + C_m - \ldots \pm N_m = S_m\,,$$

und eben so

$$A_{m\alpha} - B_{m\alpha} + C_{m\alpha} - \ldots \mp \overset{+1}{N}_{m\alpha} = S_{m\alpha}\,,$$

so kommt

$$S_{m\alpha} = - S_m\,.$$

Nun ist nach dem Vorigen, und wenn α, β, γ, δ, ... von einander verschiedene Primzahlen bedeuten:

$$S_{\alpha^p} = 0\,,$$

folglich auch

$$S_{\alpha^p\beta} = 0\,,\quad \text{folglich } S_{\alpha^p\beta\gamma} = 0\,,\quad S_{\alpha^p\beta\gamma\delta} = 0\,,\quad \text{u. s. w.}$$

Ist ferner m eine Primzahl $= \alpha$, so sind

$$B_m,\ C_m,\ \ldots = 0\,,$$

folglich

$$S_\alpha = A_\alpha = 1\,,\quad S_{\alpha\beta} = - S_\alpha = - 1\,,\quad S_{\alpha\beta\gamma} = - S_{\alpha\beta} = 1\,,$$

u. s. w. — Alles übereinstimmend mit den schon oben auf andere Weise erhaltenen Resultaten.

§. 7. Es bleiben uns daher noch diejenigen Werthe von S_m zu bestimmen übrig, bei welchen m zwei oder mehrere Potenzen von Primzahlen zu Factoren hat. Sei zu dem Ende m eine beliebige Zahl, α eine in m nicht mit enthaltene Primzahl, und suchen wir

aus den Variationen zum Product m die Variationen zum Product ma^p herzuleiten. Zuerst ist

$$(1) \qquad A_{ma^p} = A_m \ .$$

Die zweite Classe zum Product ma^p wird sich ergeben:

Erstens aus der ersten Classe zum Product m, d. i. aus m allein, indem wir daraus Variationen von den Formen

$$ma^q \,.\, a^r \quad \text{und} \quad a^r \,.\, ma^q$$

ableiten, wo für q nach und nach die Werthe $0, 1, 2, \ldots p-1$, und für r die Werthe $1, 2, \ldots p$ zu setzen sind, jedoch so, dass immer $q + r = p$. Die Anzahl dieser Variationen, welche a heisse, wird offenbar eine bloss von p abhängige Zahl sein.

Zweitens aus der zweiten Classe zum Product m. Sei nämlich $f.g$ irgend eine Variation dieser Classe, also $fg = m$. Alle daraus fliessenden Variationen sind dann von der Form

$$fa^q \,.\, ga^r \,, \quad \text{wo} \quad q = 0, 1, 2, \ldots p \,, \quad r = 0, 1, 2, \ldots p \,,$$

und immer $q + r = p$ ist. Die Anzahl derselben wird mithin gleichfalls bloss von p abhängen, und heisse b. Eben so viel Variationen der zweiten Classe zu ma^p werden aber auch aus jeder anderen Variation der zweiten Classe zum Product m hervorgehen. Die Anzahl aller ersteren aus den letzteren entstehenden Variationen ist daher $= bB_m$; und folglich überhaupt

$$(2) \qquad B_{ma^p} = aA_m + bB_m \ .$$

Auf gleiche Art werden alle Variationen der dritten Classe zum Product ma^p aus den Variationen der drei ersten Classen zum Product m sich ergeben, und zwar aus jeder Variation einer und derselben Classe gleich viel, so dass wir setzen können:

$$(3) \qquad C_{ma^p} = a'A_m + b'B_m + c'C_m \ ,$$

wo a', b', c' nur von p abhängige Zahlen sind; b' z. B. die Menge derjenigen Variationen der dritten Classe zu ma^p, welche aus einer und derselben, gleichviel welcher, Variation der zweiten Classe zum Product m fliessen.

Eben so wird sein:

$$(4) \qquad D_{ma^p} = a''A_m + b''B_m + c''C_m + d''D_m \ ,$$

wo a'', b'', c'', d'' gleichfalls nur von p abhängen; u. s. w.

Man addire jetzt die Gleichungen (1), (2), (3), (4), u. s. w. mit abwechselnden Zeichen, und man erhält:

$$S_{ma^p} = (1 - a + a' - a'' + \ldots) A_m - (b - b' + b'' - \ldots) B_m$$
$$+ (c' - c'' + \ldots) C_m - (d'' - \ldots) D_m + \text{etc.}$$

Sei nun zuerst m eine Primzahl, so sind

$$A_m = 1 \;, \quad B_m, \; C_m, \; D_m, \; \ldots = 0 \;,$$

und, wie wir vorhin sahen, $S_{ma^p} = 0$, folglich nach gegenwärtiger Formel:

$$1 - a + a' - a'' + \ldots = 0 \;,$$

und auch dann noch $= 0$, wenn m keine Primzahl ist, weil $a, a', a'', \ldots$ bloss von p abhängen. Mithin ist allgemein:

$$S_{ma^p} = -(b - b' + b'' - \ldots) B_m + (c' - c'' + \ldots) C_m - (d'' - \ldots) D_m + \text{etc.}$$

Sei zweitens m ein Product aus zwei verschiedenen Primzahlen, so werden, B_m ausgenommen,

$$C_m, \; D_m, \; \ldots = 0 \;,$$

und da nach dem Vorigen auch für diesen Fall $S_{ma^p} = 0$ ist, so muss die von m unabhängige Zahl

$$b - b' + b'' - \ldots = 0$$

sein.

Eben so wird bewiesen, indem man m aus drei, vier und mehreren von einander verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt sein lässt, dass auch

$$c' - c'' + \ldots = 0 \;, \quad \text{u. s. w.}$$

Folglich ist allgemein

$$S_{ma^p} = 0 \;,$$

was auch m für eine ganze positive Zahl sein mag, und unser Satz ist somit von Neuem vollkommen dargethan.

§. 8. Um den letzten Theil dieses Beweises noch durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir $p = 2$ setzen. Hiermit findet sich:

$$A_{ma^2} = A_m \;,$$
$$B_{ma^2} = 4 A_m + 3 B_m \;,$$
$$C_{ma^2} = 3 A_m + 9 B_m + 6 C_m \;,$$
$$D_{ma^2} = \qquad 6 B_m + 16 C_m + 10 D_m \;,$$
$$E_{ma^2} = \qquad\qquad 10 C_m + 25 D_m + 15 E_m \;,$$

u. s. w. u. s. w.

In der That erhält man aus der ersten Classe zu m, d. i. aus m selbst, $4 = 4A_m$ Variationen der zweiten Classe zu $m\alpha^2$, nämlich

$$m\alpha^2\,,\quad \alpha^2.m\,,\quad m\alpha.\alpha\,,\quad \alpha.m\alpha\,,$$

und $3 = 3A_m$ Variationen der dritten Classe zu $m\alpha^2$, nämlich:

$$m.\alpha.\alpha\,,\quad \alpha.m.\alpha\,,\quad \alpha.\alpha.m\,,$$

keine Variationen aber der höheren Classen zu $m\alpha^2$, indem hierzu eine höhere Potenz von α, als die zweite, erforderlich ist.

Ist ferner $f.g$ eine der B_m Variationen, so bilden sich hieraus drei von den $B_{m\alpha^2}$ Variationen:

$$f\alpha^2.g\,,\quad f.g\alpha^2\,,\quad f\alpha.g\alpha\,;$$

9 von den $C_{m\alpha^2}$ Variationen:

$$\begin{array}{lll}
\alpha^2.f.g\,, & \alpha.f\alpha.g\,, & \alpha.f.g\alpha\,,\\
f.\alpha^2.g\,, & f\alpha.\alpha.g\,, & f.\alpha.g\alpha\,,\\
f.g.\alpha^2\,, & f\alpha.g.\alpha\,, & f.g\alpha.\alpha\,;
\end{array}$$

6 von den $D_{m\alpha^2}$ Variationen:

$$\begin{array}{lll}
\alpha.\alpha.f.g\,, & \alpha.f.\alpha.g\,, & f.\alpha.\alpha.g\,,\\
\alpha.f.g.\alpha\,, & f.\alpha.g.\alpha\,, & f.g.\alpha.\alpha\,;
\end{array}$$

keine aber von den höheren Classen zu $m\alpha^2$.

Aehnlicher Weise lassen sich auch die Coefficienten von C_m, D_m, ... in den obigen Gleichungen verificiren.

Die Anzahl dieser Gleichungen ist immer der Zahl der Variationen höchster Classe zum Product $m\alpha^p$, also der Anzahl aller einfachen Factoren dieses Products gleich, mithin $= p + q$, wenn m sich in q einfache Factoren auflösen lässt. Die q-te Classe ist die höchste, welche zum Product m gebildet werden kann, also die höchste, welche auf der rechten Seite der Gleichungen vorkommt. Sei z. B. wie vorhin $p = 2$, und enthalte m drei einfache Factoren, so reduciren sich die vorigen Gleichungen auf folgende fünf

$$\begin{array}{ll}
A_{m\alpha^2} = A_m\,, & \\
B_{m\alpha^2} = 4A_m + 3B_m\,, & \\
C_{m\alpha^2} = 3A_m + 9B_m + 6C_m\,, & \\
D_{m\alpha^2} = \phantom{3A_m +{}} 6B_m + 16C_m\,, & \\
E_{m\alpha^2} = \phantom{3A_m + 6B_m +{}} 10C_m\,. &
\end{array}$$

Addirt man dieselben mit abwechselnden Zeichen, so werden, übereinstimmend mit dem obigen allgemeinen Beweise, die Coefficienten von A_m, B_m, C_m einzeln gleich Null.

Dieses sich Aufheben der Coefficienten von $A_m, \ldots$ kann uns zur Aufstellung eines neuen Satzes Gelegenheit geben. Denn um anfangs nur die Coefficienten 3, 9, 6 von B_m zu berücksichtigen, so erhielten wir diese Zahlen als die Mengen von Variationen in der 2-ten, 3-ten und 4-ten Classe zum Product $fg\alpha^2$, wobei jedoch die Elemente f, g niemals in einem Factor mit einander verbunden vorkamen, auch ihre Folge, g nach f, immer dieselbe blieb. Ziehen wir auf gleiche Weise auch die Coefficienten von C_m, D_m, etc. in Betracht, setzen die Potenz von α allgemein $= p$, und nehmen, was hier auf die Menge der Variationen keinen Einfluss hat, die Zahlen $f, g, \ldots$ insgesammt einander gleich, jede $= \beta$, ihre Menge $= q$, so können wir den aus diesen Betrachtungen hervorgehenden Satz also ausdrücken:

Bildet man alle Variationen zum Product $\alpha^p\beta^q$, so jedoch, dass in keinem Factor einer dieser Variationen β in einer höheren Potenz, als der ersten, vorkommt, und ordnet man die Variationen nach Classen, wobei also die q-te die niedrigste, und die $(p+q)$-te die höchste Classe ist, so ist die Anzahl der Variationen in den geraden Classen der Anzahl in den ungeraden gleich.

§. 9. Aus der in §. 2. (C) erhaltenen merkwürdigen Reihe

$$x = \frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{1-x^2} - \frac{x^3}{1-x^3} - \frac{x^5}{1-x^5} + \frac{x^6}{1-x^6} - \ldots \quad (1$$

lassen sich eine unzählige Menge anderer summirbarer Reihen ableiten, von denen ich hier nur diejenigen anführen will, die ihrer Einfachheit halber mir von Interesse zu sein geschienen haben.

Durch Division mit x wird die Reihe

$$1 = \frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x^2} - \frac{x^2}{1-x^3} - \frac{x^4}{1-x^5} + \ldots \quad (1^*)$$

Hierin x negativ genommen, erhält man:

$$1 = \frac{1}{1+x} + \frac{x}{1-x^2} - \frac{x^2}{1+x^3} - \frac{x^4}{1+x^5} + \ldots,$$

und wenn man diese Gleichung Glied für Glied zu der vorigen addirt, dann mit 2 dividirt und zuletzt y für x^2 schreibt:

$$1 = \frac{1}{1-y} - \frac{y}{1-y^3} - \frac{y^2}{1-y^5} - \frac{y^3}{1-y^7} - \frac{y^5}{1-y^{11}} - \frac{y^6}{1-y^{13}} + \ldots \quad 2)$$

Jedes Glied dieser Reihe hat die Form $\pm \frac{y^{\frac{1}{2}(m-1)}}{1-y^m}$, wo m jede ungerade Zahl ist, die entweder eine Primzahl oder ein Product aus

mehreren verschiedenen Primzahlen ist. Das Vorzeichen bestimmt sich wie, im Vorigen, nach der geraden oder ungeraden Menge der Factoren von m.

Setzt man $-y$ für y, so geht (2) über in:

$$(3)\qquad 1 = \frac{1}{1+y} + \frac{y}{1+y^3} - \frac{y^2}{1+y^5} + \frac{y^3}{1+y^7} + \frac{y^5}{1+y^{11}} - \frac{y^6}{1+y^{13}} - \ldots,$$

wo die Glieder einerlei oder entgegengesetzte Vorzeichen mit den gleichstelligen Gliedern in (2) haben, je nachdem m von der Form $4p+1$ oder $4p-1$ ist.

Man addire (2) und (3), dividire durch 2 und setze z für y^2, so kommt:

$$(4)\qquad 1 = \frac{1}{1-z} - \frac{z^2}{1-z^3} - \frac{z}{1-z^5} - \frac{z^5}{1-z^7} - \frac{z^8}{1-z^{11}} - \frac{z^3}{1-z^{13}} + \ldots$$

Die Nenner und die Vorzeichen sind hier dieselben wie in (2), die Exponenten der Zähler aber $= \frac{1}{4}(m-1)$ oder $= \frac{1}{4}(3m-1)$, je nachdem m oder der Exponent im Nenner von der Form $4p+1$ oder $4p-1$ ist.

Nach demselben Verfahren, durch welches (2) aus (1*), und (4) aus (2) abgeleitet wurde, kann nun aus (4) eine neue Reihe, aus dieser abermals eine neue, und so fort ohne Ende, entwickelt werden.

Wir wollen jetzt in der Reihe (1), von welcher wir ausgegangen sind, x^2 für x schreiben, also:

$$(a)\qquad x^2 = \frac{x^2}{1-x^2} - \frac{x^4}{1-x^4} - \frac{x^6}{1-x^6} - \frac{x^{10}}{1-x^{10}} + \frac{x^{12}}{1-x^{12}} - \ldots$$

und dieses Ergebniss zu (1) addiren. Hiermit findet sich

$$(5)\qquad x + x^2 =$$

$$= \frac{x}{1-x} - \frac{x^3}{1-x^3} - \frac{x^4}{1-x^4} - \frac{x^5}{1-x^5} - \frac{x^7}{1-x^7} - \frac{x^{11}}{1-x^{11}} + \frac{x^{12}}{1-x^{12}} - \ldots,$$

eine Reihe, die sogleich aus (1) hervorgeht, wenn man alle in (1) vorkommenden geraden Exponenten verdoppelt.

Subtrahirt man (a) von (1) Glied für Glied, so kommt

$$(6)\qquad x - x^2 = \frac{x}{1-x^2} - \frac{x^2}{1-x^4} - \frac{x^3}{1-x^6} - \frac{x^5}{1-x^{10}} + \frac{x^6}{1-x^{12}} - \ldots,$$

und wenn man von (1) das Doppelte von (a) abzieht:

$$(7)\qquad x - 2x^2 = \frac{x}{1+x} - \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{x^3}{1+x^3} - \frac{x^5}{1+x^5} + \frac{x^6}{1+x^6} - \ldots$$

In wiefern sich diese zwei Reihen von (1) unterscheiden, fällt in die Augen und bedarf keiner Erörterung.

§. 10. Eine Transformation von noch anderer Art wird dadurch bewerkstelligt, dass man in (1)

$$x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\ , \quad \text{wo} \quad i = \sqrt{-1}\ ,$$

setzt. Hiermit wird

$$x^m = r^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi),\quad \frac{x^m}{1 - x^m} = \frac{r^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi) - r^{2m}}{1 - 2r^m\cos m\varphi + r^{2m}}\ ,$$

und man erhält, nachdem man für x diese Functionen von r und φ in (1) substituirt und hierauf das Reelle vom Imaginären abgesondert hat, folgende zwei Gleichungen:

$$r\cos\varphi = \frac{r\cos\varphi - r^2}{1 - 2r\cos\varphi + r^2} - \frac{r^2\cos 2\varphi - r^4}{1 - 2r^2\cos 2\varphi + r^4} - \text{etc.} \tag{8}$$

$$r\sin\varphi = \frac{r\sin\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2} - \frac{r^2\sin 2\varphi}{1 - 2r^2\cos 2\varphi + r^4} - \text{etc.} \tag{9}$$

Eine neue reichhaltige Quelle summirbarer Reihen eröffnet sich, wenn wir die allgemeineren Gleichungen (A) u. (A^*) des §. 2 zu Hülfe nehmen. Werden

$$a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ \ldots = 1$$

gesetzt, so sind

$$b_1 = 1\ ,\ b_2 = -1\ ,\ b_3 = -1\ ,\ b_4 = 0\ ,\ b_5 = -1\ ,\ b_6 = 1\ ,\ \text{u. s. w.}$$

und man hat daher allgemein, wenn

$$fx = Fx + 2^n F(x^2) + 3^n F(x^3) + 4^n F(x^4) + \ldots$$

ist,

$$Fx = fx - 2^n f(x^2) - 3^n f(x^3) - 5^n f(x^5) + 6^n f(x^6) - \ldots \tag{I}$$

Setzt man hierin*)

$$F(x) = x\ , \quad \text{und} \quad n = -1\ ,$$

so wird

$$f(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots = -\log(1 - x)\ ,$$

und daher

$$x = -\log(1 - x) + \frac{1}{2}\log(1 - x^2) + \frac{1}{3}\log(1 - x^3) + \frac{1}{5}\log(1 - x^5) - \ldots \tag{10}$$

Setzt man ferner

$$Fx = x - x^2 \quad \text{und} \quad n = -1\ ,$$

---

*) Vergl. hierzu Riemann im Jahrgange 1859 der *Berliner Monatsberichte* S. 679, und Thoman in den *Comptes rendus* der Pariser Akademie, nebst Bericht von Cauchy, Bd. 30, S. 162. A. d. H.

so wird

$$fx = x - x^2 + \frac{1}{2}(x^2 - x^4) + \frac{1}{3}(x^3 - x^6) + \dots$$
$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots = \log(1 + x),$$

folglich

$$(11) \quad x - x^2 = \log(1 + x) - \frac{1}{2}\log(1 + x^2) - \frac{1}{3}\log(1 + x^3) - \dots$$

Eben so wie (10) ist auch

$$y = -\log(1 - y) + \frac{1}{2}\log(1 - y^2) + \frac{1}{3}\log(1 - y^3) + \dots$$

und wenn diese Gleichung zu (10) addirt wird:

$$x + y = -\log(1 - x)(1 - y) + \frac{1}{2}\log(1 - x^2)(1 - y^2) + \dots$$

Man setze hierin

$$x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad y = r(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

und es kommt:

$$(12) \quad 2r\cos\varphi = -\log(1 - 2r\cos\varphi + r^2) + \frac{1}{2}\log(1 - 2r^2\cos 2\varphi + r^4) + \dots$$

Aus (10), (11), (12) folgt noch, wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet:

$$(13) \quad e^x = (1 - x)^{-1}(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}(1 - x^3)^{\frac{1}{3}}(1 - x^5)^{\frac{1}{5}}(1 - x^6)^{-\frac{1}{6}} \dots$$

$$(14) \quad e^{x - x^2} = (1 + x)(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}(1 + x^3)^{-\frac{1}{3}}(1 + x^5)^{-\frac{1}{5}} \dots$$

$$(15) \quad e^{2r\cos\varphi} = (1 - 2r\cos\varphi + r^2)^{-1}(1 - 2r^2\cos 2\varphi + r^4)^{\frac{1}{2}} \dots$$

§. 11. Man setze jetzt in (2) x^2 statt y und multiplicire die Gleichung mit x, so kommt:

$$x = \frac{x}{1 - x^2} - \frac{x^3}{1 - x^6} - \frac{x^5}{1 - x^{10}} - \frac{x^7}{1 - x^{14}} - \dots$$

Man hat aber

$$\frac{x}{1 - x^2} = x + x^3 + x^5 + x^7 + \dots$$

Wenn daher

$a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = 1, \quad a_6 = 0, \quad$ etc.,

so ist

$b_1 = 1, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = -1, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = -1, \quad b_6 = 0, \quad$ etc.,

und es ist mithin von den zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} fx &= Fx + 3^n F(x^3) + 5^n F(x^5) + 7^n F(x^7) + \dots \\ Fx &= fx - 3^n f(x^3) - 5^n f(x^5) - 7^n F(x^7) - 11^n f(x^{11}) - \dots \end{aligned} \quad \text{(II)}$$

eine jede eine Folge der anderen. Eben so fliessen aus (3) die beiden zusammengehörigen Gleichungen:

$$\begin{aligned} fx &= Fx - 3^n F(x^3) + 5^n F(x^5) - 7^n F(x^7) + \dots \\ Fx &= fx + 3^n f(x^3) - 5^n f(x^5) + 7^n f(x^7) + 11^n f(x^{11}) - \dots \end{aligned} \quad \text{(III)}$$

Nimmt man darin

$$Fx = x \quad \text{und} \quad n = -1 ,$$

so wird

$$fx = x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \dots = \text{arc tang } x ,$$

folglich

$$x = \text{arc tang } x + \frac{1}{3} \text{arc tang } (x^3) - \frac{1}{5} \text{arc tang } (x^5) + \frac{1}{7} \text{arc tang } (x^7) + \frac{1}{11} \text{arc tang } (x^{11}) - \dots \quad (16)$$

Die Zahlen 3, 5, 7, 11, ... sind hierbei alle ungeraden Zahlen, die entweder selbst Primzahlen oder Producte aus verschiedenen Primzahlen sind. Jedes Glied, dessen Zahl ein Product aus einer ungeraden Menge von Primzahlen und von der Form $4p - 1$, oder aus einer geraden Menge und von der Form $4p + 1$ ist, hat das positive Zeichen, die übrigen Glieder das negative.

Erwägt man dabei, dass wenn Zahlen, die zum Theil von der Form $4p + 1$, zum Theil von der Form $4p - 1$ sind, in einander multiplicirt werden, das Product entweder von der ersten oder der zweiten Form ist, je nachdem die Factoren der zweiten Form in gerader oder in ungerader Anzahl vorhanden sind; dass folglich sowohl ein Product von der Form $4p - 1$, welches eine ungerade Anzahl von Factoren hat, als ein Product von der Form $4p + 1$, dessen Factorenzahl gerade ist, eine gerade Zahl Factoren, jeden von der Form $4p + 1$, haben muss: so sieht man leicht, dass die Coefficienten der Reihe (16) nichts Anderes sind, als alle die einzelnen aus der Multiplication von

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 + \frac{1}{7}\right)\left(1 + \frac{1}{11}\right)\left(1 - \frac{1}{13}\right)\left(1 - \frac{1}{17}\right) \dots$$

hervorgehenden Producte, wo die Nenner der Brüche alle ungeraden Primzahlen sind, und die Brüche das positive oder negative Vorzeichen haben, je nachdem der Nenner von der Form $4p - 1$ oder $4p + 1$ ist.

Die jetzt erhaltenen Reihen (10), (11), (12) und (16) lassen sich auch sehr einfach durch Integration aus den vorhergehenden ableiten,

z. B. (10) aus (1), wenn man (1) vorher durch x dividirt und mit dx multiplicirt. Indessen schien es mir zweckmässiger, statt der Integralrechnung ein auf der hier vorgetragenen Reversionsmethode selbst beruhendes Princip zu gebrauchen.

§. 12. Den Schluss dieses Aufsatzes mögen einige numerische Anwendungen der entwickelten Reihen machen. Die Reihe (1) erhält, indem man $\frac{1}{v}$ für x schreibt, die etwas einfachere Form:

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v-1} - \frac{1}{v^2-1} - \frac{1}{v^3-1} - \frac{1}{v^5-1} + \frac{1}{v^6-1} - \dots$$

Setzt man hierin $v = 10$, so kommt:

$$(17) \qquad \frac{1}{10} = \frac{1}{9} - \frac{1}{99} - \frac{1}{999} - \frac{1}{99999} + \frac{1}{999999} - \dots$$

folglich

$$\frac{9}{10} = 1 - \frac{1}{11} - \frac{1}{111} - \dots, \quad 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{11} + \frac{1}{111} + \dots,$$

d. i.

$$(18) \qquad \frac{1}{10} = \frac{1}{11} + \frac{1}{111} + \frac{1}{11111} - \frac{1}{111111} + \dots$$

Hiermit ist die doppelte Aufgabe gelöst: *den Bruch $\frac{1}{10}$ als ein Aggregat von Brüchen darzustellen, deren Zähler $= 1$, und deren Nenner das eine Mal bloss mit der Ziffer 9, das andere Mal bloss mit der Ziffer 1 geschrieben werden.* Das in der einen und der anderen Reihe herrschende Gesetz geht unmittelbar aus (1) hervor. Auch ist es leicht, sich durch Rechnung zu überzeugen, dass keine der beiden Aufgaben noch auf andere Weise gelöst werden kann.

Man setze noch in der für $\frac{1}{v}$ erhaltenen Reihe

$$v = 1 + w,$$

wo w eine unendlich kleine Grösse bedeute, so kommt, wenn man in der Entwickelung bloss die erste Potenz von w beibehält

$$\frac{1}{1+w} = \frac{1}{w} - \frac{1}{2w} - \frac{1}{3w} - \frac{1}{5w} + \frac{1}{6w} - \dots;$$

folglich, wenn man mit w multiplicirt:

$$(19) \qquad 0 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} - \dots$$

Aus der uns schon bekannten Beschaffenheit der Vorzeichen

und der Nenner dieser Reihe ersehen wir ohne Schwierigkeit, dass die Reihe sich auch als ein Product aus den Factoren

$$1 - \frac{1}{2}, \quad 1 - \frac{1}{3}, \quad 1 - \frac{1}{5}, \quad 1 - \frac{1}{7}, \quad \text{etc.}$$

darstellen lässt, wo 2, 3, 5, 7, ... die Reihe der sämmtlichen Primzahlen ist. Hiermit wird

$$0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{16}{17} \cdots \tag{20}$$

Ein Product aus allen Brüchen, deren Nenner die sämmtlichen Primzahlen sind, und deren Zähler um 1 *kleiner als die Nenner sind, hat daher Null zum Grenzwerth.* — Dieses Resultat*) findet sich auch in Euler's *Introductio*, Tom. I, in dem Kapitel *de seriebus ex evolutione factorum ortis*, §. 277, Exempl. I.

§. 13. Setzt man auf gleiche Weise in (13)

$$x = 1 - w,$$

so kommt, mit Weglassung der höheren Potenzen von w:

$$e^{1-w} = w^{-1} (2w)^{\frac{1}{2}} (3w)^{\frac{1}{3}} \ldots = w^{-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \ldots$$

Da nun das Product auf der rechten Seite dieser Gleichung dem Gliede mit der niedrigsten Potenz von w in der Entwickelung von e^{1-w} gleich sein muss, und

$$e^{1-w} = e \cdot e^{-w} = e(1 - w + \ldots)$$

ist, so muss gedachtes Product $= e$ selbst, also unabhängig von w sein. Dieses ist aber nicht anders möglich, als wenn

$$-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots = 0,$$

wie schon vorhin gefunden wurde; folglich

$$e = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{5}} \cdot 6^{-\frac{1}{6}} \cdot 7^{\frac{1}{7}} \cdot 10^{-\frac{1}{10}} \cdot 11^{\frac{1}{11}} \ldots$$

Zieht man demnach aus jeder Zahl, welche eine Primzahl oder ein Product aus mehreren verschiedenen Primzahlen ist, die ebensovielte Wurzel, als die Zahl Einheiten hat, und multiplicirt die aus allen den Zahlen, welche Producte aus einer geraden Menge von Primzahlen sind, gezogenen Wurzeln in einander, desgleichen die Wurzeln aus allen den Zahlen, welche entweder Primzahlen selbst, oder Producte aus einer ungeraden Menge von Primzahlen sind: so giebt die Division des ersteren Products in das letztere die Basis der natürlichen Logarithmen.

*) [aus welchem sich beiläufig folgern lässt, dass es unendlich viele Primzahlen geben muss.]

Um mich einigermaassen über die Annäherung zu belehren, mit welcher man auf diese Weise e berechnen kann, bin ich in der Factorenreihe bis zu $51^{-\frac{1}{51}}$ fortgegangen und habe damit $e = 2{\cdot}7258$ gefunden. Der wahre Werth ist $e = 2{\cdot}7183$, und daher das Product aus den von $53^{-\frac{1}{53}}$ an weggelassenen Factoren

$$= \frac{2{\cdot}7183}{2{\cdot}7258} = \frac{1}{1{\cdot}0018}\,.$$

Jener sonderbare Ausdruck für e, und zugleich eine andere, noch merkwürdigere Formel, lässt sich auch aus (15) herleiten. Setzt man darin $r = 1$ und $\varphi = 2\psi$, so kommt:

$$e^{2\cos 2\psi} = (2 - 2\cos 2\psi)^{-1}(2 - 2\cos 4\psi)^{\frac{1}{2}} \ldots$$

$$= 4^{-1+\frac{1}{2}+\cdots}(\sin\psi^2)^{-1}(\sin 2\psi^2)^{\frac{1}{2}} \ldots,$$

folglich, weil $-1 + \frac{1}{2} + \ldots = 0$, und wenn man beiderseits die Quadratwurzel auszieht:

$$(22)\qquad e^{\cos 2\psi} = \sin\psi^{-1}\sin 2\psi^{\frac{1}{2}}\sin 3\psi^{\frac{1}{3}}\sin 5\psi^{\frac{1}{5}}\sin 6\psi^{-\frac{1}{6}} \ldots$$

Nimmt man nun hierin ψ unendlich klein, setzt also

$$\cos 2\psi = 1 \quad \text{und} \quad \sin\psi = \psi\,, \quad \sin 2\psi = 2\psi\,, \quad \text{etc.}\,,$$

so erhält man, weil

$$\psi^{-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots} = 1$$

ist, denselben Ausdruck für e, wie vorhin.

Noch folgt aus dieser Gleichung, wenn man von beiden Seiten die Logarithmen nimmt:

$$(23)\quad \cos 2\psi = -\log\sin\psi + \frac{1}{2}\log\sin 2\psi + \frac{1}{3}\log\sin 3\psi + \frac{1}{5}\log\sin 5\psi - \ldots$$

Endlich setze man in (16) $x = 1$; hierdurch wird

$$\text{arc tang}\, x = \text{arc tang}\,(x^2) = \text{etc.} = \frac{1}{4}\pi\,,$$

π in der bekannten Bedeutung genommen, und damit

$$(24)\qquad \frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} - \frac{1}{17} + \text{etc.}\,,$$

eine Formel, welche, mit Berücksichtigung des oben zu (16) Bemerkten, ganz mit der von Euler in dem vorhin angeführten Kapitel der *Introductio* §. 285 gegebenen Formel

$$(25)\qquad \frac{4}{\pi} = \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{23}{24}\ldots$$

identisch ist.

Geometrische Eigenschaften einer Factorentafel.

Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. XXII, S. 276—281. 1841.



Man theile die Ebene des Papiers durch horizontale und verticale Linien in quadratförmige Fächer. In die oberste horizontale Fächerreihe schreibe man von der Rechten nach der Linken die Zahlen 0, 1, 2, 3, ... in ihrer natürlichen Ordnung. Wir wollen diese Reihe die Hauptreihe nennen. In jedes Fach der darunter liegenden horizontalen Reihe schreibe man 1. In jedes Fach der nächstfolgenden Reihe, welches unter einer Zahl der Hauptreihe liegt, die durch 2 theilbar ist, setze man 2. Eben so schreibe man in alle Fächer der folgenden Reihe, welche unter den durch 3 theilbaren Zahlen der Hauptreihe liegen, die Zahl 3. u. s. w. (Siehe Fig. I.)

Auf solche Weise erhält man eine Factorentafel, indem unter jede Zahl der Hauptreihe in verticaler Linie keine anderen Zahlen, als die Factoren jener Zahl, sie selbst und die Einheit mit gerechnet, zu stehen kommen.

Eine solche Anordnung der Factoren, die für die Praxis allerdings nicht die geeignetste, in theoretischer Hinsicht aber die naturgemässeste sein dürfte, besitzt nun zugleich mehrere merkwürdige geometrische Eigenschaften. Die Entwickelung derselben ist der Zweck dieses Aufsatzes.

Es werde deshalb vorläufig bemerkt, dass, wenn im Folgenden gesagt wird, eine Linie gehe durch eine gewisse Zahl, oder eine Zahl liege in einer gewissen Linie, unter der Zahl immer nur der Mittelpunkt des Feldes verstanden werden soll, in welchem die Zahl sich befindet. Um ferner die unter sich gleichen Zahlen einer und derselben Horizontalreihe ihrem Orte nach von einander zu unterscheiden, soll hier im Texte an jede Zahl als Index noch die Zahl der Hauptreihe beigefügt werden, unter welcher erstere anzutreffen ist. Hiernach werden z. B. die Dreien in der 3-ten Reihe unter der Hauptreihe charakterisirt durch 3_0; 3_3, 3_6, 3_9, u. s. w., und all-

gemein die Zahl a in der a-ten Reihe durch

$$a_0,\ a_a,\ a_{2a},\ a_{3a},\ \dots\ a_{ma},\ \dots$$

weil sie unter den Zahlen

$$0,\ a,\ 2a,\ 3a,\ \dots\ ma,\ \dots$$

der Hauptreihe stehen. Zugleich sieht man hieraus, wie der Index einer Zahl immer sie selbst zum Factor hat, und wie eine Zahl und ihr Index als Ordinate und Abscisse des Mittelpunktes des Feldes

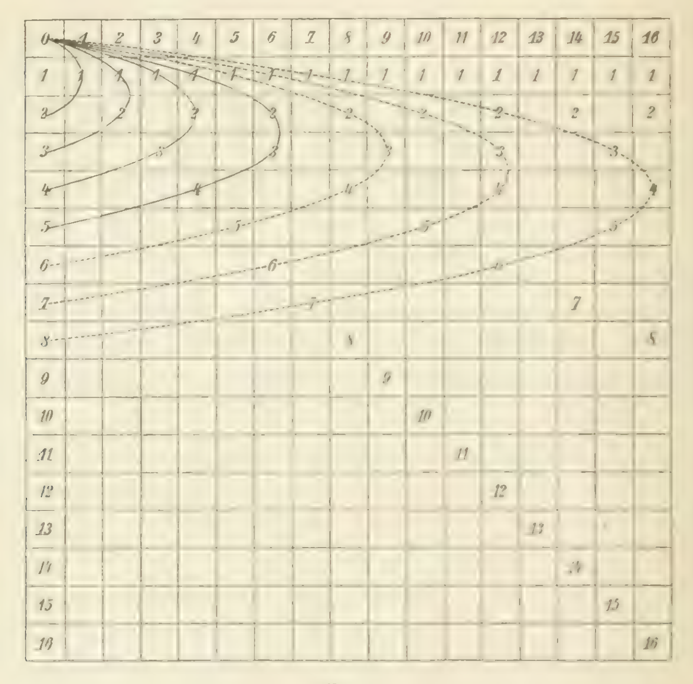


Fig. 1.

der Zahl gelten können, indem man die horizontale Mittellinie der Hauptreihe zur Abscissenlinie, den Mittelpunkt des Feldes, welches die Null enthält, zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystems, und die Seite eines der quadratischen Felder zur Linieneinheit wählt.

Die Grundeigenschaft der Factorentafel, aus welcher sich alle übrigen herleiten lassen, besteht nun darin, *dass die Gerade durch zwei Zahlen a_{ma} und b_{nb} in verschiedenen Horizontallinien, und die Gerade durch die gleichvielten in diesen Reihen darauf folgenden*

Zahlen $a_{(m+r)a}$ und $b_{(n+r)b}$, die Abscissenlinie in demselben Punkte treffen.

In der That haben die Zahlen a_{ma} und $a_{(m+r)a}$ gleiche Ordinaten, gleich a, und die Differenz ihrer Abscissen ist $= ra$, d. h. jede von ihnen ist um eine Weite $= a$ von der Abscissenlinie entfernt, und ihr gegenseitiger Abstand ist $= ra$. Eben so ist jede der Zahlen b_{nb} und $b_{(n+r)b}$ um b von der Abscissenlinie entfernt, und ihr gegenseitiger Abstand ist $= rb$. Es verhalten sich daher ihre gegenseitigen Abstände ra und rb wie ihre Entfernungen a und b von der Abscissenlinie; woraus das Uebrige von selbst fliesst.

Eine unmittelbare Folge hiervon ist, dass, wenn drei oder mehrere an sich verschiedene Zahlen in einer Geraden sind, man wiederum auf Zahlen in einer Geraden kommen wird, wenn man von jeder der ersteren in ihrer Horizontalreihe um gleich viel Zahlen nach einerlei Seite zu weiter geht, und dass beide Gerade sich in der Abscissenlinie schneiden. So müssen z. B., weil die Zahlen $1_0, 2_0, 3_0, 4_0, \cdots$ in einer Verticalen unter dem Nullpunkte liegen, auch die Zahlen

$$1_1,\ 2_2,\ 3_3,\ 4_4,\ \cdots$$

desgleichen

$$1_2,\ 2_4,\ 3_6,\ 4_8,\ \cdots$$

$$1_3,\ 2_6,\ 3_9,\ 4_{12},\ \cdots$$

u. s. w.

in Geraden liegen, welche sämmtlich auf den Nullpunkt treffen. Man sieht hieraus, wie alle Zahlen der Tafel in Reihen, deren jede die Zahlen 1, 2, 3, ... in der natürlichen Folge enthält, und welche vom Nullpunkte divergirend ausgehen, sich zusammennehmen lassen. Auch bieten sich diese Reihen beim ersten Anblicke der Tafel dar.

Die unter einer Zahl der Hauptreihe, etwa unter 8, stehenden Zahlen $1_8, 2_8, 4_8, 8_8$, oder $1_{8.1}, 2_{4.2}, 4_{2.4}, 8_{1.8}$ sind die Factoren jener Zahl 8. Es müssen daher mit 8 in gerader Linie auch die Zahlen

$$1_{(8+r)1},\ 2_{(4+r)2},\ 4_{(2+r)4},\ 8_{(1+r)8}$$

sein, und keine anderen; also, wenn wir r nach und nach gleich $-2, -1, 1, 2, \ldots$ setzen, die Zahlen:

$$1_6,\ 2_4,\ 4_0;\qquad 1_7,\ 2_6,\ 4_4,\ 8_0;$$

$$1_9,\ 2_{10},\ 4_{12},\ 8_{16};\ 1_{10},\ 2_{12},\ 4_{16},\ 8_{24};\ \text{u. s. w.}$$

Eine Gerade, die man durch eine Zahl (8) der Hauptreihe und einen ihrer Factoren zieht, — stehe dieser vertical unter ihr, oder

seitwärts (2_{12}). — trifft daher auch die übrigen Factoren $(1_{16}, 4_{16}, 8_{24})$, und keine anderen Zahlen: oder, was zum Theil dasselbe sagt:

Eine Gerade, gelegt durch irgend eine Zahl a_{ma} der Tafel und durch eine der Zahlen der Hauptreihe, welche ein Vielfaches von a ist, wie $a.b$, trifft die vervielfachende Zahl b_{nb}.

Der Coefficient n im Index nb von b ist offenbar eine von a, b und m abhängige Zahl. Um diese Abhängigkeit zu bestimmen, erwäge man, dass mit der Zahl ab der Hauptreihe die Zahlen a_{ba} und b_{ab} ebenfalls in einer Geraden liegen, nämlich in einer Verticalen, weil die Indices letzterer Zahlen der Zahl ab der Hauptreihe selbst gleich sind. Es müssen daher in der horizontalen Reihe der a zwischen a_{ba} und a_{ma} eben so viele a, als b in der Reihe der b zwischen b_{ab} und b_{nb}, vorkommen, d. h. es muss

$$m - b = n - a \text{ sein, wodurch } n = m + a - b$$

wird. Die Gerade durch die Zahl a_{ma} und durch ihr Vielfaches ab in der Hauptreihe, trifft demnach die vervielfachende Zahl $b_{(m+a-b)b}$.

Die Geraden, welche die Zahl a_{ma} mit den Zahlen $1a$, $2a$, $3a$, ... aa, ... der Hauptreihe verbinden, treffen daher resp. die Zahlen

$$(A) \qquad 1_{m+a-1}, \quad 2_{(m+a-2)2}, \quad 3_{(m+a-3)3}, \quad \ldots \quad a_{ma}, \quad \text{etc.}$$

Man kann die somit nach ihrer Stellung in der Tafel bestimmten Zahlen 1, 2, 3, 4, ... die zur Zahl a_{ma} gehörigen Zahlen nennen. Sie gehören ihr aber nach dem Gesetze zu, dass eine Gerade, welche eine der ersteren mit der letzteren verbindet, die Hauptreihe in dem Producte beider trifft, wobei noch zu bemerken ist, dass die zu a_{ma} gehörige Zahl a auch dem Orte nach mit ersterer zusammenfällt.

Soll die Zahl b_{nb} zur Zahl a_{ma} gehören, so muss, dem Vorigen zufolge,

$$m + a = n + b$$

sein: und eben so muss, wenn a_{ma} und c_{pc} zusammengehörige Zahlen sein sollen,

$$m + a = p + c$$

sein. Gehört demnach jede von zwei Zahlen b_{nb} und c_{pc} zu einer und derselben dritten a_{ma}, so ist auch

$$n + b = p + c ,$$

und sie gehören folglich auch zu einander: oder mit anderen Worten, wenn die zwei Geraden, welche eine Zahl a der Tafel mit zwei anderen Zahlen b und c derselben verbinden, die Hauptreihe in den Producten ab und ac treffen, so begegnet auch die Gerade durch b und c der Hauptreihe in dem Producte bc.

Hiernach sind je zwei Zahlen der Reihe (A) zusammengehörige Zahlen, da jede von ihnen zu a_{ma} gehört, und die Reihe besitzt folglich die merkwürdige Eigenschaft, dass die Gerade, welche irgend zwei Zahlen derselben verbindet, die Hauptreihe stets in dem Producte der Zahlen trifft.

Dergleichen Reihen sind, wenn man $m + a$ nach und nach gleich 6, 7, 8 setzt:

$$1_5, \quad 2_8, \quad 3_9, \quad 4_8, \quad 5_5, \quad 6_0; \qquad (a)$$

$$1_6, \quad 2_{10}, \quad 3_{12}, \quad 4_{12}, \quad 5_{10}, \quad 6_6, \quad 7_0; \qquad (b)$$

$$1_7, \quad 2_{12}, \quad 3_{15}, \quad 4_{16}, \quad 5_{15}, \quad 6_{12}, \quad 7_7, \quad 8_0. \qquad (c)$$

Schon hieraus erhellet zur Genüge, dass man in solchen Reihen alle Zahlen der Tafel zusammenfassen kann, und dass dabei keine Zahl zwei oder mehreren Reihen gemeinschaftlich ist. Denn aus den Zahlen der Reihe (a) ergeben sich die von (b), und aus letzteren die von (c), wenn man die Indices von 1, 2, 3, ... resp. um 1, 2, 3, ... vergrössert, d. h. wenn man statt jeder Zahl die ihr in der Horizontalreihe, worin sie steht, zunächstfolgende setzt.

Was noch die geometrische Gestalt der Reihe (A) anlangt, so lässt sich leicht zeigen, dass alle ihre Zahlen durch eine Parabel verbunden werden können. Da nämlich der Ort einer Zahl durch die Zahl selbst als Ordinate (y) und durch ihren Index als Abscisse (x) bestimmt wird, so hat man zufolge des allgemeinen Ausdruckes für eine Zahl der Reihe:

$$y = h, \quad x = (c - h) h,$$

wo der Kürze wegen c statt des vorigen $m + a$ gesetzt worden ist. Hieraus folgt aber, nach Elimination des veränderlichen h:

$$x = cy - yy \quad \text{oder} \quad x - \frac{1}{4} cc = - \left(\frac{1}{2} c - y \right)^2,$$

welches die Gleichung für eine Parabel ist, deren Parameter $= 1$, gleich der Seite eines der quadratförmigen Felder der Tafel ist, deren Axe parallel mit der Abscissenlinie, d. i. mit der Hauptreihe ist und nach der entgegengesetzten Richtung derselben läuft, und deren Scheitel die Coordinaten $x = \frac{1}{4} cc$ und $y = \frac{1}{2} c$ hat.

Alle Zahlen der Tafel lassen sich demnach in Parabeln zusammenfassen, deren jede die Zahlen von 1 *an in ihrer natürlichen Folge enthält. Jede dieser Parabeln hat einen Parameter* $= 1$ *und eine der Hauptreihe parallele Axe, und geht durch den Nullpunkt der Hauptreihe. Alle zu einer und derselben Parabel gehörigen Zahlen sind aber so gestellt, dass die durch irgend zwei derselben gelegte*

Gerade die Hauptreihe in dem Producte beider trifft, und dass folglich, wenn man eine Zahl mit ihr selbst verbindet, d. h. in dem Punkte der Zahl an die Parabel eine Tangente legt, dieselbe der Hauptreihe in dem Quadrate der Zahl begegnet).*

Das letztere Resultat kann auch unmittelbar aus folgendem leicht erweislichen Satze hergeleitet werden. Zieht man in der Ebene einer Parabel zwei Gerade, von denen die eine parallel mit der Axe ist und daher die Parabel nur in einem Punkte C schneidet, die andere der Parabel in zwei Punkten A und B, und der ersteren Geraden im Punkte D begegnet, so ist das Product aus den Entfernungen der Punkte A und B von der ersteren Geraden gleich dem Producte aus dem Abschnitte CD der ersteren in den Parameter.

Mit Hülfe dieses Satzes erhellet zugleich noch die Richtigkeit des folgenden, welcher als der duale Gegensatz des vorhin gewonnenen Resultats angesehen werden kann:

Alle Zahlen der Tafel lassen sich in gerade Linien zusammenfassen, deren jede die Zahlen von 1 an in ihrer natürlichen Folge enthält. Jede dieser Geraden geht durch den Nullpunkt der Hauptreihe. Alle zu einer und derselben Geraden gehörigen Zahlen sind aber so gestellt, dass eine durch irgend zwei derselben gelegte Parabel, welche einen Parameter = 1 und eine der Hauptreihe parallele Axe hat, die Hauptreihe in dem Producte beider trifft, und dass folglich, wenn man eine Parabel von derselben Grösse und Lage gegen die Hauptreihe, berührend an eine der geradlinigen Reihen legt, sie der Hauptreihe in dem Quadrate der Zahl begegnet, in welcher sie die geradlinige berührt.

*) Man könnte hiernach eine Parabel in Verbindung mit einer Geraden, beide auf die oben beschriebene Weise eingetheilt, auch als *Multiplicationsmaschine* benutzen. Ein Lineal, gelegt durch die Theilpunkte der Parabel, an welchen die Factoren stehen, würde die Gerade in dem Theilpunkte des Products treffen.

Bei dieser Gelegenheit mag noch bemerkt werden, dass zu demselben Zwecke statt der Parabel auch zwei Gerade, die eine für den einen, die andere für den anderen Factor, angewendet werden könnten. Es gründet sich dieses darauf, dass man, wenn die drei Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks von einer vierten Geraden resp. in F, G, H geschnitten werden und

$$\frac{BF}{CF} = f, \quad \frac{CG}{AG} = g, \quad \frac{BH}{AH} = h$$

gesetzt wird, $fg = h$ hat. Schreibt man daher an jeden Punkt F der Linie BC die durch seine Lage gegen B und C bestimmte Zahl f, eben so an jeden Punkt G der Linie CA die Zahl g, und an jeden Punkt H der Linie AB die Zahl h, so wird ein durch irgend zwei Zahlen der Linien BC und CA gelegtes Lineal die Linie AB stets in dem Producte dieser Zahlen schneiden.

Zusätze. *a*) Da die Coordinaten des Scheitels einer der zuerst gedachten Parabeln

$$x = \frac{1}{4} cc \quad \text{und} \quad y = \frac{1}{2} c$$

sind, so liegen die Scheitel aller dieser Parabeln wiederum in einer Parabel, deren Gleichung $x = yy$ ist, also einer Parabel, deren Parameter ebenfalls $= 1$ ist, deren Axe mit der Abscissenlinie zusammenfällt und die positive Richtung, also die entgegengesetzte der Axen der vorigen Parabeln, hat, und deren Scheitel der Nullpunkt ist.

b) Für die vorigen Parabeln hat c die Werthe 1, 2, 3, ..., und es werden daher die Scheitel derjenigen unter ihnen auf Zahlen der Tafel fallen, für welche c eine gerade Zahl ist. Diese Tafelzahlen sind:

$$0_0\,,\quad 1_1\,,\quad 2_4\,,\quad 3_9\,,\quad 4_{16}\,,\quad \cdots \qquad (\alpha)$$
$$\text{für } c = 0\,,\quad 2\,,\quad 4\,,\quad 6\,,\quad 8\,,\quad \ldots$$

Hiermit haben wir zugleich eine neue Reihe (α) von Zahlen kennen gelernt, welche eine Parabel bilden.

c) So wie aus den Zahlen einer der vorigen Parabeln die Zahlen der nächstfolgenden oder vorhergehenden gefunden wurden, indem der Index jeder Zahl um die Zahl selbst vermehrt oder vermindert wurde, so können wir auch aus der Reihe (α) neue Reihen in Parabeln liegender Zahlen ableiten. Die aus der Vermehrung der Indices entstehenden Reihen sind:

$$1_2\,,\quad 2_6\,,\quad 3_{12}\,,\quad 4_{20}\,,\ \cdots;\quad 1_3\,,\quad 2_8\,,\quad 3_{15}\,,\quad 4_{24}\,,\ \cdots;\quad \text{u. s. w.}$$

die aus der Verminderung entstehenden:

$$1_0\,,\quad 2_2\,,\quad 3_6\,,\quad 4_{12}\,,\ \cdots;\quad 2_0\,,\quad 3_3\,,\quad 4_8\,,\ \cdots;\ \text{u. s. w.}$$

und allgemein:

$$1_{c+1}\,,\quad 2_{(c+2)2}\,,\quad 3_{(c+3)3}\,,\ \cdots\,, \qquad (\beta)$$

wo c auch negativ genommen werden kann; nur dürfen dadurch die Indices nicht negativ werden, so lange wir nicht die Grenzen der im Vorigen construirten Tafel überschreiten wollen.

Wie man sieht, werden auch durch diese Reihen alle Zahlen der Tafel erschöpft. Die allgemeine Gleichung ihrer Parabeln ist:

$$x = cy + yy \quad \text{oder} \quad x + \frac{1}{4} cc = \left(\frac{1}{2} c + y\right)^2 .$$

Von allen Parabeln dieses neuen Systems sind daher die Parameter gleichfalls $= 1$; die Axen sind mit der Abscissenlinie parallel und haben die positive Richtung derselben; von den Scheiteln sind die Coordinaten

$$x = -\frac{1}{4} cc\,,\quad y = -\frac{1}{2} c\,.$$

die Scheitel selbst liegen daher in einer Parabel, deren Gleichung $yy = -x$ ist und fallen somit über die Grenze unserer Tafel hinaus; endlich gehen auch hier sämmtliche Parabeln, verlängert, durch den Nullpunkt.

d) Um uns von der gegenseitigen Beziehung zwischen diesem neuen und dem vorigen Systeme von Parabeln eine anschaulichere Vorstellung zu verschaffen, wollen wir uns zwei Parabeln N und P denken, deren jede einen Parameter $= 1$ hat, deren Axen in die Abscissenlinie fallen, die der N in die negative Seite, die der P in die positive, und welche den Anfangspunkt der Abscissen zum gemeinschaftlichen Scheitel haben. Wird nun die Parabel N so fortbewegt, dass ihre Axe sich parallel bleibt, und ihr Scheitel in der Parabel P fortgeht, so kommt sie nach und nach in die Lage aller Parabeln des ersten Systems; wird aber die Parabel P parallel mit sich fortbewegt, so dass ihr Scheitel die Parabel N beschreibt, so coincidirt sie nach und nach mit allen Parabeln des zweiten Systems.

e) Da die Parabeln des zweiten Systems eben so gegen die negative Seite der Abscissenlinie gelegen sind, wie die des ersten Systems gegen die positive Seite, so wird eine Gerade durch zwei Zahlen der Tafel, die zu einer Parabel des zweiten Systems gehören, der Abscissenlinie in ihrer Verlängerung über den Nullpunkt nach der Linken begegnen, und zwar ebenfalls in dem Producte der beiden Zahlen, wenn die Zahlen der Hauptreihe über Null hinaus nach der Linken weiter fortgesetzt werden.

f) Ausser den bisher betrachteten beiden Systemen von Parabeln lassen sich die Zahlen der Tafel noch auf unzählig viele andere Arten in Parabeln von kleineren Parametern zusammenfassen. Dies zeigt sich am leichtesten, wenn man die geradlinige Reihe

$$(0)\qquad 0_0,\quad 1_c,\quad 2_{2c},\quad 3_{3c},\ \cdots\quad a_{ac},\ \cdots$$

mit der parabolischen Reihe

$$(\mathrm{I})\qquad 0_0,\quad 1_{c-1},\quad 2_{2(c-2)},\quad 3_{3(c-3)},\ \cdots\ a_{a(c-a)},\ \cdots$$

vergleicht. Man erkennt sogleich, dass man von den Zahlen 1, 2, 3, ... der Reihe (0) zu denselben Zahlen der Reihe (I) gelangt, wenn man in den horizontalen Reihen dieser Zahlen um 1, 4, 9, ... aa, ... Felder weiter zurückgeht. Man kann nun nach demselben Gesetze aus der Reihe (I) eine dritte (II), aus dieser eine vierte (III), u. s. w. ableiten. Dies giebt die Reihen:

$$(\mathrm{II})\qquad 0_0,\quad 1_{c-2},\quad 2_{2(c-4)},\quad 3_{3(c-6)},\ \cdots\ a_{a(c-2a)},\ \cdots$$

$$(\mathrm{III})\qquad 0_0,\quad 1_{c-3},\quad 2_{2(c-6)},\quad 3_{3(c-9)},\ \cdots\ a_{a(c-3a)},\ \cdots$$

und überhaupt:

$$0_0\,,\quad 1_{c-m}\,,\quad 2_{2(c-2m)}\,,\quad 3_{3(c-3m)}\,,\,\cdots\, a_{a(c-am)}\,,\,\cdots \qquad \text{(M)}$$

Es erhellet ferner ohne Weiteres, dass nicht bloss die erste und zweite Reihe, sondern auch jede der übrigen fähig ist, alle Zahlen der Tafel erschöpfend darzustellen, indem man nämlich für c nach und nach alle Zahlen setzt, für welche man positive Indices erhält.

Um die Curven zu bestimmen, die sich durch die Zahlen der Reihen (II), (III), ... ziehen lassen, nehme man das allgemeine Glied $a_{a(c-am)}$ der m-ten Reihe, setze, wie im Vorigen, die Zahl desselben $a = y$, seinen Index $a(c - am) = x$, und eliminire hieraus a. Dies giebt die Gleichung:

$$x = cy - myy \text{ oder } \frac{1}{m}\left(x - \frac{1}{4}\frac{cc}{m}\right) = -\left(y - \frac{1}{2}\frac{c}{m}\right)^2.$$

Von jeder der Reihen, die sich aus (M) für die verschiedenen Werthe von c ergeben, liegen demnach die Zahlen in einer Parabel, deren Axe, wie bei dem im Obigen zuerst betrachteten Systeme, der Abscissenlinie nach entgegengesetzter Richtung parallel ist. Der Parameter jeder dieser Parabeln ist dem m-ten Theile der Seite eines Feldes gleich, und die Coordinaten des Scheitels sind

$$x = \frac{1}{4}\frac{cc}{m} \text{ und } y = \frac{1}{2}\frac{c}{m}.$$

Hieraus folgt, nach Elimination von c, $yy = \frac{x}{m}$, als die Gleichung für die Curve der Scheitel. Die Scheitel sämmtlicher Parabeln liegen daher in einer Parabel, welche jenen gleich ist, aber die entgegengesetzte Lage hat, und deren Scheitel in den Anfangspunkt fällt.

Endlich ist nach dem oben angeführten Satze von der Parabel das Product aus zwei Zahlen der Reihe (M) gleich dem Producte aus dem Parameter in die Zahl der Hauptreihe, in welcher die Hauptreihe von einer durch erstere beiden Zahlen gelegten Geraden geschnitten wird; d. h. die Hauptreihe wird von dieser Geraden in dem m-fachen des Productes der beiden Zahlen geschnitten.

So liegen z. B. die Zahlen jeder der durch (II) dargestellten Reihen in einer Parabel, deren Parameter $= \frac{1}{2}$ ist. Diejenige dieser Reihen, für welche $c = 11$ ist, besteht aus den Zahlen

$$0_0\,,\quad 1_9\,,\quad 2_{14}\,,\quad 3_{15}\,,\quad 4_{12}\,,\quad 5_5\,,$$

und es wird daher z. B. die Gerade durch 2_{14} und 3_{15} die Hauptreihe in dem doppelten Producte aus 2 in 3, d. i. in 12 treffen.

g) Eben so, wie jetzt aus den Reihen (0) und (I) die folgenden (II), ... (M), ... hergeleitet wurden, kann man auch in entgegengesetzter Richtung zu neuen Reihen (I*), (II*), ... (M*), ... fortgehen, von denen jede aus der vorhergehenden, also (I*) aus (0), (II*) aus (I*), u. s. w. auf gleiche Art, wie (0) aus (I), entspringt. Die Reihen (I*) und (M*) werden hiernach sein:

$$(\mathrm{I}^*) \qquad 0_0\,, \quad 1_{c+1}\,, \quad 2_{2(c+2)}\,, \;\cdots\; a_{a(c+a)}\,, \;\cdots$$

$$(\mathrm{M}^*) \qquad 0_0\,, \quad 1_{c+m}\,, \quad 2_{2(c+2m)}\,, \;\cdots\; a_{a(c+am)}\,, \;\cdots$$

Die Reihe (I*) ist folglich einerlei mit der obigen (β), so dass das System von Reihen, welches man aus (I*) für die verschiedenen Werthe von c erhält, dasselbe ist, welches wir oben als das zweite bezeichneten. Hinsichtlich der übrigen Reihen reicht es hin, zu bemerken, dass (M*) zu (M) in derselben Beziehung wie (I*) zu (I) steht.

Ueber die phoronomische Deutung des Taylor'schen Theorems.

[Berichte über die Verhandlungen der K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, I. Bd. S. 79—82, Sitzung vom 7. Nov. 1846, auch abgedruckt in Crelle's Journal für Mathematik, Band 36, S. 91—94.]



Bedeute Ft eine beliebige Function der Veränderlichen t, und seien t_1 und t_2 zwei bestimmte Werthe von t, so ist nach Taylor:

$$Ft_2 - Ft_1 = F(t_1 + t_2 - t_1) - F(t_1)$$

$$= (t_2 - t_1) F't_1 + \frac{1}{2}(t_2 - t_1)^2 F''t_1 + \frac{1}{2 \cdot 3}(t_2 - t_1)^3 F'''t_1 + \dots .$$

worin $F't_1$, $F''t_1$, $F'''t_1$, u. s. w. die Werthe von $\frac{dFt}{dt}$, $\frac{d^2Ft}{dt^2}$, $\frac{d^3Ft}{dt^3}$, u. s. w. für $t = t_1$ bezeichnen.

Sei nun t die von einer gewissen Epoche an gerechnete Zeit, also Ft irgend eine im Verlaufe der Zeit sich ändernde Grösse. Alsdann ist $Ft_2 - Ft_1$ die Aenderung von Ft während der von $t = t_1$ bis $t = t_2$ verfliessenden Zeit; $F't_1$ aber, oder die durch dt dividirte Aenderung von Ft während des auf t_1 folgenden Elementes dt, ist nichts Anderes als die Geschwindigkeit, mit welcher sich Ft am Ende der Zeit t_1 ändert. Ebenso ist $F''t_1$, oder der Werth $\frac{dF't}{dt}$ für $t = t_1$, die Geschwindigkeit, mit welcher sich $F't$ zu derselben Zeit ändert; $F'''t_1$ die Geschwindigkeit der Aenderung von $F''t$ zu derselben Zeit; u. s. w.

Wir wollen hiernach die aus Ft abgeleiteten Functionen $F't$, $F''t$, $F'''t$, u. s. w. die erste, zweite, dritte, u. s. w. Geschwindigkeit von Ft nennen, so dass die $(m + 1)$-te Geschwindigkeit von Ft diejenige ist, mit welcher sich die m-te Geschwindigkeit ändert.

Das anschaulichste Beispiel giebt uns ein in einer geraden Linie nach einem gewissen Gesetze sich bewegender Punkt P. Bestehe dieses Gesetz darin, dass am Ende der Zeit t der Abstand des Punktes P von dem zum Anfange der Linie genommenen Punkte, welcher A heisse, gleich Ft sei, und heissen P_1, P_2 die Oerter von P am Ende von t_1 und von t_2, so wird

$$Ft_2 - Ft_1 = AP_2 - AP_1 = P_1P_2,$$

und daher, wenn wir die Endpunkte der Zeitlängen t_1 und t_2 mit T_1 und T_2 bezeichnen und die erste, zweite, dritte, u. s. w. Geschwindigkeit, mit welcher sich AP zur Zeit T_1 ändert, v_1', v_1'', v_1''', u. s. w. nennen:

$$P_1P_2 = T_1T_2 \cdot v_1' + \frac{1}{2} T_1T_2^2 \cdot v_1'' + \frac{1}{2 \cdot 3} T_1T_2^3 \cdot v_1''' + \dots$$

wobei nur noch zu bemerken ist, dass, weil die erste Geschwindigkeit, mit welcher sich AP ändert, offenbar mit der Geschwindigkeit von P selbst einerlei ist, auch die folgenden Geschwindigkeiten von AP mit den gleichvielten von P identisch sind.

Es ist leicht einzusehen, dass diese Formel für die Länge des während T_1T_2 zurückgelegten Weges auch dann noch Gültigkeit behält, wenn der Punkt sich krummlinig bewegt, und wenn seine Geschwindigkeiten bloss aus der Grösse der von ihm in den einzelnen Zeitelementen durchlaufenen Wege, ohne Rücksicht auf deren sich alsdann fortwährend ändernde Richtung, bestimmt werden. Es lässt sich aber die Formel, wenn die Bewegung nicht geradlinig ist, noch auf eine andere Weise deuten, so nämlich, dass die Aenderung nicht bloss der Länge, sondern auch der Richtung des Weges mit in Betracht gezogen wird.

Bewege sich demnach der Punkt P krummlinig; P_1 und P_2 seien die Oerter von P in den Zeitpunkten T_1 und T_2, und A sei ein irgendwo angenommener ruhender Punkt. Die gerade Linie AP wird alsdann eine im Verlaufe der Zeit ihre Länge und Richtung zugleich ändernde Linie, wenigstens im Allgemeinen, sein. Die Aenderung von AP während T_1T_2, als wodurch AP_1 in AP_2 übergeht, ist die gerade Linie P_1P_2, indem dieselbe geometrisch, d. i. nicht bloss ihrer Länge, sondern auch ihrer Richtung nach, zu AP_1 addirt, die Linie AP_2 giebt. Um die Geschwindigkeit, mit welcher sich AP zur Zeit T_1 ändert, zu finden, setze man den Zeittheil T_1T_2 unendlich klein, das m-fache desselben gleich der Zeiteinheit, wo daher m eine unendlich grosse Zahl bezeichnet. Die Linie P_1P_2 ist dann ebenfalls unendlich klein und giebt, wenn sie m-mal nach einerlei Richtung an einander gesetzt wird, die verlangte Geschwindigkeit. Letztere wird daher durch eine Linie dargestellt, welche die Richtung P_1P_2 und eine Länge gleich $m \cdot P_1P_2$ hat, und ist folglich einerlei mit der Geschwindigkeit, welche P selbst zur Zeit T_1 hat.

Von einer geraden, ihre Länge und Richtung stetig ändernden Linie AP ist demnach, wenn ihr Anfangspunkt A unverändert bleibt,

die Geschwindigkeit ihrer Aenderung, der Grösse und Richtung nach, einerlei mit der Geschwindigkeit ihres Endpunktes P.

Es werden daher auch die zweite, dritte, u. s. w. Geschwindigkeit von AP einerlei mit der ebensovielten Geschwindigkeit von P sein. Um diese höheren Geschwindigkeiten zu finden, lasse man zunächst einen Punkt Q in Bezug auf einen ruhenden Punkt B sich also bewegen, dass die gerade Linie BQ stets gleich und gleichgerichtet mit der Geschwindigkeit von P ist: und es wird nach demselben Satze die Geschwindigkeit von Q ihrer Grösse und Richtung nach gleich der Geschwindigkeit, mit welcher sich BQ, d. i. die Geschwindigkeit von P_1, ändert, also gleich der zweiten Geschwindigkeit von P sein. Eben so wird, wenn man einem dritten Punkte R gegen einen ruhenden C eine solche Bewegung giebt, dass die Linie CR stets gleich und gleichgerichtet mit der Geschwindigkeit von Q ist, die Geschwindigkeit von R gleich der zweiten Geschwindigkeit von Q, gleich der dritten Geschwindigkeit von P sein, u. s. w.; wobei nur noch bemerkt werden mag, dass die zweite Geschwindigkeit von P, sowohl ihrer Richtung, als Grösse nach, einerlei mit der sogenannten beschleunigenden Kraft ist, durch welche die Bewegung von P hervorgebracht wird.

Es lässt sich nun leicht zeigen, dass die Taylor'sche Reihe in der ihr vorhin für die geradlinige Bewegung eines Punktes P gegebenen Form

$$P_1P_2 = T_1T_2 \cdot v_1' + \frac{1}{2} T_1T_2^2 \cdot v_1'' + \frac{1}{2 \cdot 3} T_1T_2^3 \cdot v_1''' + \dots$$

auch für eine krummlinige Bewegung gilt, wenn man $v_1', v_1'', v_1''', \dots$, d. i. die erste und die folgenden Geschwindigkeiten von P im Zeitpunkte T_1, auf die eben gezeigte Weise bestimmt, und sie somit als gerade Linien von bestimmter Länge und Richtung darstellt. Wird nämlich die Zeitlänge T_1T_2 nach der als Zeiteinheit festgesetzten Zeitlänge als reine Zahl ausgedrückt, werden die Linien $v_1', v_1'', \dots$ resp. mit den Zahlen T_1T_2, $\frac{1}{2} T_1T_2^2, \dots$ multiplicirt, und sie somit in andere verwandelt, welche dieselben Richtungen, wie die ersteren haben, deren Längen aber resp. das T_1T_2-fache, das $\frac{1}{2} T_1T_2^2$-fache, u. s. w. von den Längen der ersteren sind, und werden diese neuen Linien geometrisch addirt, d. h. parallel mit ihren Richtungen an einander gesetzt, jede folgende mit ihrem Anfangspunkte an den Endpunkt der nächst vorhergehenden: so ist die geometrische Summe, oder die gerade Linie, welche vom Anfangspunkte bis zum Endpunkte der durch die Addition entstandenen gebrochenen Linie gezogen wird,

gleich und gleichgerichtet mit $P_1 P_2$; oder, was auf dasselbe hinauskommt: geht man bei der Bildung der gebrochenen Linie von P_1 als Anfangspunkte aus, so erhält man P_2 als ihren Endpunkt.

Um diesen Satz, dessen Beweis ich hier übergehe, noch durch ein ganz einfaches Beispiel zu erläutern, will ich die zweite Geschwindigkeit von P, oder die beschleunigende Kraft, durch welche P getrieben wird, von constanter Grösse und Richtung annehmen: es sei die Schwerkraft. Alsdann sind die dritte und die folgenden Geschwindigkeiten von P Null: die zweite ist vertical nach unten gerichtet, hat, wenn die Secunde zur Zeiteinheit genommen wird, eine Grösse von dreissig Pariser Fuss, und es ist:

$$P_1 P_2 = T_1 T_2 \cdot v_1' + \frac{1}{2} T_1 T_2^2 \cdot v_1'' .$$

Hierin ist $T_1 T_2 \cdot v_1'$ der Weg des Punktes P, wenn letzterer von P_1 aus, wo er sich im Zeitpunkte T_1 befindet, ohne Aenderung der Grösse und Richtung der Geschwindigkeit v_1', welche er in T_1 hat, die Zeitlänge $T_1 T_2$ hindurch fortgegangen wäre; es werde dieser Weg durch die Linie $P_1 O$ vorgestellt. Das folgende Glied, gleich $T_1 T_2^2 \cdot 15$ Fuss, ist der Fallraum eines Körpers während der vom Anfange des Falles an gerechneten Zeit $T_1 T_2$, und man wird folglich den Ort P_2 des Punktes zur Zeit T_2 erhalten, wenn man an O eine diesem Fallraume gleiche, vertical nach unten gerichtete Linie OP_2 setzt: — ganz übereinstimmend mit der bekannten Construction, durch welche man bei einem geworfenen Körper, aus dem Orte und der Geschwindigkeit des Körpers am Anfange der Bewegung, seinen Ort in einem gegebenen späteren Zeitpunkte findet.

Ueber eine akustische Aufgabe.

Aus den nachgelassenen Papieren von A. F. Möbius, 1855, nebst einem Auszug aus der Correspondenz zwischen Möbius und Grassmann.



Aufgabe. *Ein Tonsystem zu construiren von der Beschaffenheit, dass sich für jeden Ton desselben andere Töne in demselben vorfinden, welche sich — der Schwingungszahl nach — zu ersterem wie* $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 2, 3, 5 *zu* 1 *entweder vollkommen, oder doch so nahe verhalten, dass der Unterschied vom vollkommenen Verhältnisse nicht leicht in die Ohren fällt, obgleich die Intervalle je zweier nächstfolgender Töne des Systems noch sehr gut wahrnehmbar sein sollen.*

Weil $1:2$ und $1:\frac{1}{2}$ die einfachsten unter den angenommenen Verhältnissen sind, und daher kleine Abweichungen von denselben mehr als bei jedem anderen Verhältnisse wahrnehmbar sein dürften, so wollen wir noch festsetzen, dass die Verhältnisse $1:2$ und $1:\frac{1}{2}$ stets vollkommen rein sich finden sollen.

Auflösung. 1) Indem wir für's Erste die Verhältnisse $1:2$ und $1:\frac{1}{2}$ unberücksichtigt lassen, müssen sich zu einem gewissen Tone, den wir als Grundton annehmen und $=1$ setzen wollen, noch die Töne

$$\frac{1}{5},\ \frac{1}{3},\ 3,\ 5$$

vorfinden. Wegen des ersten dieser vier Töne, $\frac{1}{5}$, müssen noch die vier Töne

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{25}\,,\qquad \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{15}\,,\qquad \frac{1}{5}\cdot 3=\frac{3}{5}\,,\qquad \frac{1}{5}\cdot 5=1$$

in der Reihe vorkommen. Ebenso führt der Ton

$\frac{1}{3}$ zu den vier Tönen: $\frac{1}{15},\ \frac{1}{9},\ 1,\ \frac{5}{3}$;

3 - - - - $\frac{3}{5},\ 1,\ 9,\ 15$;

5 - - - - $1,\ \frac{5}{3},\ 15,\ 25$.

2) Somit haben wir bis jetzt folgende dreizehn Töne

$$1,\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{3},\ 3,\ 5,\ \frac{1}{25},\ \frac{1}{15},\ \frac{3}{5},\ \frac{1}{9},\ \frac{5}{3},\ 9,\ 15,\ 25,$$

die noch mit den Potenzen von 2 und $\frac{1}{2}$ zu multipliciren, d. i. in den verschiedenen Octaven zu nehmen, sind. Zwischen 1 und 2 fallen alsdann die Töne

$$1,\ \frac{8}{5},\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{4},\ \frac{32}{25},\ \frac{16}{15},\ \frac{6}{5},\ \frac{16}{9},\ \frac{5}{3},\ \frac{9}{8},\ \frac{15}{8},\ \frac{25}{16},\ 2,$$

oder wenn man sie ihrer Grösse nach ordnet:

$$1,\ \frac{16}{15},\ \frac{9}{8},\ \frac{6}{5},\ \frac{5}{4},\ \frac{32}{25},\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{25}{16},\ \frac{8}{5},\ \frac{5}{3},\ \frac{16}{9},\ \frac{15}{8},\ 2.$$

3) Das Verhältniss jedes dieser Töne (vom zweiten an) zum nächstvorhergehenden ist

$$\frac{16}{15} : 1 = \frac{16}{15} = 1 + \frac{1}{15} \qquad \frac{32}{25} : \frac{5}{4} = \frac{128}{125} = 1 + \frac{1}{42} \qquad \frac{8}{5} : \frac{25}{16} = \frac{128}{125} = 1 + \frac{1}{42}$$

$$\frac{9}{8} : \frac{16}{15} = \frac{135}{128} = 1 + \frac{1}{18} \qquad \frac{4}{3} : \frac{32}{25} = \frac{100}{96} = 1 + \frac{1}{24} \qquad \frac{5}{3} : \frac{8}{5} = \frac{25}{24} = 1 + \frac{1}{24}$$

$$\frac{6}{5} : \frac{9}{8} = \frac{48}{45} = 1 + \frac{1}{15} \qquad \frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{9}{8} = 1 + \frac{1}{8} \qquad \frac{16}{9} : \frac{5}{3} = \frac{48}{45} = 1 + \frac{1}{15}$$

$$\frac{5}{4} : \frac{6}{5} = \frac{25}{24} = 1 + \frac{1}{24} \qquad \frac{25}{16} : \frac{3}{2} = \frac{50}{48} = 1 + \frac{1}{24} \qquad \frac{15}{8} : \frac{16}{9} = \frac{135}{128} = 1 + \frac{1}{18}$$

$$2 : \frac{15}{8} = \frac{16}{15} = 1 + \frac{1}{15}$$

Unter diesen Verhältnissen weichen die zwei (in der ersten Horizontalreihe

$$\frac{32}{25} : \frac{5}{4} \quad \text{und} \quad \frac{8}{5} : \frac{25}{16}$$

weit weniger als alle übrigen und auch an sich nur sehr wenig von dem Verhältnisse 1 : 1 ab, so dass wir die Töne $\frac{32}{25}$ und $\frac{5}{4}$, so wie die Töne $\frac{8}{5}$ und $\frac{25}{16}$ als einerlei unter sich betrachten und den einen Ton jedes dieser Paare weglassen können. Mit Weglassung der zusammengesetzteren $\frac{32}{25}$ und $\frac{25}{16}$ bleibt uns demnach zwischen 1 und 2 die Tonreihe übrig

$$\text{(A)} \qquad 1,\ \frac{16}{15},\ \frac{9}{8},\ \frac{6}{5},\ \frac{5}{4},\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{8}{5},\ \frac{5}{3},\ \frac{16}{9},\ \frac{15}{8},\ 2.$$

4) Der Kürze willen mag ein Ton a des Systems complet heissen, wenn sich im System noch die Töne $\frac{1}{5}a$, $\frac{1}{3}a$, $3a$, $5a$ (mit ihren Octaven, so wie die Octaven von a selbst) oder doch die Töne

$\frac{1}{5}ax$, $\frac{1}{3}ay$, $3az$, $5at$ vorfinden, wo x, y, z, t Brüche sind, die von der Einheit nur sehr wenig — nur um $\frac{1}{42}$, wie im Vorigen der Bruch $\frac{135}{128}$, oder noch weniger — abweichen. Die Forderung unserer Aufgabe ist daher, dass jeder Ton des Systems complet sein soll.

In der Tonreihe (A) sind nun zufolge der Construction derselben die fünf Töne $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$, 1, 3, 5 complet, oder wenn sie in die Octave von 1 bis 2 transponirt und hier in ihrer Folge genommen werden, die fünf Töne

$$1, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5},$$

also ausser 1 noch die vier mittleren Töne der Reihe (A).

Nächstdem sind noch complet $\frac{6}{5}$ und $\frac{5}{3}$, oder die Töne in (A), welche jene vier mittleren einschliessen. Denn $\frac{6}{5}$ wird complet durch $\frac{1}{5}\cdot\frac{6}{5}$, $\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{5}$, $3\cdot\frac{6}{5}$, $5\cdot\frac{6}{5}$, oder in der Octave von 1 bis 2 durch

$$\frac{48}{25}=\mathbf{\frac{15}{8}}\cdot\frac{128}{125}, \quad \mathbf{\frac{8}{5}}, \quad \frac{9}{5}=\mathbf{\frac{16}{9}}\cdot\frac{81}{80}, \quad \mathbf{\frac{3}{2}}\ ^{*)}.$$

Zweitens wird $\frac{5}{3}$ complet gemacht durch $\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{3}$, $\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{3}$, $3\cdot\frac{5}{3}$, $5\cdot\frac{5}{3}$, also in der Octave von 1 bis 2 durch

$$\mathbf{\frac{4}{3}}, \quad \frac{10}{9}=\mathbf{\frac{9}{8}}\cdot\frac{80}{81}, \quad \mathbf{\frac{5}{4}}, \quad \frac{25}{24}=\mathbf{\frac{16}{25}}\cdot\frac{125}{128}.$$

5) Von der Reihe (A) bleiben demnach noch vier Töne, zwei am Anfang und zwei am Ende der Reihe:

$$\frac{16}{15}, \frac{9}{8} \quad \text{und} \quad \frac{16}{9}, \frac{15}{8}$$

zu untersuchen übrig.

Der Ton $\frac{16}{15}$ wird complet durch $\frac{16}{75}$, $\frac{16}{45}$, $\frac{16}{5}$, $\frac{16}{3}$,

d. i. durch $\frac{128}{75}=\mathbf{\frac{5}{3}}\cdot\frac{128}{125}$, $\frac{64}{45}$, $\mathbf{\frac{8}{5}}$, $\mathbf{\frac{4}{3}}$.

- - $\frac{9}{8}$ - - durch $\frac{9}{40}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{27}{8}$, $\frac{45}{8}$,

d. i. durch $\frac{9}{5}=\mathbf{\frac{16}{9}}\cdot\frac{81}{80}$, $\mathbf{\frac{3}{2}}$, $\frac{27}{16}=\mathbf{\frac{5}{3}}\cdot\frac{81}{80}$, $\frac{45}{32}$.

---

*) Hierbei und so auch im Folgenden sind Töne, wenn sie in (A) sich vorfinden, fett gedruckt.

Der Ton $\frac{16}{9}$ wird complet durch $\frac{16}{45}, \frac{16}{27}, \frac{16}{3}, \frac{80}{9}$.

d. i. durch $\frac{64}{45}, \frac{32}{27} = \frac{6}{5} \cdot \frac{80}{81}, \frac{4}{3}, \frac{10}{9} = \frac{9}{8} \cdot \frac{80}{81}$.

- - $\frac{15}{8}$ - - durch $\frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{45}{8}, \frac{75}{8}$.

d. i. durch $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{45}{32}, \frac{75}{64} = \frac{6}{5} \cdot \frac{125}{128}$.

6) Von den vier Tönen, durch welche jeder der vier Töne $\frac{16}{5}$, $\frac{9}{8}, \frac{16}{9}$ und $\frac{15}{8}$ complet wird, sind demnach immer drei, theils vollkommen, theils sehr nahe, in (A) schon enthalten. Der vierte ist abwechselnd $\frac{64}{45}$ und $\frac{45}{32}$, wofür wir aber einen einzigen nehmen können, da $\frac{64}{45} : \frac{45}{32} = \frac{2048}{2025} = 1 + \frac{1}{88}$ ist. Dieser eine, er sei $\frac{45}{32}$, fällt in (A) zwischen $\frac{4}{3}$ und $\frac{3}{2}$ (also in die Mitte der Reihe), kommt aber keinem von beiden so nahe, dass er als damit zusammenfallend angesehen werden könnte. Denn es ist

$$\frac{3}{2} : \frac{45}{32} = \frac{16}{15} = 1 + \frac{1}{15} \quad \text{und} \quad \frac{45}{32} : \frac{4}{3} = \frac{135}{128} = 1 + \frac{1}{18}.$$

Wir sind daher genöthigt, $\frac{45}{32}$ als neuen Ton in (A) aufzunehmen. Die vier ihn complet machenden Töne sind aber keine neuen, sondern die vier in 5) untersuchten und daher in (A) schon enthaltenen Töne $\frac{16}{15}, \frac{9}{8}, \frac{16}{9}, \frac{15}{8}$. Denn es war

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{16}{15} = \frac{16}{45} = \frac{1}{4} \cdot \frac{64}{45}, \quad 5 \cdot \frac{9}{8} = \frac{45}{8} = 4 \cdot \frac{45}{32}, \quad \frac{1}{5} \cdot \frac{16}{9} = \frac{1}{4} \cdot \frac{64}{45}, \quad 3 \cdot \frac{15}{8} = 4 \cdot \frac{45}{32},$$

also auch umgekehrt

$$3 \cdot \frac{64}{45} = 4 \cdot \frac{16}{15}, \quad \frac{1}{5} \cdot \frac{45}{32} = \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{8}, \quad 5 \cdot \frac{64}{45} = 4 \cdot \frac{16}{9}, \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{45}{32} = \frac{1}{4} \cdot \frac{15}{8};$$

folglich u. s. w.

7) Mit dem Tone $\frac{45}{32}$ und seinen Octaven ist demnach das Tonsystem geschlossen und die Aufgabe gelöst. Die zwischen 1 und 2 fallenden Töne sind nämlich, 1 mit gerechnet, folgende zwölf:

$$\text{(B)} \qquad 1, \frac{16}{15}, \frac{9}{8}, \frac{6}{5}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{45}{32}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \frac{16}{9}, \frac{15}{8}.$$

Alle übrigen Töne entstehen aus diesen durch fortgesetzte Multipli-

plication und Division mit 2. Denken wir uns auf diese Weise die Reihe nach beiden Seiten hin fortgesetzt, so verhält sich jeder Ton entweder vollkommen oder doch sehr nahe

zu dem darauf folgenden 12ten wie 1 : 2 (hier vollkommen)
– – – – 7ten wie 2 : 3
– – – – 4ten wie 4 : 5 .

Zusatz. Die Reihe (B) der zwischen 1 und 2 fallenden Töne wird nach Weglassung der Potenzen von 2:

$$\frac{1}{3\cdot 5},\ 3\cdot 3,\ \frac{3}{5},\ 5,\ \frac{1}{3},\ 3\cdot 3\cdot 5 \text{ oder } \frac{1}{3\cdot 3\cdot 5},\ 3,\ \frac{1}{5},\ \frac{5}{3},\ \frac{1}{3\cdot 3},\ 3\cdot 5\ .$$

Hierbei ist das Product aus dem ersten Tone in den letzten $= 1$, aus dem zweiten in den vorletzten $= 1$, aus dem dritten in den vorvorletzten $= 1$, u. s. f. Es ist daher auch, wenn man der Reihe (B) als letztes Glied 2 hinzufügt, das Product aus je zwei vom Anfang und Ende gleich weit nach der Mitte zu liegenden Gliedern $= 2$. Das mittelste mit sich selbst multiplicirt, giebt ebenfalls 2. Denn es ist nahe (siehe vorher) $\frac{45}{32}\cdot\frac{45}{32} = \frac{45}{32}\cdot\frac{64}{45}$.

Auf die vorstehende akustische Aufgabe beziehen sich die folgenden Stellen aus Briefen zwischen Möbius und H. Grassmann:

Möbius an Grassmann (Leipzig, 26. Februar 1855).

»Durch die Lesung Ihrer Programmabhandlung*) bin ich an einen schon vor »fünfzehn oder noch mehreren Jahren von mir gemachten Versuch erinnert worden, »die Töne der chromatischen Tonleiter durch die Forderung zu bestimmen, dass »zu jedem Tone sich zugleich die Quinte auf- und abwärts, und die grosse Terz »auf- und abwärts vorfinden, dass also, wenn a ein Ton der Leiter ist, auch die »Töne $\frac{1}{5}a$, $\frac{1}{3}a$, $3a$, $5a$ nebst ihren Octaven in der Leiter vorkommen. Ich habe »also die chromatische Tonleiter bloss mit den Primzahlen 2, 3, 5 zu construiren »versucht. Ich erlaube mir von diesem Versuche, den ich nicht veröffentlicht, auch »noch keinem Sachverständigen vorgelegt habe, Ihnen eine Abschrift hiermit zu »übersenden. Vielleicht haben Sie später einmal die Güte, mir eine Bemerkung »darüber zukommen zu lassen.« . . .

Grassmann an Möbius (Stettin, 17. Mai 1855).

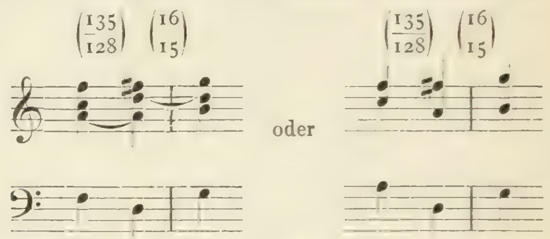
»Ihre akustische Abhandlung habe ich mit grossem Interesse gelesen. Es »ist eine solche chromatische Tonleiter, die nur vermittelst der Primzahlen 2, 3

---

*) *Uebersicht der Akustik und niederen Optik.* Programmabhandlung des Stettiner Gymnasiums, 1854. Im Jahre 1877 publicirte Grassmann (geb. 15. April 1809, gest. 26. Sept. 1877) in Wiedemann's Annalen eine akustische Abhandlung *über die physikalische Natur der Sprachlaute.* A. d. H.

»und 5 construirt ist, von nicht geringer Bedeutung, da sie in der That lauter »vollkommen melodische Intervalle darbietet, d. h. solche Intervalle, wie sie in der »Fortschreitung der Melodie in vollkommener Reinheit vorkommen können: wie »z. B. der halbe Ton $\frac{25}{24}$, wenn die Melodie aus der Durterz in die Mollterz, oder »aus der kleinen None in die Octave übergeht, oder die Quinte $\frac{40}{27}$, wenn die Me- »lodie in der dorischen Tonart von *d* nach *a* fortschreitet, u. s. w.; manche der »Intervalle würden freilich schon seltener, vielleicht nie in einer schönen Melodie »vorkommen können.

»Der halbe Ton $\frac{135}{128}$ möchte sich noch in Melodieen vorfinden, in welchen »z. B. die Tonfolge *f fis g* mit den Duraccorden über *f d g* begleitet gedacht wird: »vorausgesetzt, dass diese Basstöne der *C*-durscala angehören, also



»Das unmelodischeste Intervall, das in Ihrer Tonleiter vorkommt, ist die unver- »meidliche Quinte $\frac{1024}{675}$, welche zwischen *fis* und *cis* liegt, und hier ist es unmög- »lich eine Melodie zu ersinnen, die dies Intervall in seiner Reinheit darstellte; »freilich ist es nur um einen zehntel Ton (um $\frac{2048}{2025}$) grösser als die reine Quinte, »entspricht also den gewöhnlichen Anforderungen angenäherter Reinheit.

»Die Primzahl 7 haben Sie gewiss mit Recht ausgeschlossen, da sie keine »anderen melodischen Intervalle liefert als $\frac{8}{7}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{15}{14}$ und allenfalls $\frac{7}{5}$.

»Was nun die Ausführung Ihrer Idee betrifft, so könnte man über zwei Töne »zweifelhaft sein; nämlich wenn man $fis = \frac{64}{45}$ statt $\frac{45}{32}$ setzte, so würde die Rein- »heit der Intervalle dieselbe bleiben; die Quinte $\frac{1024}{675}$ würde zwischen *h* und *fis* »statt zwischen *fis* und *cis* liegen, und eben so würden die Terzen von *d* nach *fis* und »von *fis* nach *ais* sich vertauschen. Man hätte aber dabei den Vortheil grösserer »Symmetrie, indem die chromatische Fortschreitung innerhalb der ersten Quarte »von *c* nach *f* genau dieselbe wäre, wie innerhalb der daran sich anschliessenden Quarte »von *f* nach *b*, während bei beiden Tonleitern die Fortschreitung in der Quarte »von *c* abwärts nach *g* genau eben so erfolgt, wie die aufwärts von *c* nach *f*. Dies »tritt besonders anschaulich hervor, wenn man die drei halben Töne $\frac{16}{15}$, $\frac{135}{128}$, $\frac{25}{24}$ »beziehlich mit α, β, γ bezeichnet, und die halben Töne der chromatischen Scala »neben einander hinschreibt. Man erhält so

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} | & \alpha\ \beta & | & \alpha\ \gamma & | & \alpha & | & \alpha\ \beta & | & \alpha\ \gamma & | & \alpha\ \beta & | & \alpha & | \\ c & & d & & e & & f & & g & & a & & h & & c \end{array}$$

»Bei Ihrer Tonleiter sind dann nur die halben Töne zwischen *f* und *g* vertauscht

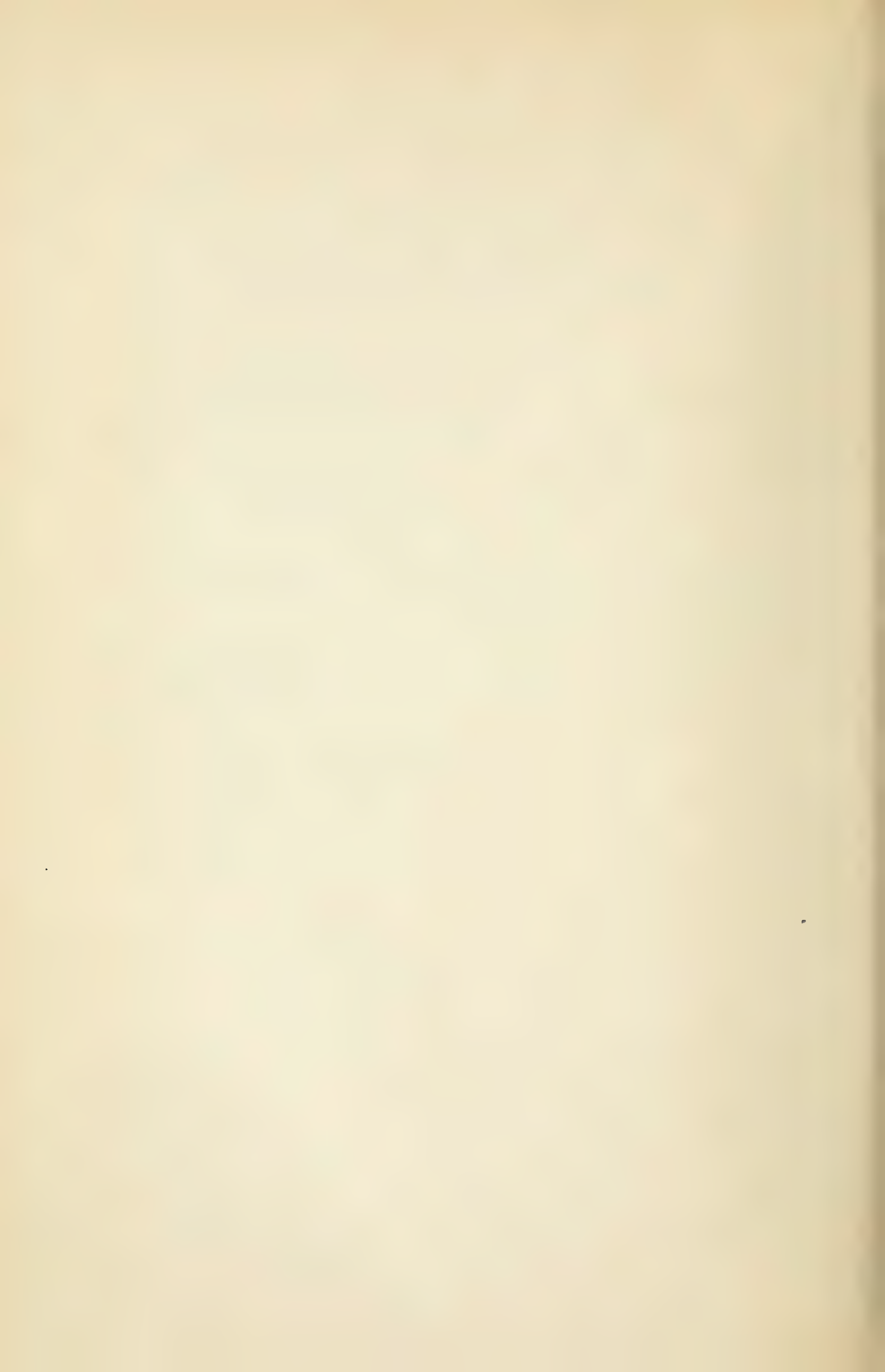
»Ferner könnte man *fis* nehmen, wie in Ihrer Tonleiter, aber $b = \frac{9}{5}$ setzen
»statt $\frac{16}{9}$. Dadurch würde noch eine Terz mehr, nämlich die von *b* zu *d* rein
„werden, während die Quinten denselben Grad der Reinheit behalten. Freilich
»würde dabei die oben erwähnte Symmetrie verloren gehen, dafür aber eine neue
„Art der Symmetrie hervortreten, welche sich besonders bei der Quintenfortschrei-
»tung zeigt. Nämlich in dem untenstehenden Quintencirkel haben dann die Quinten
»die dabei stehende Grösse

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccc} f & & c & & g & & d & & a & & e & & h & & fis & & cis & & gis & & dis & & b & & f \\ & \frac{3}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{40}{27} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{1024}{675} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{40}{27} & \end{array}$$

„so dass also immer drei reine Quinten auf einander folgen, und diese Folgen
»durch die drei unreinen Quinten unterbrochen werden.

»Es kommt bei dieser chromatischen Scala dann freilich noch ein vierter
»halber Ton $\frac{27}{25}$ vor, welcher zwischen *a* und *b* liegt und noch um ein Komma $\left(\frac{81}{80}\right)$
»grösser ist als $\frac{16}{15}$. Welcher von diesen drei Tonleitern der Vorzug zu geben
»wäre, möchte schwer zu entscheiden sein; ich würde mich am meisten zu der
»letztgenannten hinneigen, weil sie die meisten consonirenden Intervalle enthält
»und durch die kleinsten Zahlen ausdrückbar ist.« . . . *).

*) Der Rest des interessanten Schreibens von Grassmann bezieht sich auf Untersuchungen über die physikalische Natur der Sprachlaute und Verwandtes.



Die

wahre und die scheinbare Bahn

des

HALLEY'SCHEN KOMETEN

bei seiner Wiederkunft im Jahre 1835

anschaulich dargestellt und allgemein fasslich erklärt

von

August Ferdinand Möbius

Professor der Astronomie zu Leipzig.

Mit einer Kupfertafel.

Leipzig 1834.

Bei Georg Joachim Göschen.

Inhaltsangabe.

Die Hauptsätze

der

ASTRONOMIE

zum

Gebrauche bei seinen Vorlesungen für Gebildete

zusammengestellt

von

August Ferdinand Möbius.

Vierte, verbesserte und vermehrte Auflage.

Leipzig
bei Georg Joachim Göschen
1860.

41*

Inhaltsangabe.

Von dieser populären Schrift erschien die erste Auflage im Jahre 1836, die zweite 1844, die dritte 1853, die vierte 1860, die fünfte 1868, die sechste nach Möbius' Ableben bei der G. J. Göschen'schen Verlagshandlung in Stuttgart 1874.

NACHTRAG.



I. Ueber die Berechnung des Reservefonds einer Lebensversicherungs-Gesellschaft.



Vorbemerkung.

Nicht lange nach der im Jahre 1830 erfolgten Gründung der Leipziger Lebensversicherungs-Gesellschaft nahm die Direction derselben Möbius' Hilfe in Anspruch, indem sie sich von ihm auf mathematischen Principien beruhende Vorschriften und Tabellen zur Berechnung des Reservefonds erbat. Er gab dieselben im Jahre 1831 in der Form von 6 Aufgaben und 4 Tabellen, bei deren Bearbeitung er die Sterblichkeitstafel von Babbage und die der Abhandlung von L. A. Scheibner *»Ueber das Rechnungswesen bei Lebensversicherungs-Gesellschaften«* zu Grunde liegenden Hauptideen benutzte. Späterhin, im Jahre 1835, unterzog er, mit Rücksicht auf eine besondere statutarische Bestimmung der Gesellschaft, jene Tabellen einer Revision und Correctur und theilte ferner im Jahre 1838 die Entwickelung der Formeln mit, nach denen die im Jahre 1831 eingereichten Tabellen berechnet worden waren. Diese Theorie des Reservefonds, die Möbius nach seinem eigenen Urtheil mit grösserer Schärfe und Klarheit als L. A. Scheibner entwickelt zu haben glaubt, während er in anderen Schriften über Lebensversicherungs-Anstalten wenig oder nichts für seinen Zweck Brauchbares gefunden, wird im Folgenden veröffentlicht. Das Manuscript dazu ist auch im Nachlass vorhanden und stimmt in allem Wesentlichen mit der bei den Acten der Leipziger Lebensversicherungs-Gesellschaft befindlichen Originalabhandlung überein. Von letzterer ist durch Vermittelung des Herrn Prof. Dr. Heym in Leipzig, eines Schülers von Möbius und ehemaligen Amanuensis an der Sternwarte, eine Abschrift genommen worden, welche Herr Commerzienrath Kummer, der derzeitige Director der Leipziger Lebensversicherungs-Gesell-

schaft, dem Möbius'schen Nachlass überlassen hat. Beiden Herren sei hierdurch für ihre Unterstützung der verbindlichste Dank ausgesprochen.

Auf besonderen Wunsch des Herrn Commerzienrath Kummer füge ich hinzu, dass die Leipziger Lebensversicherungs-Gesellschaft die von Möbius aufgestellten Tabellen bei ihren Berechnungen schon seit längerer Zeit nicht mehr benutzt.

Dr. Curt Reinhardt.

Die Anzahl der Personen, welche zufolge der Sterblichkeitstabelle, deren man sich bedienen will, von einer gewissen Menge gleichzeitig Geborner nach Verlauf von m Jahren noch am Leben sind, werde mit A_m bezeichnet. Nach Verlauf von h Jahren seien Alle gestorben, und daher $A_h = 0$. — Nach Babbage's Tabelle ist dieses höchste Lebensalter $h = 99$.

Seien nun A_m Personen, jede m Jahre alt, gleichzeitig zu einer Lebensversicherungsanstalt getreten; jede derselben habe ihr Leben auf ein Capital $= C$ versichert und deshalb jährlich eine (reine) Prämie $= p$ zu entrichten. Indem diese Prämien zu Anfang jedes neuen Jahres von den jedesmal noch lebenden Mitgliedern an die Anstalt gezahlt und von dieser jährlich zu Interessen nach einem bestimmten Zinsfusse ausgeliehen werden, zugleich aber auch nach dem Ableben jedes Mitgliedes die Summe C von der Anstalt gezahlt wird, bildet sich für die Anstalt ein Fonds, der Reservefonds, der anfänglich immer mehr wachsen, nachher wieder abnehmen wird, und zuletzt, wenn alle Mitglieder gestorben sind, nach dem Princip der Gegenseitigkeit sich auf Null reduciren muss. Es soll die wahrscheinliche Grösse dieses Reservefonds nach dem Verlauf von n Jahren seit dem Antritte der Mitglieder bestimmt werden.

Um diese Aufgabe zu lösen, wollen wir aus der Grösse R des Reservefonds nach n Jahren seit dem Antritt, also zu der Zeit, wo jedes der noch lebenden Mitglieder $m + n$ Jahre alt ist, die Grösse R_1 desselben für das nächstfolgende $(m + n + 1)^{te}$ Jahr des Alters, hieraus seine Grösse R_2 für das $(m + n + 2)^{te}$ Altersjahr und so fort bis zum h^{ten} Jahre zu bestimmen suchen. Wir wissen aber schon voraus, dass er am Ende des h^{ten} Jahres Null ist. Indem wir daher den aus R für das h^{te} Jahr berechneten Reservefonds $= 0$ setzen, werden wir eine Gleichung erhalten, durch deren Auflösung sich der gesuchte Werth von R ergeben wird.

Um nun erstens aus dem Reservefonds R am Ende des $(m + n)^{ten}$ Altersjahres den Reservefonds R_1 am Ende des $(m + n + 1)^{ten}$ Jahres

zu finden, erwäge man zuvörderst, dass von den anfänglichen A_m Mitgliedern am Ende des $(m+n)^{\text{ten}}$ Jahres noch A_{m+n} übrig sind. Jedes derselben zahlt am Anfang des nächstfolgenden $(m+n+1)^{\text{ten}}$ Jahres die Prämie p, und hierdurch wächst der Reservefonds R zu $R + A_{m+n} \cdot p$ an.

Dieser vergrösserte Reservefonds wird am Ende des letztgenannten Jahres noch durch die Zinsen vermehrt, die er das Jahr über getragen hat. Heisse z der Zinsfuss, so dass ein Capital C, nach diesem Fusse ein Jahr ausgeliehen, sich in zC verwandelt. (Bei Zinsen zu 3 pro Cent wäre daher $z = 1.03$.) Hiermit wird der Reservefonds $= zR + zA_{m+n} \cdot p$, wovon aber noch die Capitalzahlungen wegen der im $(m+n+1)^{\text{ten}}$ Jahre verstorbenen Mitglieder abgehen. Nun sind von den am Anfang dieses Jahres lebenden A_{m+n} Mitgliedern am Ende desselben noch A_{m+n+1} übrig, also $A_{m+n} - A_{m+n+1}$ gestorben: und da wegen jedes derselben eine Summe $= C$ aus dem Reservefonds gezahlt werden muss, so erhält man endlich:

$$R_1 = zR + zA_{m+n} \cdot p - (A_{m+n} - A_{m+n+1})\, C\,.$$

Ganz durch dieselben Betrachtungen findet sich für das nun folgende $(m+n+2)^{\text{te}}$ Altersjahr:

$$R_2 = zR_1 + zA_{m+n+1} \cdot p - (A_{m+n+1} - A_{m+n+2}) \cdot C\,,$$

und eben so ferner

$$R_3 = zR_2 + zA_{m+n+2} \cdot p - (A_{m+n+2} - A_{m+n+3}) \cdot C\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$R_{i-1} = zR_{i-2} + zA_{m+n+i-2} \cdot p - (A_{m+n+i-2} - A_{m+n+i-1}) \cdot C\,,$$

$$R_i = zR_{i-1} + zA_{m+n+i-1} \cdot p - (A_{m+n+i-1} - A_{m+n+i}) \cdot C\,.$$

Aus diesen Gleichungen, i an der Zahl, lässt sich nun sogleich R_i oder der Reservefonds am Ende des $(m+n+i)^{\text{ten}}$ Altersjahres durch R ausgedrückt finden. Man addire nämlich alle diese i Gleichungen, nachdem man sie vorher in ihrer Folge mit $z^{i-1}, z^{i-2}, z^{i-3}, \ldots\ldots z, 1$ multiplicirt hat, und es kommt:

$$\begin{aligned} R_i = z^i R &+ z^i \cdot A_{m+n} \cdot p - z^{i-1}(A_{m+n} - A_{m+n+1}) \cdot C \\ &+ z^{i-1} A_{m+n+1} \cdot p - z^{i-2}(A_{m+n+1} - A_{m+n+2}) \cdot C \\ &+ z^{i-2} A_{m+n+2} \cdot p - z^{i-3}(A_{m+n+2} - A_{m+n+3}) \cdot C \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ z^2 \cdot A_{m+n+i-2} \cdot p - z \cdot (A_{m+n+i-2} - A_{m+n+i-1}) \cdot C \\ &+ z \cdot A_{m+n+i-1} \cdot p - (A_{m+n+i-1} - A_{m+n+i}) \cdot C\,. \end{aligned}$$

Man setze jetzt $i = h - m - n$, also $m + n + i = h$, so findet sich der Reservefonds für das Ende des h^{ten} Altersjahres. Für diesen

Zeitpunkt ist aber der Reservefonds $= 0$, und man hat daher die Gleichung:

$$
(\Theta)\quad
\begin{aligned}
0 = z^{h-m-n} R &+ z^{h-m-n} A_{m+n} \cdot p - z^{h-m-n-1}(A_{m+n} - A_{m+n+1})\, C \\
&+ z^{h-m-n-1} A_{m+n+1} \cdot p - z^{h-m-n-2}(A_{m+n+1} - A_{m+n+2})\, C \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ z^2 A_{h-2} \cdot p - z(A_{h-2} - A_{h-1})\, C \\
&+ z\, A_{h-1} \cdot p - (A_{h-1} - A_h)\, C\,,
\end{aligned}
$$

wo $A_h = 0$ (siehe oben).

Um aus dieser Gleichung den Werth von R bequem abzuleiten, berechne man zuvor die Grössen:

$$
(1)\quad
\begin{aligned}
B_{h-1} &= A_{h-1}\,, \\
B_{h-2} &= A_{h-1} + zA_{h-2}\,, \\
B_{h-3} &= A_{h-1} + zA_{h-2} + z^2 A_{h-3}\,, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
B_{m+n+1} &= A_{h-1} + zA_{h-2} + z^2 A_{h-3} + \ldots + z^{h-m-n-2} A_{m+n+1}\,, \\
B_{m+n} &= A_{h-1} + zA_{h-2} + \ldots + z^{h-m-n-2} A_{m+n+1} + z^{h-m-n-1} A_{m+n}.
\end{aligned}
$$

Hiermit zieht sich die Gleichung (Θ) zusammen in

$$(2)\quad 0 = z^{h-m-n} \cdot R + z \cdot B_{m+n} \cdot p_m - (B_{m+n} - z \cdot B_{m+n+1})\, C\,,$$

wo noch p_m statt des vorigen die Prämie bezeichnenden einfachen Buchstabens p geschrieben worden, um nämlich zugleich auszudrücken, dass diejenige Prämie gemeint ist, welche Mitglieder, die bei ihrem Eintritte m Jahre alt waren, zu zahlen haben.

Aus (2) folgt aber:

$$(3)\quad R = \frac{(B_{m+n} - zB_{m+n+1})\, C - zB_{m+n} \cdot p_m}{z^{h-m-n}}\,.$$

Weitere Folgerungen. *a*) Der somit gefundene Reservefonds R gilt für das Ende des $(m+n)^{\text{ten}}$ Altersjahres, d. i. für das Ende des n^{ten} Jahres nach dem Eintritte der damals m Jahre alten Personen, und zwar ohne dass noch die Prämien für das $(m+n+1)^{\text{te}}$ Jahr gezahlt worden sind. Setzt man daher $n = 0$, so erhält man den Reservefonds für das Ende des m^{ten} Altersjahres, d. i. für den Zeitpunkt des Eintritts selbst, vor Entrichtung der Prämien für das nächstfolgende Jahr. Da nun früher noch gar keine Prämien entrichtet worden sind, so muss für $n = 0$ auch $R = 0$ sein, und es ist daher zufolge der Gleichung (2):

$$(4)\quad 0 = zB_m p_m - (B_m - zB_{m+1})\, C\,,$$

eine vom Reservefonds ganz freie Gleichung, welche dazu dient, um die von jedem der Mitglieder alljährlich zu zahlende (reine) Prämie selbst zu bestimmen: denn man hat nach dieser Gleichung:

$$(5) \qquad p_m = \frac{B_m - z B_{m+1}}{z B_m} \cdot C \,.$$

b) Die solchergestalt bestimmte Prämie ist von Mitgliedern zu entrichten, welche bei ihrem Eintritte m Jahre alt sind. Verlangt man die Prämie zu wissen, welche Mitglieder zahlen müssen, die beim Eintritte ein Alter von $m + n$ Jahren haben, und welche daher analoger Weise durch p_{m+n} auszudrücken ist, so hat man nur in (4) $m + n$ statt m zu setzen, und es kommt:

$$0 = z B_{m+n} p_{m+n} - (B_{m+n} - z B_{m+n+1}) C \,.$$

Mit Hülfe dieser Formel lässt sich der gesuchte Reservefonds R nochmals etwas einfacher ausdrücken. Zieht man sie nämlich von (2) ab, so erhält man

$$0 = z^{h-m-n} R + z B_{m+n} (p_m - p_{m+n}) \,,$$

und hieraus

$$(6) \qquad R = \frac{B_{m+n} (p_{m+n} - p_m)}{z^{h-m-n-1}} \,.$$

c) Der durch (3) und (6) bestimmte Reservefonds R drückt aus, wie viel die Anstalt wegen aller A_{m+n} Personen, die von den in ihrem m^{ten} Jahre eingetretenen A_m Personen nach n seitdem verflossenen Jahren noch am Leben sind, in der Casse haben muss. Setzt man daher den Betrag, der wegen jeder einzelnen dieser A_{m+n} Personen im Reservefonds sein muss, $= R'$, so ist

$$(7) \qquad R' = \frac{R}{A_{m+n}} = \frac{B_{m+n}}{A_{m+n}} \cdot \frac{p_{m+n} - p_m}{z^{h-m-n-1}} \,.$$

Der hiermit gefundene Werth von R' lässt sich noch auf eine andere sehr bemerkenswerthe Art herleiten. Zu dem Ende wollen wir vorher untersuchen, wie gross die Mise M sein muss, die eine Person von m Jahren an eine Rentenanstalt zu zahlen hat, um bis an ihr Ableben eine jährliche Rente r, das erste Mal gleich nach Entrichtung der Mise, zu beziehen. Dabei machen wir zugleich die Voraussetzung, dass diese Anstalt, eben so wie die vorige, die von ihr innegehabten Gelder nach dem Zinsfusse z auf Interessen ausleihe.

Wenn nicht eine, sondern A_m Personen, jede m Jahre alt, zur Anstalt treten, von denen jede eine jährliche Rente $= r$ unter den gemachten Bedingungen beziehen will, so bildet sich zuerst, nach Einzahlung der Misen, für die Anstalt ein Fonds $= A_m \cdot M$, und weil unmittelbar nachher die Renten das erste Mal ausgezahlt werden sollen, so vermindert sich der Fonds um $A_m \cdot r$ und wird damit $= A_m \cdot M - A_m \cdot r$.

Dieser Fonds, den man mit F bezeichne, wird für das nun folgende $(m+1)^{\text{te}}$ Altersjahr auf Interessen ausgeliehen und erhebt sich damit zu dem Werthe zF. Am Ende des $(m+1)^{\text{ten}}$ Jahres wird aus ihm an jedes der noch lebenden A_{m+1} Mitglieder die Rente r bezahlt, und er reducirt sich damit auf $zF - A_{m+1} \cdot r$. Heisse F_1 dieser Bestand des Fonds am Ende des $(m+1)^{\text{ten}}$ Jahres, und eben so F_2 sein Bestand am Ende des $(m+2)^{\text{ten}}$ Jahres u. s. w., so hat man, weil die vorigen Schlüsse auch auf jedes folgende Jahr anzuwenden sind, die Gleichungen:

$$F = A_m \cdot M - A_m \cdot r\ ,$$

$$F_1 = zF - A_{m+1} \cdot r = zA_m \cdot M - zA_m \cdot r - A_{m+1} \cdot r\ .$$

$$F_2 = zF_1 - A_{m+2} \cdot r = z^2 A_m \cdot M - z^2 A_m \cdot r - zA_{m+1} \cdot r - A_{m+2} \cdot r\ ,$$

und eben so

$$F_3 =$$

$$= z^3 A_m \cdot M - z^3 A_m \cdot r - z^2 A_{m+1} \cdot r - zA_{m+2} \cdot r - A_{m+3} \cdot r\ ,$$

. . . .

$$F_{h-m-1} =$$

$$= z^{h-m-1} A_m \cdot M - z^{h-m-1} A_m \cdot r - z^{h-m-2} A_{m+1} \cdot r - \ldots - zA_{h-2} \cdot r - A_{h-1} \cdot r$$

$$= z^{h-m-1} A_m \cdot M - B_m \cdot r\ ,$$

nach den Formeln (1).

So wie nun F, F_1, F_2, F_3 die Werthe des Fonds am Ende des m^{ten}, $(m+1)^{\text{ten}}$, $(m+2)^{\text{ten}}$, $(m+3)^{\text{ten}}$ Altersjahres sind, so ist F_{h-m-1} der Bestand desselben am Ende des $(h-1)^{\text{ten}}$ Jahres; und da am Ende des h^{ten} Jahres, als des höchsten erreichbaren, keine der zur Anstalt getretenen Personen mehr am Leben ist, folglich auch keine Rente mehr gezahlt wird, so muss nach dem Princip der Gegenseitigkeit $F_{h-m-1} = 0$ sein. Hiernach hat man die Gleichung:

$$0 = z^{h-m-1} A_m \cdot M - B_m \cdot r\ ,$$

woraus der gesuchte Werth der Mise folgt:

$$M = \frac{B_m}{A_m} \cdot \frac{r}{z^{h-m-1}}\ , \tag{8}$$

oder geradezu

$$M = \frac{B_m}{z^{h-m-1} \cdot A_m}\ ,$$

wenn, wie es bei den Leibrententafeln geschieht, die jährliche Rente $= 1$ gesetzt wird.

Um nun mit Hülfe dieser Theorie von den Leibrenten die Aufgabe, den Reservefonds einer Lebensversicherungsanstalt betreffend, zu lösen, stelle ich folgende Betrachtungen an.

Eine Person ist am Ende ihres m^{ten} Jahres zu der Lebensversiche-

rungsanstalt getreten und hat seitdem die erforderliche Prämie p_m n Jahre hindurch entrichtet. Von jetzt an, wo das Mitglied $m+n$ Jahre alt ist, hat es diese Prämien noch bis zu seinem Ableben alljährlich zu zahlen: die Anstalt aber hat an das Mitglied (oder vielmehr an dessen Erben) bei seinem Ableben die Summe C zu zahlen. Beide Zahlungen können nun auch gleich nach Ablauf des $(m+n)^{\text{ten}}$ Jahres des Mitgliedes vollzogen werden: nämlich von dem Mitgliede an die Casse der jetzige Werth aller noch zu zahlenden Prämien p_m, und von der Casse an das Mitglied der jetzige Werth des einst zu zahlenden Capitals C. Sind diese beiden Zahlungen jetzt geschehen, so ist alle Verbindlichkeit zwischen beiden Theilen aufgehoben und es wird folglich auch nichts mehr im Reservefonds wegen des in Rede stehenden Mitgliedes vorhanden sein. *Der wegen des $(m+n)$-jährigen Mitgliedes nöthige Theil R' des Reservefonds wird daher so gross sein müssen, dass er, vermehrt um den jetzigen Werth aller der noch zu entrichtenden Prämien, eben hinreicht, um an das Mitglied den jetzigen Werth des nach dem Ableben fälligen Capitals zu zahlen.*

Nun ist der jetzige Werth aller der noch zu entrichtenden Prämien, deren jede $= p_m$, offenbar gleich einer Mise, welche eine $(m+n)$-jährige Person an eine Rentenanstalt zu zahlen hat, um eine jährliche Rente $= p_m$ zu beziehen, also nach (8)

$$= \frac{B_{m+n}}{A_{m+n}} \cdot \frac{p_m}{z^{h-m-n-1}} .$$

Ferner ist der jetzige Werth des beim Ableben der jetzt $(m+n)$-jährigen Person zu zahlenden Capitals C gleich dem jetzigen Werthe aller der Prämien, welche die Person entrichten müsste, wenn sie jetzt erst zur Anstalt träte, und jede dieser Prämien ist $= p_{m+n}$. Der jetzige Werth des Capitals C ist daher auch gleich einer Mise, welche eine $(m+n)$-jährige Person an eine Rentenanstalt zu zahlen hat, um eine jährliche Rente $= p_{m+n}$ zu erhalten, und diese Mise ist

$$= \frac{B_{m+n}}{A_{m+n}} \cdot \frac{p_{m+n}}{z^{h-m-n-1}} .$$

Hiernach haben wir die Gleichung

$$R' + \frac{B_{m+n}}{A_{m+n}} \cdot \frac{p_m}{z^{h-m-n-1}} = \frac{B_{m+n}}{A_{m+n}} \cdot \frac{p_{m+n}}{z^{h-m-n-1}} ,$$

und hieraus folgt derselbe Werth von R', wie in (7):

$$R' = \frac{B_{m+n}}{z^{h-m-n-1} \cdot A_{m+n}} (p_{m+n} - p_m) .$$

Man erhält demnach den gesuchten Theil R' des Reservefonds, wenn man

1) die Prämie p_m für das Eintrittsalter von der Prämie p_{m+n} für das jetzige Alter des Mitglieds abzieht und

2) den Rest $p_{m+n} - p_m$ in die Mise

$$\frac{B_{m+n}}{z^{h-m-n-1} \cdot A_{m+n}},$$

welche dem jetzigen Alter für eine Rente $= 1$ zukommt, multiplicirt.

Einer näheren Untersuchung ist jetzt noch die Bestimmung des Reservefonds zu unterwerfen, wenn die Voraussetzung gemacht wird, dass die Mitglieder vom 85ten Jahre an von der Prämienzahlung frei sein sollen. Wir wollen deshalb zu der für die Bestimmung des Reservefonds zuerst erhaltenen Gleichung (Θ) wieder zurückkehren. Ausser dem Gliede $z^{h-m-n}R$, welches den gesuchten Reservefonds selbst enthält, zerfallen alle übrigen darin vorkommenden Glieder in zwei Gruppen. Die Glieder der einen Gruppe haben p zum gemeinschaftlichen Factor und entstehen aus den Prämienzahlungen, welche die in ihrem m^{ten} Jahre eingetretenen und jetzt $m+n$-jährigen Mitglieder von jetzt an bis an ihr dereinstiges Ableben zu entrichten haben. Die Glieder der anderen Gruppe haben den gemeinschaftlichen Factor C und bilden sich dadurch, dass wegen jedes von jetzt an sterbenden Mitgliedes ein Capital $= C$ von der Anstalt ausgezahlt werden muss. Unter der gegenwärtigen Voraussetzung, dass die Mitglieder, welche 85 Jahre und darüber alt sind, keine Prämien mehr zahlen sollen, bleiben nun die Glieder der letzteren Gruppe offenbar unverändert. Dagegen sind von den Gliedern der ersteren Gruppe die letzten $h - 85$

$$z^{h-85}A_{85} \cdot p + z^{h-86}A_{86} \cdot p + \cdots\cdots + z^2 A_{h-2} \cdot p + zA_{h-1} \cdot p$$

jetzt wegzulassen. Denn diese Glieder entstehen aus den Prämien, welche nach dem Ende des 85ten, 86ten u. s. w. Lebensjahres, also mit dem Anfang des 86ten, 87ten, 88ten u. s. w., h^{ten} oder letzten Jahres, in welchem das nach der Tabelle einzige noch übrige Mitglied stirbt, zu entrichten sind. Zufolge der in (I) festgesetzten Bezeichnung ist die Summe dieser Glieder $= zB_{85}\, p_m$ (p_m statt des einfachen p geschrieben; siehe oben). Ob aber diese $h - 85$ Glieder in der Gleichung (Θ) ausgestrichen werden, oder ob ihre Summe von

der rechten Seite der mit (Θ) identischen Gleichung (2) abgezogen wird, kommt ersichtlich auf Eins heraus. Das letztere giebt:

$$(9) \quad 0 = z^{h-m-n} R + z(B_{m+n} - B_{85}) p_m - (B_{m+n} - z B_{m+n+1}) C ,$$

und in dieser Formel ist Alles enthalten, was zur Lösung der jetzigen Aufgabe dient.

Zuerst leuchtet ein, dass hier eben so, wie im Vorigen, für $n = 0$ auch $R = 0$ werden muss, dass folglich

$$(10) \qquad 0 = z(B_m - B_{85}) p_m - (B_m - z B_{m+1}) C .$$

Hieraus ergiebt sich zunächst die von einem beim Eintritte m Jahre alten Mitgliede zu zahlende Prämie

$$(11) \qquad p_m = \frac{B_m - z B_{m+1}}{z(B_m - B_{85})} \cdot C ,$$

die, wie die Vergleichung mit (5) lehrt, hier um etwas grösser ausfällt, als in dem vorigen Falle, wenn die Mitglieder bis zum höchsten Lebensalter Prämien zu entrichten haben.

Ferner folgt aus (10), wenn man $m + n$ für m schreibt:

$$0 = z(B_{m+n} - B_{85}) p_{m+n} - (B_{m+n} - z B_{m+n+1}) C ,$$

und, wenn man diese Gleichung von (9) abzieht:

$$0 = z^{h-m-n} R + z(B_{m+n} - B_{85})(p_m - p_{m+n}) ,$$

mithin

$$R = \frac{(B_{m+n} - B_{85})(p_{m+n} - p_m)}{z^{h-m-n-1}} ,$$

und folglich der Antheil des Reservefonds, welcher auf jedes der jetzt $m + n$ Jahre alten Mitglieder kommt:

$$(12) \qquad R' = \frac{(B_{m+n} - B_{85})(p_{m+n} - p_m)}{z^{h-m-n-1} A_{m+n}} .$$

Hat man also nach (11) die unter der jetzigen Voraussetzung jedem Lebensalter (m Jahre) zugehörige Prämie p_m berechnet, so lässt sich nach (12) der wegen jedes Mitgliedes, das im m^{ten} Jahre angetreten und n Jahre bei der Anstalt verblieben ist, nöthige Theil R' des Reservefonds ausfindig machen.

II. Ueber geometrische Addition und Multiplication.



Vorbemerkung.

Die folgende in Möbius' wissenschaftlichem Nachlass vorgefundene Abhandlung *»Ueber geometrische Addition und Multiplication«* stammt aus dem Jahre 1862. Dass Möbius dieselbe zu veröffentlichen beabsichtigte, lässt sich mit Bestimmtheit nicht nachweisen, wohl aber, dass er noch im Jahre 1865 sein Manuscript einer Revision unterzogen hat, durch welche der erste Entwurf an vielen Stellen zum Theil sehr tiefgehende Umwandlungen erfuhr. Dadurch wird es in hohem Grade wahrscheinlich gemacht, dass Möbius seinen Aufsatz zur Publication bestimmt hatte.

Diese erfolgt nun hier, übereinstimmend mit dem Texte des betreffenden Manuscripts. Nur die beiden letzten Paragraphen sind dem Diarium D_{10} entnommen. (Vergl. bezüglich dieser Diarien die Bemerkungen auf pag. 517 des II. Bandes.)

Ueber die Entstehung der folgenden Abhandlung und ihren Zusammenhang mit anderen wissenschaftlichen Arbeiten von Möbius wird in dem den Schluss dieses Bandes bildenden allgemeinen Bericht über Möbius' litterarische Thätigkeit Näheres mitgetheilt werden.

Dr. Curt Reinhardt.



I. Von der geometrischen Addition gerader Linien.

§. 1. Eine gerade Linie ist ihrer Länge und Lage nach gegeben, wenn ihre zwei Grenzpunkte gegeben sind. Sie ist aber noch ihrer Richtung nach gegeben, wenn man weiss, welcher von ihren zwei Grenzpunkten der Anfangspunkt, oder welcher der Endpunkt sein soll. Eine Linie, deren Anfangspunkt A, und deren Endpunkt B ist, werde mit AB bezeichnet, so dass man den Anfangspunkt zuerst schreibt und den Endpunkt darauf folgen lässt.

§. 2. Dass zwei Linien AB und CD von gleicher Länge sind und einerlei Richtung haben, werde ausgedrückt durch

$$AB \equiv CD \; .$$

Ist daher

$$AB \equiv CD \quad \text{und} \quad CD \equiv EF \; ,$$

so ist auch

$$AB \equiv EF \; .$$

§. 3. Sind AB und CD zwei beliebige Linien, O und O' zwei beliebige Punkte, und macht man

$$OP \equiv AB \; , \qquad PQ \equiv CD \; ,$$

$$O'P' \equiv AB \; , \qquad P'Q' \equiv CD \; ,$$

so ist

$$OQ \equiv O'Q' \; .$$

Wo daher auch der Punkt O angenommen werden mag, so ist, wenn man $OP \equiv AB$, $PQ \equiv CD$ macht, die Länge und Richtung von OQ bloss von den Längen und Richtungen der Linien AB und CD, nicht aber von dem Orte des O abhängig.

Man nennt diese Linie OQ die geometrische Summe der Linien AB und CD oder der ihnen gleichen und gleichgerichteten OP und PQ, und drückt dieses aus durch

$$AB + CD \equiv OQ$$

oder

$$OP + PQ \equiv OQ .$$

Die Construction, durch welche OQ aus AB und CD gefunden wird, heisst die geometrische Addition der Linien AB und CD.

§. 4. Eben so, wie zwei, können auch drei und mehrere ihrer Länge und Richtung nach gegebene Linien zu einer Summe vereinigt werden. Immer aber hat die Linie, welche die Summe darstellt, die nämliche Länge und Richtung, welches auch die Ordnung ist, in welcher man die zu addirenden Linien nach und nach an einander setzt.

Wenn bei der gebrochenen Linie, welche durch Aneinandersetzung der zu addirenden Linien entsteht, der Anfangspunkt der ersten dieser Linien und der Endpunkt der letzten derselben zusammenfallen, so wird man sagen müssen, dass ihre Summe Null ist.

Die Summe zweier Linien ist daher nur dann $= 0$, wenn sie von gleicher Länge und entgegengesetzten Richtungen sind.

Wenn alle zu addirenden Linien einer und derselben Geraden parallel sind, so fällt die geometrische Addition derselben mit der sogenannten algebraischen Addition zusammen, sobald man nur je zwei Linien, je nachdem ihre Richtungen einerlei oder einander entgegengesetzt sind, als Grössen mit einerlei oder entgegengesetzten Zeichen nimmt. Die geometrische Addition ist also als eine Verallgemeinerung der algebraischen Addition zu betrachten.

II. Von der geometrischen Multiplication gerader Linien.

§. 5. Sind AB und CD zwei ihrer Länge und Richtung nach gegebene gerade Linien, und macht man, wie in §. 3,

$$OP \equiv AB \quad \text{und} \quad PQ \equiv CD ,$$

so heisst der Inhalt des Parallelogramms, von welchem OP und PQ zwei auf einander folgende Seiten sind, das geometrische Product von OP in PQ oder von AB in CD, und werde durch

$$\overline{OP \cdot PQ} \quad \text{oder durch} \quad \overline{AB \cdot CD}$$

ausgedrückt, so dass auch dem Zeichen nach

$$\overline{AB \cdot CD} = 2 \cdot OPQ = OPQR ,$$

wenn R die vierte Ecke des zu einem Parallelogramm ergänzten Dreiecks OPQ ist. Ein solches Product ist positiv oder negativ zu

nehmen, je nachdem das eine oder das andere der durch die Folge OPQ ausgedrückte Sinn einer mit den Linien AB und CD zugleich parallelen Ebene ist.

§. 6. Folgerungen. *a* Es ist

$$\overline{OP \cdot PQ} = 2 \cdot OPQ = OP \cdot PQ \cdot \sin OP^\frown PQ \,,$$

folglich, weil nach der vorigen Construction $\overline{AB \cdot CD} = 2 \cdot OPQ$ war,

$$\overline{AB \cdot CD} = AB \cdot CD \cdot \sin AB^\frown CD \,.$$

Dann und nur dann ist $\overline{AB \cdot CD} = 0$, wenn entweder $AB = 0$, oder $CD = 0$, oder wenn AB und CD Theile derselben Geraden oder Parallellinien sind.

b) Das Product $\overline{AB \cdot CD}$ erhält einen seinem anfänglichen entgegengesetzt gleichen Werth, wenn man seine zwei Factoren in umgekehrter Folge nimmt, so wie auch, wenn man die zwei Grenzpunkte des einen oder des anderen Factors mit einander vertauscht; und es ist daher

$$\overline{CD \cdot AB} = - \overline{AB \cdot CD} \,,$$

desgleichen

$$\overline{BA \cdot CD} = \overline{AB \cdot DC} = - \overline{AB \cdot CD} \,.$$

c) Weil

$$ABC = BCA = CAB \,,$$

so ist

$$\overline{AB \cdot BC} = \overline{BC \cdot CA} = \overline{CA \cdot AB} \,.$$

d) Bedeuten $m, a, b, c, d, \ldots$ in einer Ebene enthaltene Linien von gegebener Länge und Richtung, und bestimmt man hieraus die Längen und Richtungen der Linien $b_1, c_1, d_1, \ldots$ also, dass

$$b_1 \equiv a + b \,,$$

$$c_1 \equiv b_1 + c \equiv a + b + c \,,$$

$$d_1 \equiv c_1 + d \equiv a + b + c + d \,,$$

u. s. w., so sind $b_1, c_1, d_1, \ldots$ gleichfalls in jener Ebene enthalten oder doch derselben parallel, und man hat

$$\overline{mb_1} = \overline{ma} + \overline{mb} \,,$$

$$\overline{mc_1} = \overline{mb_1} + \overline{mc} = \overline{ma} + \overline{mb} + \overline{mc} \,,$$

u. s. w. Nun ist

$$\overline{ma} = - \overline{am} \,,$$

und wenn man noch $m \equiv f + g$ setzt:

$$\overline{am} = \overline{af} + \overline{ag} = -\overline{fa} - \overline{ga} \ ,$$

folglich

$$\overline{ma} = \overline{fa} + \overline{ga} \ ,$$

und eben so

$$\overline{mb} = \overline{fb} + \overline{gb} \ ,$$

$$\overline{mc} = \overline{fc} + \overline{gc} \ :$$

damit verwandelt sich die Gleichung

$$\overline{mc_1} = \overline{ma} + \overline{mb} + \overline{mc}$$

in

$$\overline{(f+g)(a+b+c)} = \overline{fa} + \overline{ga} + \overline{fb} + \overline{gb} + \overline{fc} + \overline{gc} \ ,$$

welches auch die Längen und Richtungen der Linien f, g und a, b, c, sind; und eine analoge Gleichung wird für jede andere Anzahl dieser Linien bestehen.

§. 7. Anwendungen. *a*) Seien A, B, C, M vier Punkte einer Ebene. Man mache noch

$$AD \equiv BC \ ,$$

so wird

$$AC \equiv AB + BC \equiv AB + AD \ ;$$

folglich

$$\overline{MA \cdot AC} = \overline{MA \,.\, AB} + \overline{MA \cdot AD} \ ,$$

d. i. (§. 6, *b*)

$$MAC = MAB + MAD \ ,$$

eine Gleichung, welche daher immer besteht, wenn $ABCD$ ein Parallelogramm und M ein beliebiger Punkt in dessen Ebene ist.

b) Sind A, B, C, D vier beliebige Punkte einer Ebene, so ist die doppelte Fläche des Vierecks $ABCD$

$$\begin{aligned} 2\,ABCD &= 2\,ABC + 2\,CDA \\ &= \overline{BC \cdot CA} + \overline{AC \cdot CD} \\ &= \overline{AC \cdot BC} + \overline{AC \cdot CD} \end{aligned}$$

nach §. 6, *b*, und daher nach §. 6, *d*:

$$2\,ABCD = \overline{AC \cdot (BC + CD)} = \overline{AC \cdot BD}$$

d. i.

$$2\,ABCD = AC \cdot BD \cdot \sin AC^{\wedge}BD \ .$$

c) Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes*). Sei ABC ein bei

*) Nach einer Randbemerkung im Manuscript sollte dieser einem Briefe an Apelt (5. Jan. 1846) entnommene Beweis hier eingeschaltet werden. R.

B rechtwinkliges Dreieck und werde dasselbe, um 90° gedreht, in die Lage FGH gebracht, so dass

$$FG = AB\,,\quad GH = BC\,,$$
$$FH = AC\,,$$

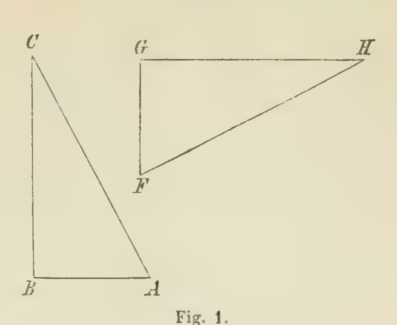


Fig. 1.

FG, GH, FH resp. auf AB, BC, AC senkrecht und demnach FG und GH resp. zu BC und AB parallel sind. Dann ist

$$AC \equiv AB + BC\,,$$
$$FH \equiv FG + GH\,,$$

folglich (§. 6, *d*)

$$\overline{FH \cdot AC} = \overline{(FG + GH) \cdot (AB + BC)}$$
$$= \overline{FG \cdot AB} + \overline{GH \cdot AB} + \overline{FG \cdot BC} + \overline{GH \cdot BC}\,.$$

Nun ist aber (§. 6, *a*)

$$\overline{GH \cdot AB} = 0\,,$$
$$\overline{FG \cdot BC} = 0\,.$$

demnach ergiebt sich

$$\overline{FH \cdot AC} = \overline{FG \cdot AB} + \overline{GH \cdot BC}\,,$$

oder

$$AC^2 = AB^2 + BC^2\,.$$

III. Geometrische Addition ebener Flächen.

§. 8. Sind a, b und m drei in einer Ebene enthaltene, oder doch mit einer Ebene parallele gerade Linien von gegebenen Längen und Richtungen, wird die geometrische Summe $a + b \equiv b_1$ gesetzt und wird unter $\overline{ma}$ die Fläche eines Parallelogramms verstanden, in welchem zwei nächstfolgende Seiten $\equiv m$ und a sind, so ist nach §. 6, *c*

$$\overline{ma} + \overline{mb} = \overline{mb_1}\,,$$

woraus ebendaselbst, wenn die Linien f, g, ... und a, b, ... insgesammt in einer Ebene enthalten, oder einer und derselben Ebene parallel waren, ohne Weiteres die noch allgemeinere Formel

$$\overline{(f+g+\cdots)(a+b+\cdots)} = \overline{fa} + \overline{fb} + \cdots + \overline{ga} + \overline{gb} + \cdots$$

abgeleitet wurde.

Wenn wir daher die Formel $\overline{ma} + \overline{mb} = \overline{mb_1}$ auch in dem Falle als gültig annehmen, wenn a, b und m nicht einer Ebene parallel sind, sondern beliebige Richtungen haben, so wird auch die Entwickelung von $\overline{(f+g+\cdots)(a+b+\cdots)}$ für irgend welche Richtungen der darin enthaltenen Linien Richtigkeit haben.

Diese allgemeiner aufgefasste Addition zweier oder mehrerer ebener Flächen ist vollkommen der geometrischen Addition gerader Linien analog und werde daher die geometrische Addition ebener Flächen genannt.

In der That, macht man (Fig. 2) von einem beliebigen Punkte M ausgehend,

$$MN \equiv m\ , \quad NO \equiv a\ , \quad OQ \equiv b\ ,$$

so ist

$$b_1 \equiv a + b \equiv NO + OQ \equiv NQ\ ,$$

und wenn man noch

$$OO_1 \equiv QQ_1 \equiv NM$$

macht, so wird

$$\overline{ma} \equiv MNOO_1\ ,$$
$$\overline{mb} \equiv O_1OQQ_1\ ,$$
$$\overline{mb_1} \equiv MNQQ_1\ ,$$

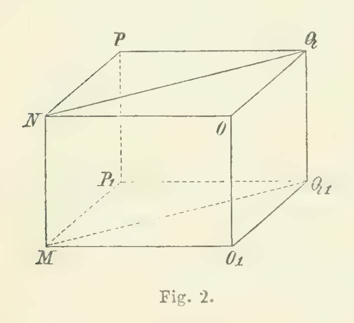


Fig. 2.

und man hat zufolge der Formel $\overline{ma} + \overline{mb} = \overline{mb_1}$, oder vielmehr $\equiv \overline{mb_1}$, weil unter $\overline{mb_1}$ jetzt nicht mehr die algebraische, sondern die geometrische Summe gemeint ist, die Formel

$$MNOO_1 + O_1OQQ_1 \equiv MNQQ_1\ ,$$

deren Analogie mit der Formel $NO + OQ \equiv NQ$ in die Augen springt.

Sollen daher zwei ebene Flächen α und β, deren Ebenen sich schneiden, geometrisch addirt werden, so nehme man (Fig. 2) in der Durchschnittslinie beliebig einen Abschnitt OO_1, construire in der Ebene von α ein Parallelogramm $OO_1MN = \alpha$, in der Ebene von β ein Parallelogramm $O_1OQQ_1 = \beta$, und es wird das Parallelogramm $MNQQ_1 \equiv \alpha + \beta$ sein.

§. 9. **Zusätze.** *a)* Bei der Addition ebener Flächen werden zwei Flächen als identisch betrachtet, wenn sie gleichen Inhalts sind, in einander parallelen Ebenen liegen und darin einerlei Sinnes sind.

Wird daher (vergl. Fig. 2) in der vorigen Construction noch $PP_1 \equiv NM$ gemacht, so ist $O_1 OQQ_1 \equiv MNPP_1$, und daher

$$MNOO_1 + MNPP_1 \equiv MNQQ_1 \ ,$$

also auch

$$MNO + MNP \equiv MNQ \ ,$$

eben so wie $NO + NP \equiv NQ$ war.

b) Die geometrische Summe zweier oder mehrerer ebener Flächen ist unabhängig von der Folge, in welcher man die Flächen nach und nach zu einander addirt $(\alpha + \beta \equiv \beta + \alpha)$.

c) Die geometrische Summe zweier oder mehrerer ebener Flächen ist mit der algebraischen Summe dann und nur dann identisch, wenn die Flächen in einer und derselben Ebene oder in Parallelebenen liegen.

§. 10. Sind M, N, O, P irgend vier Punkte im Raume, so ist

$$(\alpha) \qquad MNO - NOP + OPM - PMN \equiv 0 \ .$$

Beweis. Es ist

$$2\,MNO = 2\,OMN = \overline{OM \cdot MN}$$

und

$$2\,OPM = 2\,PMO = \overline{PM \cdot MO} = -\overline{MO \cdot PM} = \overline{OM \cdot PM} \ :$$

folglich

$$2\,MNO + 2\,OPM \equiv \overline{OM(MN + PM)} \equiv \overline{OM \cdot PN} \ :$$

und auf gleiche Weise, wenn man M, N, O, P resp. in N, O, P, M verwandelt:

$$2\,NOP + 2\,PMN \equiv \overline{PN \cdot MO} \equiv \overline{OM \cdot PN} \ :$$

folglich u. s. w.

§. 11. Zusätze. *a)* Liegen M, N, O, P in einer Ebene, so ist (§. 9, *c*)

$$MNO - NOP + OPM - PMN = 0 \ ,$$

wie auch auf andere Weise leicht erwiesen werden kann.

b) Die in §. 10 erwiesene Formel (α) lässt sich auch also ausdrücken:

$$(\beta) \qquad MNO \equiv NOP + OMP + MNP \ ,$$

d. h. die Grundfläche MNO eines Tetraëders $MNOP$ ist der geometrischen Summe seiner drei Seitenflächen gleich, wenn diese so geschrieben werden, dass jede ihrer Kanten, welche zugleich Kante

der Grundfläche ist, dieselbe Richtung erhält, welche sie im Ausdruck der Grundfläche hat.

Die Formel (β) ist analog der Formel für das Dreieck ABC:

$$AB + BC \equiv AC \ ,$$

indem A und C auf beiden Seiten von $\equiv$ die gleichen Rollen spielen: beiderseits ist A Anfangspunkt, C Endpunkt.

c) Noch eine andere Gestalt, die man der Formel (α) geben kann, ist:

$$(\gamma) \qquad MNO + NPO + OPM + PNM \equiv 0 \ .$$

Hierin kommt, wie in (α) und (β), jede Kante eines jeden der vier Dreiecke zweimal vor. Es unterscheidet sich aber (γ) von (α) und (β) dadurch, dass in (γ) die zwei Ausdrücke derselben Kante stets entgegengesetzte Richtungen haben.

§. 12. Bei einem Polyeder ist jede seiner Kanten zweien und nicht mehreren der dasselbe umgrenzenden Vielecksflächen gemein. Ist das Polyeder ein gewöhnliches d. h. schneidet sich die dasselbe begrenzende Totalfläche nicht selbst, ist daher in analogem Sinne auch jedes Vieleck des Polyeders ein gewöhnliches, und wird alsdann jedes dieser Vielecke durch die Aufeinanderfolge der Ecken im Perimeter des Vielecks ausgedrückt, so kann man in jedem dieser Ausdrücke die Ecken in solcher Ordnung auf einander folgen lassen, dass für jede Kante die Richtungen, welche ihr in den Ausdrücken der zwei ihr gemeinsamen Vielecke zukommen, einander entgegengesetzt sind*).

§. 13. Wird, wie dieses bei einem gewöhnlichen Polyeder immer möglich ist, jede Fläche desselben durch eine solche Aufeinanderfolge seiner Ecken ausgedrückt, dass für jede Kante des Polyeders die zwei Richtungen, welche derselben, als der gemeinsamen Kante zweier Polyederflächen, in Bezug auf die Eckenfolgen bei der einen und der anderen dieser zwei Flächen zukommen, einander entgegengesetzt sind, so wollen wir sagen, dass das System der Flächenausdrücke des Polyeders nach dem Gesetz der Kanten geschrieben sei.

Bei einem gewöhnlichen Polyeder ist die geometrische Summe aller seiner nach dem Kantengesetze geschriebenen Vielecksflächen $\equiv 0$**).

*) Zum Beweis werden am Rande die §§. 3 und 4 des Manuscripts zu der Abhandlung »*Ueber die Bestimmung des Inhalts eines Polyeders*« citirt. (Vergl. Bd. II pag. 477 und 478.) R.

**) Eine Randnotiz hebt die Analogie dieses Satzes mit dem Satze

$$AB + BC + \ldots + MN + NA \equiv 0$$

für ein Polygon $ABC \ldots MN$ hervor. R.

Wir wollen diesen Satz zuerst für Trigonalpolyeder, d. i. für solche Polyeder darthun, deren Seitenflächen insgesammt Dreiecke sind. Sei BC eine Kante des Trigonalpolyeders, und A und D die Spitzen der zwei Dreiecke des Polyeders, welche in BC an einander stossen. Wird das eine dieser zwei Dreiecke durch ABC ausgedrückt, so muss das andere, um dem Kantengesetze zu genügen, einen der gleichgeltenden Ausdrücke CBD, BDC, DCB erhalten, und man hat demnach, wenn die geometrische Summe aller nach dem Kantengesetze ausgedrückten Dreiecke des Polyeders mit Σ bezeichnet wird:

$$\Sigma \equiv ABC + CBD + \cdots .$$

Nun ist nach der Formel (β) in §. 11, wenn Z einen beliebigwo angenommenen Punkt bedeutet:

$$ABC \equiv BCZ + CAZ + ABZ ,$$
$$CBD \equiv BDZ + DCZ + CBZ ,$$

u. s. w.; folglich

$$\Sigma \equiv BCZ + CAZ + ABZ + BDZ + DCZ + CBZ + \cdots .$$

Hierin ist aber

$$BCZ + CBZ = 0 ,$$

und auf gleiche Weise müssen sich bei der vollständigen Entwickelung von Σ, als einer Summe von Dreiecken, welche Z zur gemeinschaftlichen Spitze haben, auch je zwei andere Glieder dieser Summe aufheben, z. B. CAZ und ACZ, indem ACZ aus demjenigen Dreiecke des Polyeders entspringt, welches mit ABC die Kante CA gemein hat, und welches, wenn E seine dritte Ecke ist, in der Reihe $ABC + CBD + \ldots \equiv \Sigma$ durch ACE auszudrücken und hierauf in $ACZ + CEZ + EAZ$ zu verwandeln ist. Mithin muss $\Sigma \equiv 0$ sein.

Derselbe Satz ist aber auch dann noch gültig, wenn das Polyeder nicht bloss von Dreiecken, sondern auch von mehrseitigen Vielecken oder bloss von solchen begrenzt ist, weil jedes gewöhnliche mehrseitige Vieleck durch Ziehung von Diagonalen als eine Summe von Dreiecken dargestellt und damit ein gewöhnliches Polyeder selbst als ein Trigonalpolyeder betrachet werden kann.

§. 13a. Nachtrag. Seien (vergl. Fig. 3 auf pag. 672) a, b, c drei in einer Ebene enthaltene und sich nicht in Einem Punkt schneidende Gerade; a', b', c' drei Gerade derselben Ebene, welche resp. auf a, b, c perpendikulär sind. Die Dreiecke abc und $a'b'c'$

sind hiernach einander ähnlich und von einerlei Sinn, indem durch Drehung des einen Dreiecks in seiner Ebene um einen rechten Winkel seine Seiten den entsprechenden Seiten des anderen parallel werden. Setzt man daher die Schnittpunkte

$$b \cdot c = A \ , \quad c \cdot a = B \ , \quad a \cdot b = C \ ,$$
$$b' \cdot c' = A' \ , \quad c' \cdot a' = B' \ , \quad a' \cdot b' = C' \ ,$$

so verhalten sich

$$BC : CA : AB = B'C' : C'A' : A'B' \ .$$

Auf der Ebene der Figur errichte man noch die gleichlangen und gleichgerichteten Perpendikel AF, BG. CH, so sind $ABGF$, $BCHG$, $CAFH$ drei Rechtecke, die sich ihrem Inhalte nach wie AB, BC, CA, also auch wie $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ verhalten und auf deren Flächen die drei letzten Linien perpendikulär sind. Es gehen aber die Richtungen $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ entweder insgesammt von der inneren auf die äussere, oder insgesammt von der äusseren auf die innere Seite der drei Linien AB, BC, CA; und dasselbe findet statt, wenn man statt der Linien AB, BC, CA die drei Rechtecke $ABGF$, $BCHG$, $CAFH$ setzt, dieselben als die drei Seitenflächen eines dreikantigen Prismas betrachtet und hiernach ihre äusseren Seiten von ihren inneren unterscheidet.

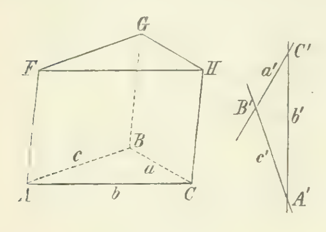


Fig. 3.

Nun ist

$$ABGF + BCHG + CAFH \equiv 0 \ ,$$

und desgleichen

$$A'B' + B'C' + C'A' \equiv 0 \ .$$

Nennen wir daher eine gerade Linie $A'B'$, welche auf einer nach ihrer Lage, nach ihrem Inhalte und nach dem Sinne ihres Perimeters gegebenen ebenen Fläche $ABGF$ perpendikulär ist, eine dem Inhalte der Fläche proportionale Länge, d. i. eine solche Länge hat, dass, nach beliebig vorher festgesetzten Einheiten der Länge und der Fläche, $A'B'$ und $ABGF$ durch dieselbe Zahl ausgedrückt wird, und deren Richtung von A' nach B' dadurch bestimmt wird, dass, die Füsse nach A' und der Kopf nach B', der Sinn des Perimeters etwa zur Rechten gehend erscheint, — nennen wir eine solche Linie die Repräsentante der Fläche $ABGF$, so können wir nach dem Voranstehenden schliessen:

Ist die geometrische Summe dreier Flächen $\equiv 0$, *so ist es auch die geometrische Summe ihrer Repräsentanten, und umgekehrt,*

woraus wir weiter folgern:

Ist eine ebene Fläche die geometrische Summe zweier anderen Flächen, so ist auch von ihren drei Repräsentanten die erste die geometrische Summe der zweiten und dritten, und umgekehrt.

Sollen daher drei oder mehrere ebene Flächen α, β, γ, δ, ... geometrisch addirt werden, so erhält man zur Summe dieselbe Fläche σ, mag man nach §. 8 zuerst die Fläche α und β zur Fläche β', hierauf β' und γ zur Fläche γ', sodann γ' und δ zur Fläche δ', etc. vereinigen, oder mag man, wenn a, b, c, d, ... die Repräsentanten von α, β, γ, δ, ... bezeichnen, successive die geometrischen Summen

$$a + b \equiv b' \ , \quad b' + c \equiv c' \ , \quad c' + d \equiv d' \ , \quad \text{etc.}$$

bestimmen, indem b' die Repräsentante von β' d. i. von $\alpha + \beta$, c' die Repräsentante von γ' d. i. von $\alpha + \beta + \gamma$, u. s. w. und zuletzt die geometrische Summe s aller Linien a, b, c, ... die Repräsentante der geometrischen Summe σ aller Flächen α, β, γ, ... sein wird, so dass man damit die Fläche σ ihrer Stellung, ihrem Sinne und ihrem Inhalte nach construiren kann.

Da aber nach §. 4 die geometrische Summe der Linien a, b, c, ... unabhängig von der Folge ist, in welcher man sie nach und nach zusammensetzt, so muss eine gleiche Unabhängigkeit von der Folge auch bei der nach §. 8 zu bewerkstelligenden successiven Addition beliebig vieler ebener Flächen statt haben, so dass zum Beispiel $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \delta + \beta + \gamma + \alpha$ ist.

IV. Geometrische Multiplication gerader Linien in ebene Flächen.

§. 14. Unter dem geometrischen Producte einer geraden Linie a in eine ebene Fläche α soll der Inhalt des Körpers verstanden werden, welcher durch eine solche Bewegung der Fläche α erzeugt wird, dass jeder Punkt derselben eine der Linie a gleiche und gleichgerichtete Linie beschreibt. Man bezeichne dieses Product mit $\overline{a \cdot \alpha}$ und nehme dasselbe positiv (negativ), wenn, den Kopf an den Anfangspunkt von a und die Füsse an den Endpunkt von a gebracht, der Sinn des Perimeters von α etwa nach der Rechten (Linken) gehend erscheint.

Dieses Product ist dann und nur dann $= 0$, wenn a in α enthalten oder mit α parallel ist.

Macht man das Parallelogramm $ABEC \equiv$ der Fläche α und $FG \equiv$ der Linie a und überdies $DA \equiv FG$, so ist $\overline{a \cdot \alpha}$ gleich dem

Parallelepipedum, dessen Grundfläche $ABEC$ und dessen Gegenfläche durch D geht, gleich dem Sechsfachen des Tetraeders $DABC$, positiv (negativ) genommen, wenn, den Kopf nach D und die Füsse nach A gebracht, beim Hinsehen nach der Linie BC die Richtung von B nach C nach der Rechten (Linken) geht.

Es ist hiernach

$$\begin{aligned} DABC &= DBCA = DCAB \\ &= -DCBA = -DACB = -DBAC \\ &= -ADBC = -ABCD = -ACDB = +ACBD = \ldots . \end{aligned}$$

Der Inhalt des Tetraeders, welches durch eine Nebeneinanderstellung der seine vier Ecken bezeichnenden Buchstaben ausgedrückt ist, ändert demzufolge jedesmal sein Zeichen, wenn zwei der vier Buchstaben gegenseitig vertauscht werden.

Man hat folglich, wenn $ABEC$ ein Parallelogramm ist,

$$\overline{DA \cdot ABEC} = 2 \cdot \overline{DA \cdot ABC} = 6 \cdot DABC ,$$

so wie

$$\overline{DA \cdot ABC} = 3 \cdot DABC .$$

Alle geometrischen Producte aus einer Kante eines Tetraeders in eine der zwei Seitenflächen desselben, welche von der Kante nicht mit begrenzt werden, sind daher, abgesehen vom Zeichen, einander gleich, indem sie alle dem Dreifachen des positiven oder negativen Inhalts des Tetraeders gleich sind.

So ist z. B., mit Rücksicht auf die Zeichen,

$$\overline{DA \cdot ABC} = \overline{DB \cdot ABC} = \overline{DC \cdot ABC} = 3 \cdot DABC ;$$

$$\overline{AB \cdot BCD} = 3 \cdot ABCD = -3 \cdot DABC = -\overline{DA \cdot ABC} = \overline{AD \cdot ABC} .$$

Zusatz. Nach §. 5 ist

$$2 \cdot ABC = \overline{AB \cdot AC} ,$$

und man kann daher statt

$$2 \cdot \overline{AD \cdot ABC} = -6 \cdot DABC$$

auch schreiben:

$$\overline{AD \cdot AB \cdot AC} = -6 \cdot DABC = 6 \cdot ADBC ,$$

so wie auch

$$\overline{AB \cdot AC \cdot AD} = 6 \cdot ABCD .$$

Auf gleiche Art ergiebt sich, weil

$$\overline{AB \cdot BC} = 2 \cdot ABC$$

ist:

$$\overline{DA \cdot AB \cdot BC} = 2\,\overline{DA \cdot ABC} = 6 \cdot DABC \ ,$$

und eben so

$$\overline{AB \cdot BC \cdot CD} = 2 \cdot \overline{AB \cdot BCD} = 6 \cdot ABCD \ .$$

Noch geht hieraus hervor, dass *das geometrische Product dreier Linien sein Zeichen ändert, wenn zwei der Linien gegenseitig vertauscht werden.*

§. 15. Ist von drei ihrer Länge und Richtung nach gegebenen geraden Linien a, b, c die dritte $c \equiv a + b$, so ist auch, wenn ζ eine ihrem Inhalte, ihrem Sinne und ihrer Stellung nach gegebene Fläche bedeutet,

$$\overline{c \cdot \zeta} = \overline{a \cdot \zeta} + \overline{b \cdot \zeta} \ .$$

Beweis. Man mache

$$a \equiv AB \ , \quad b \equiv BC \ ,$$

so ist

$$c \equiv AC \ ,$$

und daher zu beweisen, dass

$$\overline{AB \cdot \zeta} + \overline{BC \cdot \zeta} = \overline{AC \cdot \zeta} \ .$$

Zu dem Ende lege man durch A, B, C drei mit ζ parallele Ebenen α, β, γ und füge eine Gerade hinzu, welche die Ebenen α, β, γ in A', B', C' rechtwinklig schneide. Denkt man sich nun die Fläche ζ als ein beliebiges Vieleck dargestellt, so ist $\overline{AB \cdot \zeta}$ gleich einem Prisma, dessen Grundfläche ζ in α und deren Gegenfläche in β liegt, folglich gleich einem Prisma $A'B' \cdot \zeta$, dessen Grundfläche ζ und dessen Höhe $A'B'$ ist. Eben so sind $\overline{BC \cdot \zeta}$ und $\overline{AC \cdot \zeta}$ den Prismen $B'C' \cdot \zeta$ und $A'B' \cdot \zeta$ gleich, welche ζ zur Grundfläche und resp. $B'C'$ und $A'C'$ zu Höhen haben. Es verhalten sich aber die drei Prismen $A'B' \cdot \zeta$, $B'C' \cdot \zeta$, $A'C' \cdot \zeta$ auch ihrem Zeichen nach wie $A'B'$, $B'C'$, $A'C'$; und da

$$A'B' + B'C' = A'C'$$

ist, so ist auch

$$A'B' \cdot \zeta + B'C' \cdot \zeta = A'C' \cdot \zeta \ ,$$

folglich auch

$$\overline{AB \cdot \zeta} + \overline{BC \cdot \zeta} = \overline{AC \cdot \zeta} \ .$$

Zusätze: a) Man setze die ebene Fläche ζ dem geometrischen Producte der zwei geraden Linien f und g gleich, so verwandelt sich die Gleichung

$$\overline{a \cdot \zeta} + \overline{b \cdot \zeta} = \overline{c \cdot \zeta}$$

in die Gleichung

$$\overline{afg} + \overline{bfg} = \overline{cfg} \; .$$

Letztere Gleichung ist aber nach §. 14, Zusatz gleichgeltend mit

$$\overline{fga} + \overline{fgb} = \overline{fgc} \; ,$$

weil

$$\overline{afg} = -\overline{fag} = \overline{fga} \; , \quad \text{u. s. w.};$$

und man kann daher statt

$$\overline{a \cdot \zeta} + \overline{b \cdot \zeta} = \overline{c \cdot \zeta}$$

auch schreiben

$$\overline{\zeta \cdot a} + \overline{\zeta \cdot b} = \overline{\zeta \cdot c} \; .$$

b) Auf dieselbe Art hat man, wenn von irgend drei Strecken a, b, c die geometrische Summe die Strecke d ist:

$$\overline{a \cdot \zeta} + \overline{b \cdot \zeta} + \overline{c \cdot \zeta} = \overline{d \cdot \zeta} \; ,$$

so wie

$$\overline{\zeta \cdot a} + \overline{\zeta \cdot b} + \overline{\zeta \cdot c} = \overline{\zeta \cdot d} \; .$$

Denn setzt man $a + b \equiv b'$ und daher $b' + c \equiv d$, so wird

$$\overline{a \cdot \zeta} + \overline{b \cdot \zeta} = \overline{b' \cdot \zeta}$$

und

$$\overline{b' \cdot \zeta} + \overline{c \cdot \zeta} = \overline{d \cdot \zeta} \; ;$$

folglich u. s. w. Eben so ist überhaupt bei einer beliebigen Anzahl von Strecken $a, b, c, \ldots$

$$\overline{a \cdot \zeta} + \overline{b \cdot \zeta} + \overline{c \cdot \zeta} + \ldots = \overline{(a + b + c + \ldots) \cdot \zeta} \; .$$

§. 16. In der obigen aus $a + b \equiv c$ entspringenden Gleichung

$$\overline{fga} + \overline{fgb} = \overline{fgc}$$

können wegen der gegenseitigen Unabhängigkeit von a, b, g die geometrischen Producte $\overline{ga}$ und $\overline{gb}$ als die Ausdrücke irgend zweier Flächen α und β angesehen werden. Weil ferner $a + b \equiv c$ ist, so ist (§. 6)

$$\overline{ga} + \overline{gb} \equiv \overline{gc} \; ,$$

also die Fläche $\overline{gc}$ die geometrische Summe von α und β, welche γ heisse.

Ist demnach von drei ebenen Flächen α, β, γ die dritte die geometrische Summe der ersten und zweiten, so ist auch, wenn f eine begrenzte gerade Linie bedeutet,

$$\overline{f\alpha} + \overline{f\beta} = \overline{f\gamma} \; ,$$

oder, was dasselbe ist,

$$\overline{f\alpha} + \overline{f\beta} = \overline{f(\alpha + \beta)} \ .$$

Hieraus kann ähnlicherweise, wie im vorigen Paragraphen, weiter gefolgert werden, dass

$$\overline{f\alpha} + \overline{f\beta} + \overline{f\gamma} + \ldots = \overline{f(\alpha + \beta + \gamma + \ldots)} \ .$$

Auch können in jedem dieser Producte die zwei Factoren desselben mit einander vertauscht werden.

§. 17. Seien $a, a', a'', \ldots\ldots, b, b', b'', \ldots\ldots, c, c', c'', \ldots\ldots$ drei Reihen irgend welcher Strecken von beliebigen Längen und Richtungen. Man setze die geometrischen Summen dieser Reihen

$$a + a' + a'' + \ldots\ldots \equiv f \ ,$$

$$b + b' + b'' + \ldots\ldots \equiv g \ ,$$

$$c + c' + c'' + \ldots\ldots \equiv h \ ,$$

so ist nach §. 8:

$$\overline{fg} \equiv \overline{ab} + \overline{ab'} + \overline{a'b} + \overline{a'b'} + \ldots\ldots$$

Multiplicirt man diese Formel der Reihe nach mit $c, c', c'', \ldots\ldots$ so kommt nach §. 16

$$\overline{fgc} = \overline{abc} + \overline{ab'c} + \overline{a'bc} + \overline{a'b'c} + \ldots\ldots ,$$

$$\overline{fgc'} = \overline{abc'} + \overline{ab'c'} + \overline{a'bc'} + \overline{a'b'c'} + \ldots\ldots ,$$

$$\overline{fgc''} = \overline{abc''} + \overline{ab'c''} + \overline{a'bc''} + \overline{a'b'c''} + \ldots\ldots .$$

Addirt man jetzt alle diese Gleichungen, so erhält man linker Hand nach §. 15

$$\overline{fgc} + \overline{fgc'} + \overline{fgc''} + \ldots = \overline{fg(c + c' + c'' + \ldots)}$$

$$= \overline{fgh} \ ,$$

und es ist daher

$$\overline{fgh} = \overline{(a + a' + \ldots)(b + b' + \ldots)(c + c' + \ldots)}$$

$$= \overline{abc} + \overline{ab'c} + \overline{a'bc} + \overline{a'b'c} + \overline{abc'} + \ldots .$$

Die algebraische Entwickelung des Products aus drei Summen f, g, h irgend welcher Grössen in eine Summe von Producten aus je drei Factoren, von denen der erste, zweite und dritte resp. Glieder der Summen f, g, h sind, diese Entwickelung ist darnach auch in geometrischer Bedeutung zulässig, sobald die Glieder von f, g, h irgend welche Strecken sind.

V. Von der projectiven Multiplication gerader Linien.

§. 18. Unter der Projection werde hier nur die rechtwinklige verstanden. Hiernach ist die Projection eines Punktes auf eine gerade Linie der Fusspunkt des von dem Punkte auf die Linie gefällten Perpendikels, oder, was dasselbe ist, der Durchschnitt der Linie mit einer durch den Punkt gelegten und die Linie rechtwinklig schneidenden Ebene.

Ein Punkt und dessen Projectionen auf zwei oder mehrere parallele Gerade liegen daher insgesammt in einer die Linien rechtwinklig schneidenden Ebene.

Sind A' und B' die Projectionen zweier Punkte auf die Gerade g, so heisst die Strecke $A'B'$ die Projection der Strecke AB auf g, und ist positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem die Richtung von A' nach B' mit der vorher bestimmten positiven Richtung von g übereinstimmt, oder nicht.

Die Projectionen derselben Strecke auf zwei oder mehrere einander gleichgerichtete Gerade, so wie auch die Projectionen einander gleicher und gleichgerichteter Strecken auf eine und dieselbe Gerade sind einander gleich.

§. 19. Unter dem projectiven Product der Strecke AB in die Strecke CD verstehe man die Zahl, welche hervorgeht, wenn man die Projection $A'B'$ von AB auf die Gerade g, in welcher C und D liegen, bestimmt, sodann nach Festsetzung einer gewissen Längeneinheit die zwei Zahlen, durch welche $A'B'$ und CD hiernach ausgedrückt werden, mit einander multiplicirt, und diesem Producte das positive oder negative Zeichen giebt, je nachdem $A'B'$ und CD in g einerlei oder entgegengesetzte Richtungen haben. — Werde dieses Product von AB in CD mit $\underline{AB \cdot CD}$ bezeichnet.

Folgerungen: a) Das Product $\underline{AB \cdot CD}$ bleibt ungeändert, wenn man statt AB und CD zwei ihnen gleiche und gleichgerichtete Strecken setzt.

b) Man hat

$$\underline{AB \cdot CD} + \underline{BA \cdot CD} = 0 \,,$$

$$\underline{AB \cdot CD} + \underline{AB \cdot DC} = 0 \,,$$

$$\underline{AB \cdot CD} = \underline{BA \cdot DC} \,,$$

und daher

$$\underline{AB \cdot CD} = -\underline{BA \cdot CD} = -\underline{AB \cdot DC} = \underline{BA \cdot DC} \,.$$

c) Es ist

$$\underline{AB \cdot CD} = \underline{CD \cdot AB} \; .$$

Denn macht man, von einem beliebigen Punkte F (Fig. 4) ausgehend,

$$FG \equiv AB \; , \quad FH \equiv CD$$

und fällt von G und H auf FH und FG die Perpendikel GG' und HH', so ist

$$\underline{AB \cdot CD} = \underline{FG \cdot FH} = FG' \cdot FH$$

und

$$\underline{CD \cdot AB} = \underline{FH \cdot FG} = FH' \cdot FG \; .$$

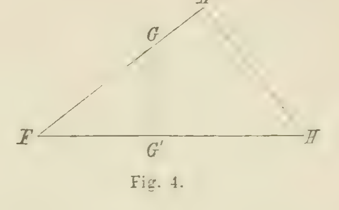


Fig. 4.

Es verhält sich aber

$$FG' : FG = FH' : FH \; ,$$

und es ist daher, auch dem Zeichen nach,

$$FG' \cdot FH = FH' \cdot FG \; ,$$

d. i.

$$\underline{AB \cdot CD} = \underline{CD \cdot AB} \; .$$

d) Sind die Strecken AB und CD einander parallel, so ist das projective Product $\underline{AB \cdot CD}$ dem algebraischen Product $AB \cdot CD$ gleich. Bilden aber AB und CD einen rechten Winkel, so ist $\underline{AB \cdot CD} = 0$.

e) Bedeuten A' und B', wie oben, die Fusspunkte der von A und B auf CD gefällten Perpendikel, so ist

$$A'B' = AB \cdot \cos AB^\wedge CD \; ,$$

und daher

$$\underline{AB \cdot CD} = AB \cdot CD \cdot \cos AB^\wedge CD \; ,$$

und eben so

$$\underline{CD \cdot AB} = CD \cdot AB \cdot \cos CD^\wedge AB \; .$$

Es ist aber

$$\cos AB^\wedge CD = \cos CD^\wedge AB \; ,$$

folglich, wie in *c*,

$$\underline{AB \cdot CD} = \underline{CD \cdot AB} \; ,$$

während

$$\overline{AB \cdot CD} = AB \cdot CD \cdot \sin AB^\wedge CD$$

und daher

$$\overline{AB \cdot CD} = - \overline{CD \cdot AB}$$

war.

§. 20. Sind a, b, f (Fig. 5) irgend drei Strecken, und s die geometrische Summe von a und b, so ist

$$\underline{af} + \underline{bf} = \underline{sf} \; .$$

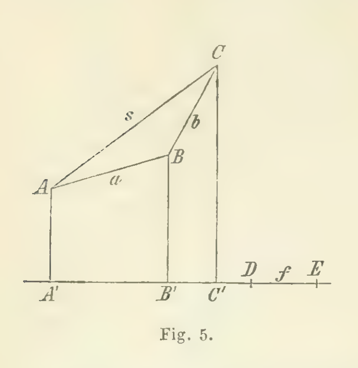


Fig. 5.

Denn macht man, von A ausgehend,

$$AB \equiv a \; , \quad BC \equiv b \; ,$$

so ist

$$s \equiv AB + BC \equiv AC \; .$$

Werde nun die Strecke f durch DE dargestellt, und werden von A, B und C auf DE die Perpendikel AA', BB' und CC' gefällt, so sind $A'B'$, $B'C'$, $A'C'$ die Projectionen von AB, BC, AC auf DE, d. i. von a, b, s auf f, und die zu beweisende Gleichung wird identisch sein mit der algebraischen Gleichung

$$A'B' \cdot DE + B'C' \cdot DE = A'C' \cdot DE \; .$$

Die Richtigkeit der letzteren aber folgt sogleich daraus, dass ihre fünf Punkte in einer Geraden liegen, dass mithin bei jeder Lage von A', B', C' die Gleichung

$$A'B' + B'C' = A'C'$$

in algebraischer Bedeutung genommen richtig ist.

Folgerung. Es ist demnach, wenn das Pluszeichen zwischen zwei Strecken immer nur die geometrische Addition der Strecken ausdrückt,

$$\underline{(a+b)f} = \underline{af} + \underline{bf} \; .$$

Hieraus aber kann man, wie in §. 6, c, weiter schliessen, dass auch bei mehreren zu addirenden Strecken a, b, c, ...

$$\underline{(a+b+c+\ldots)f} = \underline{af} + \underline{bf} + \underline{cf} + \ldots. \; ,$$

und dass, wenn man auch f als eine geometrische Summe von Strecken a', b', c', ... ausdrückt,

$$\underline{(a+b+c+\ldots)(a'+b'+c'+\ldots)} = \underline{aa'} + \underline{ab'} + \underline{ba'} + \underline{bb'} + \ldots.$$

ist.

§. 21. Anwendungen. 1) Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes. Ist ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse AB, so ist

$$AB = AC + CB \; ,$$

folglich

$$\underline{AB}^2 = \underline{(AC + CB)}^2$$

oder

$$(\alpha)\qquad \underline{AB}^2 = \underline{AC}^2 + 2\,\underline{AC\cdot CB} + \underline{CB}^2 .$$

Nun ist

$$\underline{AB}^2 = AB\cdot AB\cdot \cos AB^\frown AB = AB^2 ,$$

eben so

$$\underline{AC}^2 = AC^2 ,\quad \underline{CB}^2 = CB^2$$

und

$$\underline{AC\cdot CB} = AC\cdot CB\cdot \cos AC^\frown CB = 0 ,$$

weil $AC^\frown CB = 90^0$; demnach geht (α) über in

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 ,$$

was zu beweisen war.

2) Auch für das nicht rechtwinklige Dreieck ABC gilt die Relation (α). Weil aber im Allgemeinen

$$2\,\underline{AC\cdot CB} = 2\,AC\cdot CB\cdot \cos AC^\frown CB$$

und nicht $= 0$ ist, so folgt

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 + 2\,AC\cdot CB\cdot \cos AC^\frown CB ,$$

wobei $AC^\frown CB$ den Winkel bedeutet, den die in den Richtungen AC und CB genommenen Geraden mit einander einschliessen.

3) Ist $ABCD$ ein Parallelogramm (Fig. 6) und M ein Punkt in der Ebene desselben, so ist

$$\underline{AM\cdot AB} + \underline{AM\cdot AD} = \underline{AM\cdot AC} .$$

Nun ist

$$\underline{AM\cdot AB} =$$

$$AM\cdot AB\cdot \cos MAB = AB'\cdot AB ,$$

wenn B' der Fusspunkt des von M auf AB gefällten Perpendikels ist. Eben so hat man, wenn D', C' die Fusspunkte der von M auf AD und AC gefällten Perpendikel bezeichnen:

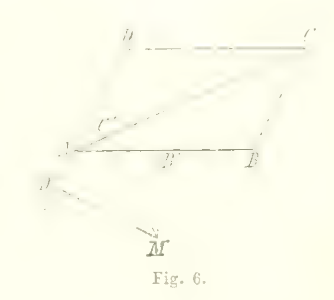


Fig. 6.

$$\underline{AM\cdot AD} = AD'\cdot AD ,$$

$$\underline{AM\cdot AC} = AC'\cdot AC .$$

Dies giebt uns, weil M ein willkürlicher Punkt ist, und weil $MC'A$, $MB'A$, $MD'A$ rechte Winkel sind, den Satz:

Wird in der Ebene eines Parallelogramms $ABCD$ durch die eine Ecke A desselben ein Kreis beschrieben und trifft dieser die von A ausgehenden Seiten AB und AD und die Diagonale AC in B', D' und C', so ist

$$AB \cdot AB' + AD \cdot AD' = AC \cdot AC' \; .$$

4) Seien A, B, C, D vier Punkte im Raume. Man hat

$$AC \equiv AB + BC \equiv AD + DC \; ,$$

folglich

$$2\,\underline{AC \cdot BD} = \underline{(AB + BC + AD + DC) \cdot BD}$$
$$= \underline{(AB + AD) \cdot BD} + \underline{(BC + DC) \cdot BD} \; .$$

Es ist aber

$$\underline{(AB + AD) \cdot BD}$$
$$= \underline{(AB + AD)\,(BA + AD)}$$
$$= \underline{AB \cdot BA} + \underline{AB \cdot AD} + \underline{AD \cdot BA} + \underline{AD \cdot AD}$$
$$= -\,AB^2 + AD^2 \; ,$$

weil nach §. 19

$$\underline{AD \cdot BA} = \underline{BA \cdot AD} = -\,\underline{AB \cdot AD} \; ;$$

eben so ist

$$\underline{(BC + DC) \cdot BD} = \underline{(BC + DC)\,(BC + CD)}$$
$$= BC^2 - CD^2 \; ,$$

folglich

$$2\,\underline{AC \cdot BD} = 2\,AC \cdot BD \cdot \cos AC^{\wedge}BD$$
$$= -\,AB^2 + BC^2 - CD^2 + DA^2 \; .$$

VI. Relationen zwischen geometrischen und projectiven Producten von Strecken in einer Ebene.

§. 22. Liegen vier Strecken u, v, a, a' in einer Ebene, und sind u und v auf einander rechtwinklig, so ist:

(I) $$\underline{au} \cdot \underline{a'v} + \overline{av} \cdot \overline{a'u} = 0 \; .$$

Beweis. Sei (Fig. 7) $a \equiv FG$. Man lege durch F eine Parallele mit u, und durch G eine Parallele mit v, nenne H den Durch-

schnitt dieser Parallelen und setze die Exponenten der Verhältnisse

$$FH : u = \varkappa\ , \quad HG : v = \lambda\ ,$$

so hat man

$$FG \equiv FH + HG\ ,$$

d. i.

$$a \equiv \varkappa u + \lambda v\ ;$$

und gleicherweise kann man die Strecke

$$a' \equiv \mu u + \nu v$$

setzen, wo μ und ν zwei von der Grösse und der gegenseitigen Lage der Strecken u, v, a' abhängige Zahlen sind. Es folgt hieraus, und weil der Winkel $u^\frown v = \pm 90^0$ sein soll,

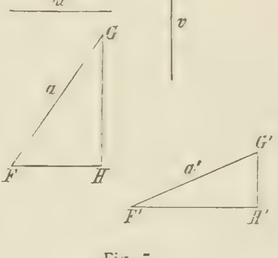


Fig. 7.

$$\underline{au} = \varkappa \cdot \underline{uu} + \lambda \cdot \underline{vu} = \varkappa \cdot \underline{uu}\ ,$$

$$\overline{av} = \varkappa \cdot \overline{uv} + \lambda \cdot \overline{vv} = \varkappa \cdot \overline{uv}\ ,$$

$$\overline{a'u} = \mu \cdot \overline{uu} + \nu \cdot \overline{vu} = \nu \cdot \overline{vu}\ ,$$

$$\underline{a'v} = \mu \cdot \underline{uv} + \nu \cdot \underline{vv} = \nu \cdot \underline{vv}\ ,$$

demnach

$$\overline{a'u} \cdot \overline{av} = \nu\varkappa \cdot \overline{vu} \cdot \overline{uv} = -\nu\varkappa\,(\overline{uv})^2 = -\nu\varkappa \cdot u^2 v^2\ ,$$

$$\underline{au} \cdot \underline{a'v} = \varkappa\nu \cdot \underline{uu} \cdot \underline{vv} = \varkappa\nu \cdot u^2 v^2\ ,$$

folglich

$$\underline{au} \cdot \underline{a'v} + \overline{av} \cdot \overline{a'u} = 0\ .$$

§. 23. Seien u, v, u', v', a fünf in einer Ebene liegende Strecken von solcher Lage, dass $u^\frown v = u'^\frown v' = 90^0$: dann kann man die Gleichung (I) des §. 22, welche zwischen den Strecken u, v, a, a' besteht, sowohl auf die vier Strecken u, v, a, u', wie auf die vier Strecken u', v', a, u anwenden:

(I) $$\overline{av} \cdot \overline{u'u} = -\underline{au} \cdot \underline{u'v}\ ,$$

(I*) $$\overline{av'} \cdot \overline{uu'} = -\underline{au'} \cdot \underline{uv'}\ .$$

Wird (I) von (I*) abgezogen, so kommt, weil $\overline{u'u} = -\overline{uu'}$ ist:

(II) $$\overline{uu'}\,(\overline{av} + \overline{av'}) = \underline{au} \cdot \underline{u'v} - \underline{au'} \cdot \underline{uv'}\ ,$$

eine Gleichung zwischen fünf Strecken a, u, u', v, v' in einer Ebene, von denen u und v, so wie u' und v' rechte Winkel bilden.

Man setze noch

$$v + v' \equiv b\ ,$$

so wird

$$\overline{av} + \overline{av'} = \overline{a(v + v')} = \overline{ab}\ ,$$

$$\underline{bu'} = \underline{(v + v')u'} = \underline{vu'} + \underline{v'u'} = \underline{vu'} = \underline{u'v}\ ,$$

weil $v'^\frown u' = \pm 90°$ und daher $\underline{v'u'} = 0$ ist; eben so

$$\underline{bu} = \underline{(v + v')u} = \underline{v'u} = \underline{uv'}\ .$$

weil $v^\frown u = \pm 90°$. Hiermit geht die Gleichung (II) über in

$$\text{(III)} \qquad \overline{ab} \cdot \overline{uu'} = \underline{au} \cdot \underline{bu'} - \underline{au'} \cdot \underline{bu}\ ,$$

eine Gleichung zwischen irgend vier in einer Ebene begriffenen Strecken a, b, u, u'. Denn durch Construction eines Parallelogramms um b als Diagonale kann b als die geometrische Summe zweier anderer Geraden v und v' dargestellt werden, welche mit b in einer Ebene liegen und darin in zwei gegebene gerade Linien (in die auf u und u' perpendikulären Linien) fallen.

Zusätze. *a*) Die Gleichung (III) nimmt, wenn man zufolge der Definitionen des geometrischen und projectiven Products von Strecken $\overline{ab}$ durch $ab \sin ab$ und $\underline{ab}$ durch $ab \cos ab$ ersetzt, die folgende Form an:

$$\text{(III*)} \qquad \sin ab \cdot \sin uu' = \cos au \cdot \cos bu' - \cos au' \cdot \cos bu\ .$$

b) Setzt man in Gleichung (III*) $a^\frown u' = 0$, oder, mit anderen Worten, setzt man voraus, dass a und u' einerlei Richtung haben, so wird

$$u^\frown u' = u^\frown a + a^\frown u' = u^\frown a\ ,$$

$$b^\frown u' = b^\frown a + a^\frown u' = b^\frown a\ ,$$

und damit geht (III*) über in

$$\sin ab \cdot \sin ua = \cos au \cdot \cos ba - \cos bu$$

oder

$$\cos bu =$$

$$\cos (ba + au) = \cos ba \cdot \cos au - \sin ba \cdot \sin au$$

VII. Von der projectiven Multiplication ebener Flächen.

§. 24. Das Product, welches hervorgeht, wenn man von zwei ebenen Flächen die rechtwinklige Projection der einen auf die Ebene der anderen in diese andere multiplicirt, heisse das projective Product der beiden Flächen.

Sind daher $A', B', C', D', \ldots$ die rechtwinkligen Projectionen der Punkte $A, B, C, D, \ldots$ auf die Ebene FGH, so ist das projective Product der Vielecksflächen $ABCD\ldots$ und $FGHI\ldots$, welches man durch

$$\underline{ABCD\ldots \times FGHI\ldots}$$

ausdrücke, gleich $A'B'C'D'\ldots \times FGHI\ldots$.

Weil hierbei — man nehme jetzt als zu multiplicirende Flächen die Dreiecke ABC und FGH — die Linien AA', BB', CC' Parallellinien sind, so sind $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CAA'C'$ ebene Vielecke, und man hat nach §. 13

$$ABC \equiv A'B'C' + ABB'A' + BCC'B' + CAA'C' .$$

Sind nun von den vier Flächen $A'B'C'$, $ABB'A'$, etc. resp. die Strecken IK, KL, LM, MN die Repräsentanten, so ist

$$IN \equiv IK + KL + LM + MN$$

die Repräsentante von ABC. Denkt man sich ferner das Dreieck $A'B'C'$ horizontal, so sind die drei Vierecke $ABB'A'$, ... vertical, folglich IK vertical und KL, LM, MN horizontal, also auch $KN \equiv KL + LM + MN$, horizontal. Das Dreieck IKN ist mithin bei K rechtwinklig und daher

$$IN : IK = 1 : \cos IN^{\wedge}IK .$$

Es verhalten sich aber IN, IK wie die von ihnen repräsentirten Flächen ABC, $A'B'C'$, und es ist

$$IN^{\wedge}IK = ABC^{\wedge}A'B'C' .$$

folglich

$$A'B'C' = ABC \cdot \cos ABC^{\wedge}A'B'C' .$$

§. 25. Folgerungen.

a) $\underline{ABC \cdot FGH} = A'B'C' \cdot FGH$

$$= ABC \cdot FGH \cdot \cos ABC^{\wedge}FGH .$$

b) $\underline{ABC \cdot FGH} = \underline{FGH \cdot ABC} = -\underline{CBA \cdot FGH}$, etc.

c) Ist $ABCD$ ein ebenes Viereck, sind A', B', C', D' die rechtwinkligen Projectionen von A, B, C, D auf die Ebene FGH und wird der Winkel $ABCD^{\wedge}FGH = \varphi$ gesetzt, so ist

$$A'B'C' = ABC \cos \varphi \;,$$
$$C'B'D' = CBD \cos \varphi \;,$$

folglich

$$A'B'C' + C'B'D' = (ABC + CBD) \cos \varphi \;,$$

d. i.

$$A'B'C'D' = ABCD \cos \varphi \;,$$

folglich

$$\underline{ABCD \cdot FGH} = A'B'C'D' \cdot FGH = ABCD \cdot FGH \cdot \cos \varphi \;.$$

Eben so hat man, wenn I ein vierter Punkt der Ebene FGH ist:

$$A'B'C'D' \cdot GHI = ABCD \cdot GHI \cdot \cos \varphi \;,$$

demnach durch Addition

$$A'B'C'D' \cdot (FGH + HGI) = ABCD\,(FGH + HGI) \cos \varphi \;,$$

oder

$$A'B'C'D' \cdot FGHI = \underline{ABCD \cdot FGHI}$$
$$= ABCD \cdot FGHI \cdot \cos \varphi \;.$$

Ueberhaupt wird das projective Product zweier ebener Vielecksflächen erhalten, wenn man das Product aus den Flächen selbst mit dem Cosinus des von ihren Ebenen gebildeten Winkels multiplicirt.

§. 26. Seien ABC und FGH zwei nicht in einer Ebene enthaltene Dreiecke. Die rechtwinkligen Projectionen von A, B, C auf die Ebene FGH nenne man A', B', C' und setze die vier in einer Ebene enthaltenen Strecken

$$C'A' = a \;,\quad C'B' = b \;,\quad HF = u \;,\quad HG = u' \;,$$

so ist nach Gleichung (III) in §. 23

$$\text{(M)} \quad \overline{\overline{C'A' \cdot C'B'} \cdot \overline{HF \cdot HG}}$$
$$= \underline{C'A' \cdot HF} \cdot \underline{C'B' \cdot HG} - \underline{C'A' \cdot HG} \cdot \underline{C'B' \cdot HF} \;.$$

Nun ist (§. 6, c)

$$\overline{C'A' \cdot C'B'} = 2\,A'B'C'$$
$$\overline{HF \cdot HG} = 2\,FGH$$

und daher

$$\overline{\overline{C'A' \cdot C'B'} \cdot \overline{HF \cdot HG}} = 4\,A'B'C' \cdot FGH = 4\,\underline{ABC \cdot FGH} \;.$$

Ferner ist

$$C'A' = C'C + CA + AA' \;,$$

folglich

$$\underline{C'A' \cdot HF} = \underline{CA \cdot HF} \;,$$

weil $C'C\,\hat{}\,HF$ und $AA'\,\hat{}\,HF$ rechte Winkel sind. Gleicherweise ist

$$\underline{C'B'} \cdot \underline{HG} = \underline{CB \cdot HG}\,,$$
$$\underline{C'A'} \cdot \underline{HG} = \underline{CA \cdot HG}\,,$$
$$\underline{C'B'} \cdot \underline{HF} = \underline{CB \cdot HF}\,,$$

und deshalb zufolge (M)

(N) $4\,\underline{ABC \cdot FGH} = \underline{CA \cdot HF} \cdot \underline{CB \cdot HG} - \underline{CA \cdot HG} \cdot \underline{CB \cdot HF}\,,$

wie auch die sechs Puncte A, B, C, F, G, H im Raume liegen mögen.

Hierin ist aber nach §. 21

$$-2 \cdot \underline{CA} \cdot \underline{HF} = +CH^2 - HA^2 + AF^2 - FC^2\,,$$
$$-2 \cdot \underline{CB} \cdot \underline{HG} = +CH^2 - HB^2 + BG^2 - GC^2\,,$$

folglich

$$4\,\underline{CA \cdot HF} \cdot \underline{CB \cdot HG}$$
$$= CH^2(CH^2 - BH^2 + BG^2 - CG^2) - AH^2(CH^2 - BH^2 + BG^2 - CG^2)$$
$$+ AF^2(CH^2 - BH^2 + BG^2 - CG^2) - CF^2(CH^2 - BH^2 + BG^2 - CG^2)$$

und eben so, wenn man F und G gegenseitig vertauscht,

$$4\,\underline{CA \cdot HG} \cdot \underline{CB \cdot HF}$$
$$= CH^2(CH^2 - BH^2 + BF^2 - CF^2) - AH^2(CH^2 - BH^2 + BF^2 - CF^2)$$
$$+ AG^2(CH^2 - BH^2 + BF^2 - CF^2) - CG^2(CH^2 - BH^2 + BF^2 - CF^2).$$

Hiermit verwandelt sich (N) in

$$16\,\underline{ABC \cdot FGH}$$
$$= AF^2 \cdot BG^2 - AG^2 \cdot BF^2 + AG^2 \cdot BH^2 - AH^2 \cdot BG^2 + AH^2 \cdot BF^2 - AF^2 \cdot BH^2$$
$$+ BF^2 \cdot CG^2 - BG^2 \cdot CF^2 + BG^2 \cdot CH^2 - BH^2 \cdot CG^2 + BH^2 \cdot CF^2 - BF^2 \cdot CH^2$$
$$+ CF^2 \cdot AG^2 - CG^2 \cdot AF^2 + CG^2 \cdot AH^2 - CH^2 \cdot AG^2 + CH^2 \cdot AF^2 - CF^2 \cdot AH^2\,.$$

Es lehrt diese Gleichung, *dass das projective Product zweier Dreiecksflächen eine ganze rationale Function der Quadrate der Abstände der Ecken des einen Dreiecks von den Ecken des anderen ist.*

Um diese Function leicht zu entwickeln, bilde man zuerst das Product*) aus der Summe der drei Seiten des einen Dreiecks ABC in die Summe der drei Seiten des anderen FGH. Dies giebt

$$(AB + BC + CA)(FG + GH + HF)$$
$$= ABFG + ABGH + ABHF$$
$$+ BCFG + BCGH + BCHF$$
$$+ CAFG + CAGH + CAHF\,,$$

*) Die Ausdrücke Summe und Product sind hier weder im arithmetischen noch im geometrischen Sinne zu verstehen. Es soll hier lediglich eine zweckmässige Symbolik zur leichteren Entwickelung des voranstehenden Aggregats von 32 Gliedern abgeleitet werden. R.

und es bleibt nur noch übrig, statt eines jeden dieser neun Glieder die Differenz zweier quadratischer Glieder zu setzen, nämlich $AF^2 \cdot BG^2 - AG^2 \cdot BF^2$ statt $ABFG$, u. s. w.

Zusatz. Die durch $ABFG$ symbolisch ausgedrückte Function besitzt die Eigenschaften, dass

$$ABFG = - BAFG = - ABGF = BAGF ,$$

und dass

$$ABFA = + AF^2 \cdot AB^2 ,$$
$$ABFB = - AB^2 \cdot BF^2 ,$$
$$ABAB = - AB^4 ,$$
$$ABBC = + AB^2 \cdot BC^2 .$$

§. 27. Ist $ABCD$ ein ebenes Viereck und φ die Neigung desselben gegen die Ebene des Dreiecks FGH, so wird

$$16 \cdot \underline{ABCD \cdot FGH}$$
$$= 16 \cdot ABCD \cdot FGH \cos\varphi = 16\,(ABC + ACD)\,FGH \cos\varphi$$
$$= (AB + BC + CA)\,(FG + GH + HF) + (AC + CD + DA)\,(FG + GH + HF)$$
$$= (AB + BC + CD + DA)\,(FG + GH + HF) ,$$

indem die aus der Multiplication von CA und AC in $(FG + GH + HF)$ entspringenden Glieder $CAFG$, $ACFG$ u. s. w. sich gegen einander aufheben (§. 26, Zus.). Die Entwickelung der hieraus folgenden zwölf einzelnen Producte und die Substitution der Differenz zweier quadratischer Glieder für jedes dieser Producte giebt alsdann das Gesuchte.

Eben so findet sich für ein ebenes Fünfeck $ABCDE$ und ein gegen dasselbe um den Winkel φ geneigtes Dreieck FGH

$$16 \cdot \underline{ABCDE\,.\,FGH}$$
$$= 16\,ABCDE \cdot FGH \cos\varphi = 16\,(ABCD + ADE)\,FGH \cos\varphi$$
$$= (AB + BC + CD + DA)\,(FG + GH + HF) + (AD + DE + EA)\,(FG + GH + HF)$$
$$= (AB + BC + CD + DE + EA)\,(FG + GH + HF) ,$$

gleich einer Summe von 15 einzelnen Producten, deren jedes, wie vorhin, in die Differenz zweier quadratischer Glieder zu verwandeln ist.

Analoges gilt von dem projectiven Producte, von dessen zwei Factoren der eine ein ebenes Sechseck oder Siebeneck u. s. w. und der andere ein Dreieck, oder ebenfalls ein mehrseitiges Vieleck ist. So wird z. B., wenn man für das Dreieck FGH das Viereck $FGHI$ setzt:

$$16 \cdot \underline{ABC \ldots \times FGHI}$$
$$= 16 \cdot \underline{ABC \ldots \times (FGH + FHI)}$$
$$= (AB + BC + \ldots)(FG + GH + HF) + (AB + BC + \ldots)(FH + HI + IF)$$
$$= (AB + BC + \ldots)(FG + GH + HI + IF) \; ,$$

weil sich die mit HF und FH multiplicirten Glieder, welche aus den Producten $HF(AB + BC + \ldots)$ und $FH(AB + BC + \ldots)$ entstehen, aufheben.

Noch folgt hieraus, dass *das projective Product irgend zweier ebener Vielecke, eben so wie in* §. 26 *das zweier Dreiecke, eine ganze rationale Function der Quadrate der Abstände der Ecken des einen Vielecks von denen des anderen ist.*

§. 28. Wenn man in der Entwickelung des projectiven Products zweier Dreiecke ABC und FGH die Ecken F, G, H des einen resp. mit den Ecken A, B, C des anderen zusammenfallen lässt, so kommt

$$16\, \underline{ABC \cdot ABC} = 16\, ABC^2$$
$$= ABAB + ABBC + ABCA$$
$$+ BCAB + BCBC + BCCA$$
$$+ CAAB + CABC + CACA \; .$$

Mit Anwendung des Zusatzes zu §. 26 erhalten wir hieraus das Quadrat des Inhalts eines Dreiecks durch die Formel

$$16\, ABC^2$$
$$= -AB^4 - BC^4 - CA^4 + 2\, AB^2 \cdot BC^2 + 2\, BC^2 \cdot CA^2 + 2\, CA^2 \cdot AB^2$$

oder, wenn die Seiten des Dreiecks mit a, b, c bezeichnet werden, durch die Formel

$$16\, ABC^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2\, b^2 c^2 + 2\, c^2 a^2 + 2\, a^2 b^2 \; .$$

Gleicherweise findet sich das Quadrat des Inhalts eines ebenen Vierecks $ABCD$, durch die Quadrate seiner vier Seiten und zwei Diagonalen ausgedrückt, wenn man im projectiven Product der Vierecke $ABCD$ und $FGHI$ die Ecken F, G, H, I des letzteren mit den Ecken A, B, C, D des ersteren coincidiren lässt. Denn man erhält somit

$$16\, ABCD^2 = (AB + BC + CD + DA)(AB + BC + CD + DA)$$
$$= ABAB + BCBC + CDCD + DADA$$
$$+ 2\, ABBC + 2\, BCCD + 2\, CDDA + 2\, DAAB + 2\, ABCD + 2\, BCDA$$
$$= -AB^4 - BC^4 - CD^4 - DA^4$$
$$+ 2\,(AB^2 \cdot BC^2 + BC^2 \cdot CD^2 + CD^2 \cdot DA^2 + DA^2 \cdot AB^2)$$
$$+ 2\,(2\, AC^2 \cdot BD^2 - AD^2 \cdot BC^2 - AB^2 \cdot CD^2) \; ,$$

oder kürzer, wenn man die vier Seiten

$$AB = a\ ,\quad BC = b\ ,\quad CD = c\ ,\quad DA = d\ ,$$

und die zwei Diagonalen

$$AC = f\ ,\quad BD = g$$

setzt:

$$16 \cdot ABCD^2$$
$$= -a^4 - b^4 - c^4 - d^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2 - a^2c^2 - b^2d^2) + 4f^2g^2\ .$$

Ueberhaupt besteht bei einem n-Eck $ABC\ldots MN$ der durch die Quadrate seiner Seiten und Diagonalen ausgedrückte Werth von $16 \cdot (ABC\ldots MN)^2$

1) aus den n Gliedern

$$-AB^4 - BC^4 - \ldots . - MN^4 - NA^4\ ;$$

2) aus den n Gliedern

$$+2AB^2 \cdot BC^2 + 2BC^2 \cdot CD^2 + \ldots + 2MN^2 \cdot NA^2 + 2NA^2 \cdot AB^2$$

gebildet aus je zwei auf einander folgenden Seiten;

3) aus $n(n-3)$ Gliedern, von denen die eine Hälfte positiv, die andere negativ ist. Sie entspringen aus den Gliedern des Products $(AB + BC + \ldots)(AB + BC + \ldots)$, welche von zwei nicht an einander grenzenden Seiten gebildet werden. Denn da zu jeder Seite $(n-3)$ andere gehören, welche nicht an sie grenzen, so ist die Anzahl dieser letzteren Glieder $n(n-3)$, oder vielmehr $\frac{1}{2}n(n-3)$ von der Form $2 \cdot ABFG$, weil je zwei der $n(n-3)$ Glieder, wie $ABFG$ und $FGAB$, einander gleich sind. Aus der symbolischen Form $2 \cdot ABFG$ entstehen aber die zwei wirklichen Glieder $+2AF^2 \cdot BG^2$ und $-2AG^2 \cdot BF^2$, folglich u. s. w.

VIII. Von der Multiplication körperlicher Räume.

§. 29. Die zwei mit einander zu multiplicirenden Räume seien die Tetraeder $ABCD$ und $FGHI$, deren Product wir ähnlicherweise, wie vorhin das projective Product der Dreiecke ABC und FGH durch die Quadrate der Abstände der Ecken des einen Tetraeders von den Ecken des anderen auszudrücken suchen wollen.

Man construire zu dem Ende (Fig. 8) um DC als Diagonale ein Parallelepipedum, dessen von D ausgehende Kanten

$$DF_1\ ,\quad DG_1\ ,\quad DH_1$$

auf den Ebenen

$$IGH\ ,\quad IHF\ ,\quad IFG$$

perpendikulär sind, und wo daher auch umgekehrt

$$IF\ ,\quad IG\ ,\quad IH$$

auf

$$DG_1H_1\ ,\quad DH_1F_1\ ,\quad DF_1G_1$$

rechtwinklig stehen werden. Man mache

$$DF' \equiv IF \quad \text{und} \quad DG' \equiv IG\ ,$$

so ist

$$DF'G' \equiv IFG$$

und demnach DH_1, senkrecht zu IFG, auch senkrecht auf $DF'G'$;

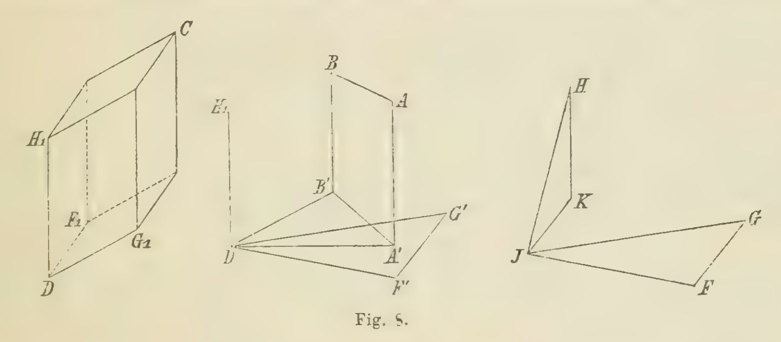


Fig. 8.

und wenn man von A und B auf $DF'G'$ die Perpendikel AA' und BB' fällt, so sind diese parallel mit DH_1. Es ist also

$$3 \cdot DABH_1 = 3 \cdot DA'B'H_1 = DA'B' \cdot DH_1\ ,$$

folglich

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} 3 \cdot DABH_1 \cdot IFG &= DA'B' \cdot DH_1 \cdot DF'G' \\ &= \underline{DAB \cdot DF'G'} \cdot DH_1 = \underline{DAB \cdot IFG} \cdot DH_1\ . \end{aligned}$$

Werde noch von H auf IFG das Perpendikel HK gefällt, so ist dieses parallel mit DH_1, also IK senkrecht auf KH und DH_1, folglich

$$\underline{IH \cdot DH_1} = \underline{(IK + KH)\,DH_1} = \underline{KH \cdot DH_1} = KH \cdot DH_1\ .$$

Ueberdies steht IH senkrecht auf DF_1G_1, und wegen des um DC als Diagonale construirten Parallelepipedums $DF_1G_1H_1 \ldots C$ ist die Flächendiagonale CH_1 parallel zur Ebene von DF_1G_1, folglich senkrecht auf IH, und daher

$$\underline{IH \cdot DH_1} = \underline{IH(DC + CH_1)} = \underline{IH \cdot DC}\ ,$$

also unter Benutzung der vorhergehenden Gleichung:

$$KH \cdot DH_1 = \underline{IH \cdot DC}\ ,$$

folglich

$$(\beta)\quad 3 \,.\, IFGH \cdot DH_1 = IFG \cdot KH \cdot DH_1 = IFG \cdot \underline{IH \cdot DC} \,.$$

Die Verbindung von (α) und (β) giebt aber

$$(\gamma)\quad 9 \,.\, DABH_1 \cdot IFGH = \underline{DAB \cdot IFG} \cdot \underline{DC \cdot IH} \,,$$

worin durch die sechs von einander unabhängigen Punkte D, C, I, F, G, H der Punkt H_1 also bestimmt wird, dass DH_1 mit IFG und CH_1 mit IH rechte Winkel bilden. Da nun gleicherweise DF_1 auf IGH und CF_1 auf IF, ferner eben so DG_1 auf IHF und CG_1 auf IG senkrecht stehen, so muss die erhaltene Formel (γ) auch noch bestehen, wenn man H_1, F, G, H das eine Mal in F_1, G, H, F, das andere Mal in G_1, H, F, G verwandelt, und man hat daher

$$(\delta)\quad 9 \,.\, DABF_1 \cdot IGHF = \underline{DAB \cdot IGH} \cdot \underline{DC \cdot IF} \,,$$

$$(\varepsilon)\quad 9 \,.\, DABG_1 \cdot IHFG = \underline{DAB \cdot IHF} \cdot \underline{DC \cdot IG} \,.$$

Weil nun das Parallelepipedum mit den drei von D ausgehenden Kanten DF_1, DG_1, DH_1 die Diagonale DC hat, so ist

$$DF_1 + DG_1 + DH_1 = DC \,,$$

$$\overline{DA \cdot DB \cdot DF_1} + \overline{DA \cdot DB \cdot DG_1} + \overline{DA \cdot DB \cdot DH_1} = \overline{DA \cdot DB \cdot DC},$$

also nach §. 14, Zus.

$$DABF_1 + DABG_1 + DABH_1 = DABC \,.$$

Ferner ist (§. 14)

$$IFGH = IGHF = IHFG \,.$$

Es kommt daher durch Addition von (γ), (δ), (ε):

$$(\zeta)\quad 9 \,.\, DABC \cdot IFGH = 9 \,.\, ABCD \cdot FGHI = 9 \,.\, \Pi$$

$$= \underline{DAB \cdot IGH} \cdot \underline{DC \cdot IF} + \underline{DAB \cdot IHF} \cdot \underline{DC \cdot IG} + \underline{DAB \cdot IFG} \cdot \underline{DC \cdot IH},$$

eine Gleichung, worin nur noch die Punkte A, B, C, D, F, G, H, I enthalten sind.

Nach §. 26 ist aber

$$16 \,.\, \underline{DAB \cdot IGH} = (DA + AB + BD)(IG + GH + HI)$$

$$= DAIG + DAGH + \ldots$$

$$= DI^2 \cdot AG^2 - DG^2 \cdot AI^2 + DG^2 \cdot AH^2 - DH^2 \cdot AG^2 + \ldots \,,$$

und nach §. 21, 4:

$$2 \,.\, \underline{DC \,.\, IF} = DF^2 + CI^2 - DI^2 - CF^2 \,,$$

u. s. w., folglich

$$288 \,.\, \Pi$$
$$=(DI^2\cdot AG^2 - DG^2\cdot AI^2 + DG^2\cdot AH^2 - DH^2\cdot AG^2 + \cdots)(DF^2 + CI^2 - DI^2 - CF^2)$$
$$+(DI^2\cdot AH^2 - DH^2\cdot AI^2 + DH^2\cdot AF^2 - DF^2\cdot AH^2 + \cdots)(DG^2 + CI^2 - DI^2 - CG^2)$$
$$+(DI^2\cdot AF^2 - DF^2\cdot AI^2 + DF^2\cdot AG^2 - DG^2\cdot AF^2 + \cdots)(DH^2 + CI^2 - DI^2 - CH^2).$$

Man ersieht hieraus, *dass das Product Π zweier Tetraeder in der That als eine ganze rationale Function der Quadrate der Abstände der Ecken des einen Tetraeders von denen des anderen darstellbar ist, indem $288 \,.\, \Pi$ aus Gliedern besteht, deren jedes ein Product aus dreien dieser Quadrate ist.*

§. 30. Wir wollen von diesen Gliedern zunächst nur diejenigen entwickeln, in denen die Ecken A, B, C des einen Tetraeders mit den Ecken F, G, H des anderen verbunden sind, die Ecken D und I aber nicht vorkommen, und wollen dieses Aggregat von Gliedern mit $ABCFGH$ bezeichnen. Mit Weglassung der Glieder, welche D und I enthalten, reducirt sich aber

$16 \,.\, \underline{DAB \cdot IGH}$ auf $ABGH = AG^2 \cdot BH^2 - AH^2 \cdot BG^2$,

$2 \,.\, \underline{DC \cdot IF}$ auf $-CF^2$,

$16 \,.\, \underline{DAB \cdot IHF}$ auf $ABHF = AH^2 \cdot BF^2 - AF^2 \cdot BH^2$,

$2 \,.\, \underline{DC \cdot IG}$ auf $-CG^2$,

$16 \,.\, \underline{DAB \cdot IFG}$ auf $ABFG = AF^2 \cdot BG^2 - AG^2 \cdot BF^2$.

$2 \,.\, \underline{DC \cdot IH}$ auf $-CH^2$.

Hiermit wird

$$\begin{aligned} ABCFGH = {} & (AH^2 \cdot BG^2 - AG^2 \cdot BH^2) \cdot CF^2 \\ (r) \qquad & + (AF^2 \cdot BH^2 - AH^2 \cdot BF^2) \cdot CG^2 \\ & + (AG^2 \cdot BF^2 - AF^2 \cdot BG^2) \cdot CH^2 . \end{aligned}$$

Es ist demnach

$$288 \,.\, ABCD \cdot FGHI = ABCFGH + \ldots,$$

worin unter $+\ldots$ das Aggregat aller übrigen Verbindungen eines Dreiecks des Tetraeders $ABCD$ mit einem Dreieck des anderen $FGHI$ zu verstehen ist. Man kann daher schreiben, indem man die einzelnen Verbindungen durch verticale Striche sondert, und wenn man die drei Ecken jedes Dreiecks in solcher Folge schreibt

dass für jedes der beiden Tetraeder die dadurch ausgedrückten Sinne seiner vier Dreiecke übereinstimmen, und man somit jedes der Dreiecke

$$ABC,\ BDC,\ CDA,\ DBA$$

mit jedem der Dreiecke

$$FGH,\ GIH,\ HIF,\ IGF$$

verbindet:

$$288\,.\,ABCD \cdot FGHI$$
$$= ABCFGH + ABCGIH + ABCHIF + ABCIGF + BDCFGH + BDCGIH + \ldots$$

Um die Vorzeichen dieser Verbindungen zu bestimmen, erwäge man, dass auf gleiche Weise

$$288\,.\,ABCD \cdot GIHF = ABCGIH + \ldots,$$

und

$$288\,.\,BDCA \cdot FGHI = BDCFGH + \ldots$$

sein muss. Es ist aber das Tetraeder

$$GIHF = -FGIH = +FGHI,$$

und das Tetraeder

$$BDCA = -ABDC = +ABCD.$$

In der Gleichung, welche den Werth von $288\,.\,ABCD \cdot FGHI$ durch Dreiecksverbindungen darstellen soll, hat man daher die Glieder $ABCGIH$ und $BDCFGH$ mit demselben Zeichen, wie das Glied $ABCFGH$ zu nehmen: und, wie man leicht ersieht, gilt dasselbe von den übrigen Gliedern jener Gleichung, die man daher, ähnlicherweise wie das projective Product zweier Dreiecke, folgendergestalt symbolisch ausdrücken kann:

$$(\vartheta) \qquad 288 \cdot ABCD \cdot FGHI$$
$$= (ABC + BDC + CDA + DBA)(FGH + GIH + HIF + IGF).$$

Es bleibt alsdann noch übrig, die rechte Seite dieser Gleichung durch gewöhnliche Multiplication in ihre 16 Glieder $ABCFGH$, $ABCGIH$, ..., $DBAIGF$ zu entwickeln, für das erste derselben seinen durch (η) geradezu bestimmten Werth, und für jedes der übrigen seinen aus (η) durch gehörige Vertauschung der Buchstaben entspringenden Werth zu setzen.

Zusatz. Die Function $ABCFGH$ hat folgende Eigenschaften. Durch Vertauschung der zwei Ternionen ABC und FGH, ohne die cyklische Folge weder der einen noch der anderen zu ändern,

bleibt sie auch ihrem Zeichen nach ungeändert. Dagegen ändert sie ihr Zeichen, wenn auch nicht ihre Grösse, sobald man die cyklische Folge entweder der einen oder der anderen Ternion in die entgegengesetzte verwandelt.

§. 31. Lässt man die Ecken des Tetraeders $FGHI$ resp. mit den Ecken des Tetraeders $ABCD$ coincidiren, so ergiebt die Entwickelung der Formel (ϑ) den Werth des Quadrats des Tetraeders $ABCD$, ausgedrückt durch die Kanten desselben. Es wird nämlich

$$288 \cdot ABCD^2$$

$$= (ABC + BDC + CDA + DBA)(ABC + BDC + CDA + DBA)$$

$$= ABCABC + BDCBDC + CDACDA + DBADBA$$

$$+ 2\, ABCBDC + 2\, ABCCDA + 2\, ABCDBA$$

$$+ 2\, BDCCDA + 2\, BDCDBA + 2\, CDADBA\,.$$

Man setze die Kanten des Tetraeders

$$DA = a\,,\quad DB = b\,,\quad DC = c\,,$$

$$BC = a'\,,\quad CA = b'\,,\quad AB = c'\,,$$

so kommt bei der Entwickelung der Functionen $ABCABC, \ldots$ nach (η)

$$ABCABC = -\,2\, AB^2 \cdot BC^2 \cdot CA^2 = -\,2\, a'^2 b'^2 c'^2\,,$$

$$BDCBDC = -\,2\, BC^2 \cdot DB^2 \cdot DC^2 = -\,2\, a'^2 b^2 c^2\,,$$

$$CDACDA = -\,2\, DA^2 \cdot CA^2 \cdot DC^2 = -\,2\, a^2 b'^2 c^2\,,$$

$$DABDAB = -\,2\, DA^2 \cdot DB^2 \cdot AB^2 = -\,2\, a^2 b^2 c'^2\,,$$

$$2\, ABCBDC = 2\, BC^2 (DB^2 \cdot CA^2 + AB^2 \cdot DC^2 - DA^2 \cdot BC^2)$$
$$= 2\, a'^2 (b^2 b'^2 + c^2 c'^2 - a^2 a'^2)\,,$$

$$2\, ABCCDA = 2\, CA^2 (AB^2 \cdot DC^2 + DA^2 \cdot BC^2 - DB^2 \cdot CA^2)$$
$$= 2\, b'^2 (c^2 c'^2 + a^2 a'^2 - b^2 b'^2)\,,$$

$$2\, ABCDBA = 2\, BA^2 (DA^2 \cdot BC^2 + DB^2 \cdot CA^2 - DC^2 \cdot AB^2)$$
$$= 2\, c'^2 (a^2 a'^2 + b^2 b'^2 - c^2 c'^2)\,,$$

$$2\, BDCCDA = 2\, DC^2 (DA^2 \cdot BC^2 + DB^2 \cdot CA^2 - DC^2 \cdot AB^2)$$
$$= 2\, c^2 (a^2 a'^2 + b^2 b'^2 - c^2 c'^2)\,,$$

$$2\, BDCDBA = 2\, DB^2 (DC^2 \cdot AB^2 + DA^2 \cdot BC^2 - DB^2 \cdot CA^2)$$
$$= 2\, b^2 (c^2 c'^2 + a^2 a'^2 - b^2 b'^2)\,,$$

$$2\, CDADBA = 2\, DA^2 (DB^2 \cdot CA^2 + DC^2 \cdot AB^2 - DA^2 \cdot BC^2)$$
$$= 2\, a^2 (b^2 b'^2 + c^2 c'^2 - a^2 a'^2)\,.$$

Durch Addition dieser Gleichungen ergiebt sich

$$\begin{aligned} & 144 \cdot ABCD^2 \\ = & - a'^2 b'^2 c'^2 - a'^2 b^2 c^2 - a^2 b'^2 c^2 - a^2 b^2 c'^2 \\ & + (a^2 + a'^2)(b^2 b'^2 + c^2 c'^2 - a^2 a'^2) \\ & + (b^2 + b'^2)(c^2 c'^2 + a^2 a'^2 - b^2 b'^2) \\ & + (c^2 + c'^2)(a^2 a'^2 + b^2 b'^2 - c^2 c'^2) \; . \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} & 144 \cdot ABCD^2 \\ = & a^2 a'^2 (b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2 - a^2 - a'^2) \\ & + b^2 b'^2 (c^2 + c'^2 + a^2 + a'^2 - b^2 - b'^2) \\ & + c^2 c'^2 (a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 - c^2 - c'^2) \\ & - a'^2 b'^2 c'^2 - a'^2 b^2 c^2 - a^2 b'^2 c^2 - a^2 b^2 c'^2 \; , \end{aligned}$$

eine Gleichung, mit welcher die von Carnot in seiner *Geometrie der Stellung* Bd. II. S. 263 gegebene, wie gehörig, übereinstimmt.

§. 32. Auf Grund der Entwickelungen der §§. 29 und 30, welche das Product zweier Tetraeder zu bestimmen lehren, lässt sich nun leicht die Multiplication eines Tetraeders $ABCD$ in ein trigonales Polyeder ausführen. Sei GH eine Kante des Polyeders und FGH, HGI die in GH an einander stossenden Flächen desselben. Von einem beliebigen Punkte N ziehe man nach allen Ecken des Polyeders Linien, so ist das gesuchte Product

$$ABCD \cdot (\ldots + NFGH + NHGI + \ldots) \; ,$$

also, wenn $ABCD = T$, das Polyeder $= P$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} & 288 \cdot T \cdot P = \\ & \ldots + 288 \cdot ABCD \cdot NFGH + 288 \cdot ABCD \cdot NHGI + \ldots \end{aligned}$$

$$= (ABC + BDC + CDA + DBA) \cdot \left| \begin{matrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + FGH + NHG + NFH + NGF \\ + HGI + NIG + NHI + NGH \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix} \right\} .$$

Im zweiten Factor dieses Products kann man aber alle Dreiecke weglassen, welche N zu der einen Ecke haben. Denn es ist z. B.

$$ABC(NHG + NGH) = ABCNHG + ABCNGH = 0 \; ,$$

weil von diesen zwei Functionen $AB \ldots G$ und $AB \ldots H$ die zweite aus der ersten entsteht, wenn man die cyklische Folge der Ternion NHG der ersten Function in die entgegengesetzte NGH verwandelt (§. 30, Zus.). Eben so ist auch

$$BDC(NHG + NGH) = 0$$

u. s. w. Auf gleiche Art wird ferner das Glied NFH des zweiten Factors des Products wegfallen, weil, wenn an die Kante FH des Polyeders nächst dem Dreiecke FGH noch das Dreieck FHK grenzt, wegen dieses letzteren im Ausdruck des Inhalts des Polyeders noch das Tetraeder $NFHK$, und dieses Tetraeders wegen im zweiten Factor des besagten Products noch das Glied NHF vorkommen muss, u. s. w.

Hiermit aber reducirt sich der Werth des Products auf

$$288 \cdot T \cdot P =$$
$$(ABC + BDC + CDA + DBA)(\ldots + FGH + HGI + FHK + \ldots),$$

welches nach §. 30 weiter entwickelt werden kann.

Analogerweise kann man endlich auch das Product zweier Trigonalpolyeder P und Q überhaupt ausdrücken. Es ist nämlich

$$288 \cdot P \cdot Q = \Sigma\, MABC \cdot \Sigma\, NFGH\ ,$$

worin für ABC nach und nach alle Grenzdreiecke von P, für FGH nach und nach alle Grenzdreiecke von Q zu nehmen sind, M und N aber zwei beliebige Punkte vorstellen, auf welche die Ecken resp. von P und von Q bezogen werden. Es ist daher, wenn P von den Dreiecken ..., ABC, CBD, ACE, ... und Q von den Dreiecken ..., FGH, HGI, FHK, ... begrenzt wird:

$$288 \cdot P \cdot Q$$
$$= (\cdots + ABC + CBD + ACE + \cdots)(\cdots + FGH + HGI + FHK + \cdots).$$

Ist Q mit P identisch, so erhält man hieraus

$$288 \cdot P^2 = (\cdots + ABC + CBD + ACE + \cdots)^2$$
$$= \cdots + ABCABC + CBDCBD + \cdots + 2\,ABCCBD + 2\,ABCACE + \cdots,$$

also bei der Entwickelung dieser Functionen nach §. 30 das Quadrat des Inhalts eines Trigonalpolyeders, ausgedrückt durch die Kanten desselben.



III. Ueber die Entstehungszeit und den Zusammenhang der wichtigsten Schriften und Abhandlungen von Möbius

[von Dr. Curt Reinhardt].



Die Manuscripte, aus denen Möbius' wissenschaftlicher Nachlass besteht, befanden sich bis vor wenigen Jahren im Besitz seiner Söhne, der Herren Prof. Dr. Theodor Möbius in Kiel und Oberschulrath Dr. Paul Möbius in Gotha, welche dieselben mit dankenswerther Bereitwilligkeit für die Herausgabe der gesammelten Werke ihres Vaters zur Verfügung gestellt haben. Geordnet und katalogisirt werden die Manuscripte im Archiv der Universitätssternwarte zu Leipzig dauernde Verwahrung finden und in Verbindung mit dieser Ausgabe von Möbius' gesammelten Werken eine wichtige Quelle für den Geschichtsschreiber der Mathematik des 19. Jahrhunderts bilden.

Bei der Sichtung der Manuscripte wurde in erster Linie der Zweck verfolgt, eine solche Ordnung derselben herzustellen, dass es möglich werde, von der gesammten wissenschaftlichen Thätigkeit Möbius' ein klares Bild zu gewinnen. Der im Allgemeinen wohl erhaltene Zustand des handschriftlichen Nachlasses wie auch seine Vollständigkeit liessen diesen Zweck als erreichbar erscheinen. Ist Möbius selbst schon, seinem ganzen Wesen entsprechend, darauf bedacht gewesen, seine Concepte sorgfältig aufzubewahren, so haben auch nach seinem Tode seine Söhne in pietätvoller Erinnerung an das der Wissenschaft geweihte Schaffen des Vaters dafür gesorgt, dass kein Blatt, welches die Schriftzüge des Vaters trägt, der Vernichtung anheimfiel.

Die ältesten der vorhandenen Manuscripte stammen aus Möbius' Schülerzeit in Pforta (1803—1809). Sie haben für uns nur insoweit Interesse, als aus ihnen hervorgeht, wie er der Mathematik schon in dieser Periode seines Studiums seine Neigung zuwendete. Scripta, Elegieen, Commentationes, wie sie der Unterricht auf einer Fürstenschule zeitigte, wechseln in diesen Diarien ab mit mathematischen Aufgaben, namentlich aus der analytischen Theorie der Kegelschnitte, wobei ihm Wolf's Anfangsgründe der Mathematik zum Führer dienten.

In welcher Weise und in welchem Umfange Möbius in Leipzig bei Moritz v. Prasse und Mollweide seine Studien betrieben, lässt sich aus dem Nachlass nicht ermitteln. Als er im Mai des Jahres 1813 nach Beendigung seiner Studien in Leipzig nach Naumburg zur Mutter zurückkehrte, wurden seine Koffer von plündernden französischen Soldaten erbrochen und ihres Inhalts beraubt. Wie in einigen im Nachlass aufgefundenen Concepten von Briefen an Mollweide und Prasse zu lesen ist, gingen dabei seine sämmtlichen Bücher und Manuscripte verloren.

Der eigentliche wissenschaftliche Nachlass enthält Möbius' handschriftliche Aufzeichnungen vom Jahre 1813 an, als er sich behufs Vollendung seiner Studien zu Gauss nach Göttingen begab. Diese Manuscripte sind in 7 Abtheilungen von verschiedenem Umfang eingeordnet worden, welche enthalten:

A. 11 wissenschaftliche Tagebücher aus den Jahren 1818—1865, bezeichnet mit D_1, D_2, ... D_{11} *),
B. die Entwürfe und Concepte derjenigen Publicationen Möbius', welche in den gesammelten Werken Aufnahme gefunden haben,
C. die Hefte zu den Vorlesungen aus den Gebieten der Mathematik, Astronomie und Mechanik,
D. handschriftliche Aufzeichnungen über astronomische Beobachtungen und Kalendermanuscripte,
E. Commentare zu wichtigeren Werken der mathematischen Litteratur,
F. Amtliches und Biographisches,
G. eine Sammlung von Briefen von und an Möbius,
H. Verschiedenes.

Die Mehrzahl der in Abtheilung G vorhandenen an Möbius gerichteten Briefe war schon vor längerer Zeit der Universitätssternwarte zur Aufbewahrung übergeben worden. Die Erwägung, dass der Werth dieser Briefe sich wesentlich erhöhen müsse, wenn damit auch Möbius' eigenhändige Antwortschreiben vereinigt würden, bestimmte mich diese letzteren in Originalen oder in Abschriften, soweit es noch möglich war, zur Stelle zu schaffen. Es ist dies in der That in vielen Fällen gelungen**). Vereinzelt ist es auch vorgekommen.

*) Diese mit D bezeichneten Bändchen wurden schon in den Vorbemerkungen zu den Mittheilungen aus dem Nachlass im 2. Bande der Werke erwähnt.

**) Für die bereitwillige Ueberlassung der Briefe Möbius' an Ernst Apelt, Baltzer, Gauss, Gerling, Grassmann, W. Weber drängt es mich, den Herren Prof. Apelt in Weimar, Prof. Baltzer, Prof. Schering, Prof. E. Hess, Dr. H. Grassmann in Halle, Prof. W. Weber auch hier meinen ganz besonderen

dass aus den Manuscripten Concepte von Möbius'schen Briefen ausgesondert und in die Briefsammlung eingereiht werden konnten.

Was sich, abgesehen von den Briefen, nicht in den Abtheilungen A bis F unterbringen liess — Möbius pflegte am Arbeitstische ausser der Schiefertafel jedes ihm gerade zur Hand liegende leere Blatt, Quittungen, Formulare, Briefumschläge u. s. w. für seine Rechnungen und Textentwürfe zu benutzen, deren Zugehörigkeit zu einem bestimmten Manuscript sich nicht immer ermitteln liess —, ist in Abtheilung H gesammelt worden.

Bei der Durchforschung des handschriftlichen Nachlasses eines jeden für die Entwickelung der Wissenschaft bedeutenden Autors erregt zunächst die Frage das meiste Interesse, ob es gelingen werde, unter seinen Papieren noch nicht veröffentlichte Manuscripte aufzufinden. Die in Möbius' Nachlass gemachten Funde sind im II. und IV. Bande der Werke bekannt gegeben worden. Obwohl die Formvollendung, in der Möbius seine Abhandlungen in die Oeffentlichkeit hinausgehen zu lassen pflegte, bei jenen Mittheilungen aus dem Nachlass noch lange nicht erreicht war, schien doch ihr Abdruck in den gesammelten Werken geboten, weil sie geeignet sind, das Bild der wissenschaftlichen Thätigkeit Möbius' wesentlich zu vervollständigen und er selbst ihre Veröffentlichung, wie bei mehreren nachgewiesen werden kann, vorbereitet hatte. Ausser diesen fanden sich keine Manuscripte, deren Form und Inhalt eine Publication gerechtfertigt hätte.

Nachdem die Bedeutung von Möbius' Leistungen für die Entwickelung der Mathematik im 19. Jahrhundert schon von berufener Seite im ersten Bande gekennzeichnet worden ist, kann die Aufgabe dieses Berichtes nur die sein, sich mit historischen Fragen über die Zeit der Entstehung und den Zusammenhang der in den gesammelten Werken vereinigten Schriften und Abhandlungen zu beschäftigen, wobei allerdings die den einzelnen Mittheilungen aus dem Nachlass beigegebenen Vorbemerkungen einen Theil des hierher gehörigen Materials schon vorweg genommen haben. Einige für die Geschichte der Mathematik wichtige Punkte sollen im Folgenden besonders eingehend besprochen werden.

Im Jahre 1813 ging Möbius nach Beendigung seiner Studien in Leipzig nach Göttingen, mit der Absicht, wie er an Mollweide schreibt, sich bei Gauss in der theoretischen Astronomie zu vervoll-

Dank auszusprechen. — Leider sind die Briefe an den Freiherrn v. Lindenau, Möbius' Freund und Gönner, dem er oft und ausführlich über seine Arbeiten Bericht erstattete, nicht zu erlangen gewesen.

kommnen. Davon handeln denn auch in der Hauptsache die beiden umfangreichen Manuscripte, welche mit Sicherheit als aus der Göttinger Zeit herrührend erkannt werden können. Es sind dies ein mit »Quodlibet Mathematicum, Gottingae 1813« überschriebenes Tagebuch und ein Heft, welches Möbius im Wintersemester 1813/14 nach Gauss' Vorlesungen über praktische Astronomie geführt hat und das im Wesentlichen die Theorie der Interpolation enthält. Im Auftrage von Gauss beschäftigte er sich ferner mit ausgedehnten Rechnungen über die Pallas und Juno, deren Resultate im 28. Band von Zach's *Monatlicher Correspondenz* Aufnahme fanden. Mehr jedoch als alles Andere förderten Möbius' mathematische Bildung, wie er in dem Gratulationsschreiben zu Gauss' fünfzigjährigem Doctorjubiläum selbst angiebt, die mündlichen Belehrungen, die ihm von seinem hochverehrten Lehrer zu Theil wurden. Dieser ist es auch, der ihm zu mehreren seiner schriftstellerischen Erstlingsleistungen das Thema gegeben. Das mathemathische Specimen, welches Möbius als Empfänger des Kregel'schen Stipendiums zu liefern hatte, und das den Titel führt »*De computandis occultationibus fixarum per planetas*«, (W. Bd. IV. pag. 343—379) ist zwar erst im Jahre 1814 in Halle, allein auf eine directe persönliche Anregung von Gauss hin entstanden. Die erste deutsch geschriebene Bearbeitung dieses Gegenstandes sandte Möbius am 29. December 1814 an Gauss mit dem Wunsche, noch vor der letzten Handanlegung von ihm nach seinem Versprechen einige Mittheilungen und Belehrungen über seine Arbeit zu erhalten. Gauss erfüllte diese Bitte, und mit Benutzung seiner Bemerkungen über Bedeckungsrechnungen erschien jene Abhandlung in der ersten Hälfte des Septembers des Jahres 1815 in der Form, wie sie im 4. Bande der gesammelten Werke wieder abgedruckt worden ist.

Eben dieselbe wurde Möbius auch die Veranlassung zu seiner Habilitationsschrift, die er bereits im Frühjahr 1815 veröffentlichte. Die biquadratische, in trigonometrische Form gekleidete Gleichung, auf welcher die Lösung des Problems der Sternbedeckungen durch Planeten beruht (Werke Band IV, »*De computandis occultationibus* etc.« §. 10), gab ihm Veranlassung zu allgemeinen Untersuchungen über trigonometrische Gleichungen, als deren Frucht die Abhandlung »*De peculiaribus quibusdam aequationum trigonometricarum affectionibus disquisitio analytica*« (W. Bd. IV, pag. 387—415) anzusehen ist. Die Abfassung derselben fällt also gleichfalls in das Jahr 1814, als Möbius in Halle am Pädagogium die Stellung eines Lehrers der Mathematik und Physik bekleidete.

Noch älteren Ursprungs, als diese beiden eben besprochenen Schriften, ist die Abhandlung »*De minima variatione azimuthi stel-*

larum circulos parallelos uniformiter describentium commentatio« (W. Bd. IV, pag. 417—434), mit welcher Möbius am 1. Mai 1816 die ausserordentliche Professur der Astronomie in Leipzig antrat. Bereits auf den ersten Blättern des oben erwähnten aus dem Jahre 1813 stammenden Göttinger Tagebuchs »Quodlibet Mathematicum« finden sich Untersuchungen »über die schnellste und langsamste Aenderung des Azimuths«; und es geht aus diesem Manuscript unzweifelhaft hervor, dass eine Anregung von Gauss ihn zur Abfassung jener Abhandlung veranlasst hat.

Das genannte Tagebuch enthält ferner im Anschluss an eine Notiz über die independente Umkehrung der Reihen von Gauss schon klar ausgesprochen das Problem, dessen Lösung Möbius in dem Aufsatz »*Ueber eine besondere Art der Umkehrung der Reihen*« im 9. Bande von Crelle's Journal (Werke Bd. IV, pag. 589—612) erst im Jahre 1831 gegeben hat.

So wurzelt Möbius' wissenschaftliche Thätigkeit zunächst allseitig in den Anregungen, die von Gauss ihm zu Theil wurden. Dieser ist es auch gewesen, der in Möbius die höhere mathematische Begabung erkannt hatte, und seinem Schüler den Eintritt in die academische Laufbahn erwirkte, in der allein seine schöpferische Kraft sich frei entwickeln konnte. Gleich bei der Meldung von Prasse's Tode forderte Gauss seinen jugendlichen Freund auf, sich um die erledigte Professur der Mathematik in Leipzig zu bewerben. Allein hierbei war Mollweide ihm schon zuvorgekommen, und so vermochte er auf Gauss' Empfehlungen gestützt nur die ausserordentliche Professur der Astronomie und die Observatorstelle in Leipzig zu erringen. Den von Gauss ausgehenden Empfehlungen hatte Möbius späterhin noch mehrfache Aufbesserungen seiner Stellung zu verdanken. Auch seine Ernennung zum correspondirenden Mitglied der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften ist auf Gauss' Antrag ausgesprochen worden. Möbius hat seinerseits nie aufgehört, seinen allverehrten Lehrer, den er in einem Briefe an Gerling mit dem schönen Beinamen *ὁ πάνυ* ehrt, für seinen Unterricht sowohl wie für das ihm auch später stets bewiesene Wohlwollen herzlich dankbar zu sein und hat nie verfehlt ihm, dessen Schüler er sich oft und gern zu nennen pflegte, als sichtbare Zeichen seiner Dankbarkeit regelmässig die Früchte seines Geistes mit dem Ausdruck tiefempfundener Hochachtung und Verehrung zu übersenden. Die in dem Nachlass in Abschrift vorhandenen Briefe an Gauss geben ein wohlthuendes Zeugniss von der Liebe des grossen Schülers zu dem noch grösseren Meister.

Und doch kann man Möbius nicht im eigentlichen Sinne als Schüler von Gauss bezeichnen. Wohl zehrte Möbius, wie gezeigt worden ist, in den ersten Jahren seiner Selbständigkeit noch von

seinen Göttinger Studien, allein seine Originalität liess es nicht dazu kommen, dass in ihm Gaussische Ideen sich in dem Maasse weiter entwickelten, dass sie für die Richtung seiner Forschungen bestimmend geworden wären. Möbius wendete sich vielmehr bei Beginn seines selbständigen Schaffens sofort der Geometrie zu.

Es ist bemerkenswerth, dass der Gegenstand, welchen er bei seinen ersten rein geometrischen Forschungen im Auge hatte, nicht weit verschieden ist von dem, welchen seine letzten Publicationen über die Bestimmung des Inhalts von Polygonen und Polyedern behandeln. Während des Jahres 1816 sehen wir Möbius mit der Lösung des Problems beschäftigt, aus den Seiten eines einem Kreise eingeschriebenen oder umgeschriebenen Polygons den Radius des Kreises und die Fläche des Vielecks zu berechnen. Hierbei zieht er von Anfang an auch die Vielecke mit in die Betrachtung herein, deren Perimeter sich selbst durchschneiden, und wir finden schon in Manuscripten aus dem Jahre 1816 die allgemeine Definition des Inhalts eines solchen aussergewöhnlichen Polygons vollkommen eben so ausgesprochen, wie Möbius sie zum ersten Male in seinem barycentrischen Calcul §. 165 Anm. aufstellte. Die wesentlichen Resultate des im Jahre 1828 im 3. Bande von Crelle's Journal veröffentlichten Aufsatzes über »*Vielecke im Kreise*« (W. Bd. I, pag. 405—428) hatte Möbius schon im Jahre 1816 gefunden und die im 2. Bande des genannten Journals gestellte Aufgabe war somit für ihn nicht, wie man aus einer Bemerkung Crelle's (W. Bd. I, pag. 407) schliessen muss, die erste Veranlassung, sondern nur der äussere Anstoss, seine aus früheren Jahren stammenden Untersuchungen zum Zweck der Veröffentlichung zu bearbeiten.

Obgleich Möbius bereits im Frühling 1816 zum Observator ernannt worden war, sah er sich doch ausser Stande, sofort als praktischer Astronom zu wirken. Erst 1821 war der nothwendige Umbau der Sternwarte vollendet. Diese Zeit unfreiwilliger Musse war aber von massgebender Bedeutung für seine mathematischen Studien; denn es fällt in diese Periode die allmähliche Ausbildung der sämmtlichen grundlegenden Ideen, die schliesslich zur Abfassung des »*Barycentrischen Calculs*« (W. Bd. I, pag. 1—388) führten.

Bezüglich der Zeit der Entstehung dieses Hauptwerkes von Möbius, das erst im Jahre 1827 im Druck erschien, konnte man bisher nur nach dem geometrischen Anhang (W. Bd. I, pag. 389—398) zu dem 1823 veröffentlichten Schriftchen »*Beobachtungen auf der Königlichen Universitätssternwarte zu Leipzig*« (W. Bd. IV, pag. 441—476) vermuthen, dass Möbius in jenem Jahre bereits seine barycentrische Me-

thode gefunden gehabt habe und mit der Betrachtung der Lehre von den Verwandtschaften der Figuren beschäftigt gewesen sei. Aus dem Nachlass lässt sich hierüber Genaueres berichten. Die einigermassen befremdliche Anfügung rein geometrischer Aufgaben an eine Schrift astronomischen Inhalts hatte, wie Möbius in einem noch vorhandenen, aber nicht gedruckten Entwurf sagt, darin ihren Grund, dass er öffentlich zeigen wollte, wie er die geschäftsfreie Zeit während des Umbaues der Sternwarte für die Wissenschaft nicht ungenützt habe verstreichen lassen. Er berichtet, dass er sich schon in den ersten Jahren seines Leipziger Aufenthalts damit beschäftigt habe, den durch die Mechanik erzeugten Begriff des Schwerpunkts aus einem rein mathematischen Gesichtspunkt aufzufassen und ihn dadurch in das Gebiet der Mathematik, speciell in das der Geometrie zu verpflanzen. Von diesen Versuchen ist nichts anderes mehr vorhanden, als einige durch das Alter ziemlich mürbe gewordene Blätter, welche allem Anscheine nach Möbius' erste Ideen von der geometrischen Verwerthung des Begriffs vom Schwerpunkt wiedergeben und gerade deshalb wohl von ihrem Verfasser der Aufbewahrung werth befunden wurden. Eine solche pietätvolle Behandlung jener Blätter, aus denen der barycentrische Algorithmus hervorgegangen, erscheint bei Möbius nicht unwahrscheinlich, — hat er ja doch auch, wie an einer Stelle der Manuscripte zu lesen ist, »aus Dankbarkeit gegen die Mechanik«, deren Schwerpunktsbegriff ihm die erste Veranlassung zu seiner barycentrischen Methode gegeben, sich nicht entschliessen können, den von allen mechanischen Eigenschaften befreiten geometrischen Schwerpunkt mit Carnot und L'Huilier als Punkt der mittleren Entfernungen zu bezeichnen.

Die Ansicht, dass jene Blätter, deren Inhalt des historischen Interesses wegen im Folgenden wiedergegeben wird, aus der Zeit vor 1818 stammen, erhält eine feste Stütze durch den Umstand, dass Möbius in diesen Aufzeichnungen sich des Princips der Zeichen bei Strecken noch nicht bedient.

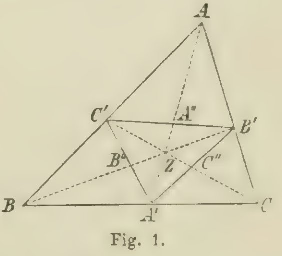


Fig. 1.

»Durch den Punkt Z (Fig. 1) im Dreieck ABC seien nach den Spitzen desselben gerade Linien gezogen, welche die Seiten in A', B', C' treffen.

Es verhalte sich

$$BA' : A'C = c : b \ . \tag{1}$$

B sei der Schwerpunkt eines Systems von b Punkten, C der Schwerpunkt eines Systems von c Punkten; so ist A' der gemein-

schaftliche Schwerpunkt beider Systeme, in welchem man sich $b+c$ Punkte vereinigt vorstellen kann.

Es verhalte sich ferner

$$AB' : B'C = c : a \,, \tag{2}$$

A sei ein a-facher Punkt, also B', der Schwerpunkt von A und C, ein $(c+a)$-facher. Der Schwerpunkt von A, B und C muss daher sowohl in AA' als BB' liegen und ist demnach kein anderer als Z. Es verhält sich also

$$AZ : A'Z = b+c : a \,, \tag{3}$$

$$BZ : B'Z = a+c : b \,. \tag{4}$$

Der Schwerpunkt von A, B, C muss aber auch in der Linie liegen, welche den Schwerpunkt von A und B mit C verbindet. Diese Linie muss durch Z gehen, ist daher CC', also C' der Schwerpunkt von A und B. Mithin

$$BC' : AC' = a : b \,, \tag{5}$$

$$CZ \ : C'Z = a+b : c \,. \tag{6}$$

Man ziehe $B'C'$, welche AA' in A'' schneidet, und betrachte das Dreieck ABB', wo A ein a-facher, B ein b-facher, und B' ein $(a+c)$-facher Punkt ist. Der Schwerpunkt von A, B, B' liegt daher in AZ und $B'C'$, ist also A'', und da C' ein $(a+b)$-facher, Z ein $(a+b+c)$-facher Punkt ist, so verhält sich

$$AA'' : ZA'' = a+b+c : a \,, \tag{7}$$

$$C'A'' : B'A'' = a+c : a+b \,. \tag{8}$$

Aehnliche Proportionen entstehen durch Ziehung der Linien $C'A'$ und $A'B'$. Durch Elimination von a, b, c aus diesen Verhältnissen ergeben sich eine Menge [von Beziehungen] zwischen den Linien der Figur allein. Unter anderen ist die Linie AA' in harmonischer Proportion geschnitten. Denn es verhält sich:

$$AZ : A'Z = b+c : a \,,$$

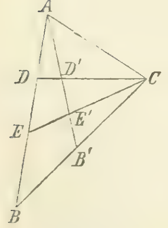


Fig. 2.

folglich

$$AA' : A'Z = a+b+c : a = AA'' : A''Z \,.«$$

Dasselbe Verfahren wendet Möbius an, indem er den Satz beweist:

»Zieht man von C (Fig. 2) nach den Punkten einer harmonisch getheilten Linie $ADEB$ die Geraden CA, CD, CE, CB, so wird die Gerade AB' in D' und E' auch harmonisch getheilt. Man setze

$$AE : EB = b : a \,,$$

nehme A als a-fachen, B als b-fachen Punkt, so ist E der Schwer-

punkt von A und B und daher $(a+b)$-fach. Nun verhält sich

$$AD : DE = AB : BE = a+b : a \ ,$$

folglich ist D der $(2a+b)$-fache Schwerpunkt zwischen dem a-fachen A und dem $(a+b)$-fachen E. Es verhalte sich ferner

$$CB' : BB' = b : c \ ,$$

C sei ein c-facher Punkt; so ist B' der Schwerpunkt von B und C, E' der Schwerpunkt von A, B, C, also

$$AE' : B'E' = b+c : a \ .$$

Ferner zeigt sich leicht, dass D' der Schwerpunkt von A, E, C ist, also

$$AD' : E'D' = a+b+c : a = AB' : B'E' \ ,$$

q. e. d.«

Dies der Inhalt jener Blätter. Die Leichtigkeit, mit der sich auf diese Weise Möbius durch Zuhilfenahme des Schwerpunkts geometrische Sätze zu beweisen in den Stand gesetzt sah, bewog ihn nun für seine Untersuchungen einen Algorithmus zu ersinnen. Die Zeit der Erfindung desselben lässt sich aus den Manuscripten mit Sicherheit bestimmen. Unter den nachgelassenen Papieren hat sich noch das Concept des Briefes vorgefunden, durch welchen Möbius im Jahre 1827 sein Erstlingswerk dem Freiherrn von Lindenau zueignete. Er schreibt darin über seinen barycentrischen Calcul:

»Die ersten Ideen dazu bildeten sich bei mir in den Jahren 1818—1819, wo die Sternwarte noch nicht eingerichtet war, und ich daher mehr Zeit zu Nebenbeschäftigungen übrig hatte. Späterhin wurde diese Arbeit durch die astronomischen Amtsgeschäfte oft unterbrochen und konnte daher nur langsam fortrücken. Nur in den letzten Jahren, seit Mollweide's Tod, suchte ich mit Eifer das Werk seinem Ende zuzuführen, weil ich mir mit der Hoffnung schmeichelte, durch Darlegung dieses Beweises meiner etwaigen Fähigkeiten die erledigte Professur der Mathematik auf mich übertragen zu sehen.«

In welcher Weise nun Möbius von 1818 an seine barycentrische Methode allmählich ausbildete und zur Verwendung für analytisch-geometrische Untersuchungen geschickt machte, darüber lässt sich aus den Manuscripten ein klares Bild gewinnen. Möbius pflegte, wie schon erwähnt, bei seinen wissenschaftlichen Arbeiten zur vorläufigen Fixirung seiner Ideen und Rechnungen zunächst jedes leere Blatt, das ihm gerade zur Hand war, zu benutzen, dann aber die Resultate in erster zusammenhängender Bearbeitung alltäglich in ein Diarium einzutragen. Auf diese Weise sind von 1818 bis 1865 jene schon erwähnten elf Tagebücher D_1, D_2, ... D_{11} entstanden, welche von dem Fortgang der Vorarbeiten zu allen grösseren und wichtigeren Werken und Abhandlungen Zeugniss ablegen. Von diesen

Tagebüchern handeln D_1 (274 Seiten) und D_2 (181 Seiten) lediglich vom barycentrischen Calcul. D_1 umfasst die Untersuchungen von 1818 bis 1821, D_2 diejenigen der Jahre 1822—1824. Das Diarium D_1 beginnt mit der Bestimmung der Lage eines Punktes auf einer Geraden gegen zwei Fundamentalpunkte und auf einer Ebene gegen drei Fundamentalpunkte durch barycentrische Coordinaten. Es wird sodann die Anwendbarkeit dieser neuen analytisch-geometrischen Methode auf die Hauptaufgaben über gerade Linien und Kegelschnitte gezeigt und ihr Zusammenhang mit der Methode der Parallelcoordinaten untersucht. Ferner finden sich in D_1 die Grundlagen für die Lehre von den Verwandtschaften ebener und räumlicher Figuren, insbesondere die Theorie der Affinität und Collineation, der Algorithmus der Doppelschnittsverhältnisse, die Theorie der geometrischen Netze, endlich auch die Erweiterung des barycentrischen Calculs auf räumliche Figuren und seine Anwendung auf die analytische Behandlung der Flächen zweiter Ordnung und der Raumcurven doppelter Krümmung. Man kann daher mit Recht behaupten, dass die neuen Ideen, welche Möbius' barycentrischem Calcul sein specifisches Gepräge aufdrücken, bereits im Jahre 1821 vollkommen ausgebildet vorhanden gewesen sind, und wird dieses Jahr für das eigentliche Geburtsjahr jenes Werkes zu halten haben. In der That trug sich Möbius damals schon mit dem Gedanken, seine neuen Methoden und Entdeckungen in Buchform zu veröffentlichen, wie aus einigen in D_1 vorkommenden Entwürfen für Vorrede und Einleitung zu erkennen ist. Die Vollendung des Umbaues der Sternwarte und die Inanspruchnahme durch die Pflichten des praktischen Astronomen hielten Möbius zunächst hiervon ab, und er begnügte sich damit, einzelne Partien seiner geometrischen Untersuchungen eingehender zu bearbeiten, wie aus dem Diarium D_2 zu ersehen ist. Besonderen Werth legte er dabei auf die Ausbildung der Lehre von den geometrischen Verwandtschaften, die er später selbst als das Hauptverdienst seines Werkes bezeichnete.

Während der Jahre 1825 und 1826 hat nun Möbius seine in D_1 und D_2 entwickelten Resultate systematisch geordnet, von welcher Bearbeitung nur wenige Blätter übrig geblieben sind. Eine zweite Ueberarbeitung machte das Werk druckfertig; sie ist bis auf einige Bogen und die von Möbius selbst sauber gezeichneten Figurentafeln jedenfalls dem Setzer zum Opfer gefallen. Im Anfang Februar des Jahres 1827 verliess der barycentrische Calcul die Presse.

Recensionen desselben erschienen in der *Leipziger Literaturzeitung* (Jahrgang 1827 Nr. 219 und 220) von einem Ungenannten und in den *Jahrbüchern für wissenschaftliche Kritik* (Jahrgang 1828 Nr. 21

bis 24) von Spehr. Auch Gauss hatte Möbius, wie aus einem seiner Briefe zu ersehen ist, Hoffnung gemacht, dass er selbst eine Anzeige des neuen Werkes in den Göttinger Nachrichten besorgen werde. Möbius schreibt deshalb am 2. December 1827 an Gauss, als er erfahren, dass derselbe sich anerkennend über sein Buch geäussert habe:

»Insbesondere ist es nicht sowohl der barycentrische Calcul selbst, als vielmehr die Lehre von den Verwandtschaften, worüber ich Ihre Ansicht gern hören möchte, weil ich glaube, dass unter dem etwaigen Neuen, was das Buch enthält, die aus den Verwandtschaften fliessenden allgemeinen Sätze über die verschiedenartigen Relationen, die zwischen den Theilen einer Figur stattfinden können, am ehesten noch der Wissenschaft einigen Nutzen leisten möchten.«

Gauss hat seine Absicht nicht ausgeführt; erst im Jahre 1843 sprach er sich in einem Briefe an Schumacher (vgl. hierzu Werke Bd. I, pag. XII) über die Bedeutung und den Werth des barycentrischen Algorithmus näher aus.

Erwähnt sei noch des historischen Interesses wegen die, wie es scheint, bisher unbekannt gebliebene Thatsache, dass einige Zeit vor Möbius schon F. A. Förstemann, Lehrer am Danziger Gymnasium, in seiner Inauguraldissertation »*Theoriae punctorum centralium primae lineae, Halae* 1817« gleichfalls den Schwerpunktsbegriff zu geometrischen Untersuchungen verwendete*). Seine Schrift, von der Möbius im Jahre 1822 durch ein Referat von Buzengeiger in der Leipziger Literaturzeitung vom 22. Mai 1822 Kenntniss erhielt, steht jedoch, so nahe sie dem barycentrischen Calcul gekommen ist, diesem an Ausdehnung und Erfolg weit nach.

Nach Vollendung seines Hauptwerkes lag es eine Zeit lang in Möbius' Absicht, die geometrischen Hefte des im Jahre 1825 in Halle

---

*) Das Eigenthümliche der Abhandlung Förstemann's ist die Auflösung folgender Aufgaben (in den Zeichen des barycentrischen Calculs ausgedrückt):

Gegeben sind in Bezug auf die drei Fundamentalpunkte A', A'', A''' die Punkte B', B'', B''' und C durch ihre Ausdrücke

$$B' \equiv \beta' A' + \beta'' A'' + \beta''' A''' \,, \tag{1}$$

$$B'' \equiv \gamma' A' + \gamma'' A'' + \gamma''' A''' \,, \tag{2}$$

$$B''' \equiv \delta' A' + \delta'' A'' + \delta''' A''' \,, \tag{3}$$

$$C \equiv n' A' + n'' A'' + n''' A''' \,; \tag{4}$$

gesucht wird der Ausdruck des Punktes C, wenn man B', B'', B''' als Fundamentalpunkte wählt, also

$$C \equiv p' B' + p'' B'' + p''' B''' \,. \tag{5}$$

Umgekehrt soll man aus (1), (2), (3) und (5) den Ausdruck (4) finden. Die Darstellung der Punkte im Raume als Centralpunkte von vier Fundamentalpunkten hat Förstemann unterlassen, obwohl er von der Möglichkeit derselben überzeugt war.

verstorbenen Professors Joh. Friedr. Pfaff, mit dem er seit 1814 in freundschaftlichen Beziehungen gestanden hatte, zum Zwecke der Veröffentlichung zu bearbeiten. Da er jedoch hierbei seiner Neigung, fremde Ideen in eine neue, seiner Geistesrichtung angepasste Form zu kleiden nicht folgen konnte, so vermochte er der von ihm übernommenen Aufgabe vermuthlich nur geringe innere Neigung entgegenzubringen. Er liess diesen Plan unausgeführt und wendete bald wieder eigenen Untersuchungen sich zu.

Das zweite Hauptwerk von Möbius, das *Lehrbuch der Statik*, (W. Bd. III, pag. 1—497) ist im Jahre 1837 erschienen, und man war deshalb der Ansicht, dass die ihm vorausgehenden Abhandlungen aus dem Gebiete der Statik Möbius veranlasst haben, eine umfassende Bearbeitung der Statik zu unternehmen. Der Nachlass zeigt indess, dass Möbius diesen Plan viel früher gefasst und vorbereitet hatte.

Nachdem der der Statik entnommene Begriff des Schwerpunktes ihm auf dem Gebiete der Geometrie so wesentliche Dienste geleistet hatte, mochte ihm dieser Erfolg die Anregung gegeben haben, das ganze Gebiet der Statik vom geometrischen Gesichtspunkte aus zu durchforschen. Und so beginnen schon am 1. November 1827, also nicht lange nach dem Erscheinen des barycentrischen Calculs, in dem Diarium D_3 (168 Seiten) die Untersuchungen aus der Statik mit der Betrachtung des Gleichgewichts zwischen vier Kräften in einer Ebene. Der Inhalt von D_3, welches Tagebuch am 30. August 1828 geschlossen wurde, deckt sich ziemlich genau mit dem Inhalt des 3., 5. und 6. Capitels vom ersten Theile der Statik. Insbesondere gehört dieser Periode von Möbius' statischen Untersuchungen die Entdeckung der besonderen Art von Reciprocität an, bei welcher jedem Punkte des Raumes eine durch ihn hindurchgehende Ebene und jeder Ebene ein in ihr liegender Punkt entspricht. Am 5. Februar 1828 fand nämlich Möbius, dass in Bezug auf ein beliebig gegebenes Kräftesystem alle Axen einer Ebene, für welche das Moment des Systems Null ist, durch einen bestimmten Punkt der Ebene gehen, den er den Nullpunkt der Ebene nannte (das heute sogenannte Nullsystem). Er erkannte sofort, dass die geometrischen Sätze, welche aus dieser Lehre von den Axen einer Ebene fliessen, sich auch rein geometrisch, unabhängig von statischen Begriffen, herleiten lassen. Diese Bemerkung wurde die Veranlassung zu der allerdings erst im Jahre 1833 erschienenen Abhandlung »*Ueber eine besondere Art dualer Verhältnisse zwischen Figuren im Raume*« (W. Bd. I, pag. 489—515). Eine Folge dieser Betrachtungen über die Nullpunkte der Ebenen war ferner die am 11. Februar 1828 gemachte Entdeckung, dass sich zwei Tetraëder

construiren lassen, von denen ein jedes dem anderen zugleich um- und eingeschrieben ist, eine Entdeckung, die er bereits in demselben Jahre veröffentlichte (W. Bd. I, pag. 439—446), ohne ihres Ursprungs aus statischen Untersuchungen Erwähnung zu thun.

Auch das Diarium D_4 (215 Seiten), welches am 15. September 1828 begonnen und im Januar 1830 geschlossen wurde, beschäftigt sich lediglich mit der Statik. Zunächst werden die grundlegenden Ideen über den Mittelpunkt nicht paralleler Kräfte im Raume, die Axen des Gleichgewichts, die Stabilität desselben und die Maxima und Minima beim Gleichgewicht entwickelt (Statik 1. Th. 7.—10. Cap.). Die hierauf folgenden Untersuchungen betreffen die ersten fünf Capitel des zweiten Theils der Statik. Die Lehre vom Gleichgewicht an Fäden, wie sie im 6., 7. und 8. Capitel dargestellt wird, rührt aus einer späteren Zeit her. Im Jahre 1831 finden wir Möbius mit der Ordnung der in D_3 und D_4 gefundenen Resultate beschäftigt. Diese erste Bearbeitung der Statik, von der nur noch einige Bogen im Nachlass vorhanden sind, welche auf die Theorie des Nullsystems Bezug haben, wurde späterhin mehrfach umgearbeitet und (insbesondere durch die Lehre von den Kräftepaaren und vom Gleichgewicht an Fäden) vervollständigt. Das druckfertige Manuscript der Statik, die im Sommer des Jahres 1837 im Buchhandel erschien, befindet sich nicht im Nachlass. — Sonderbarer Weise hat dieses zweite Hauptwerk von Möbius seiner Zeit wenig Beachtung gefunden, sodass der Verleger gezwungen war, einen Theil der Auflage einstampfen zu lassen.

Während sich Möbius mit der Statik beschäftigte, veröffentlichte er mehrere Abhandlungen, die mit der Statik in keiner Beziehung stehen. Abgesehen von der ihrem Ursprung nach bereits oben besprochenen Abhandlung aus dem Jahre 1831 »*Ueber eine besondere Art der Umkehrung der Reihen*« (W. Bd. IV, pag. 589—612) erschienen in Crelle's Journal zwei mit einander zusammenhängende Aufsätze »*Kurze Darstellung der Haupteigenschaften eines Systems von Linsengläsern*« 1829 (W. Bd. IV, pag. 477—501) und »*Beiträge zu der Lehre von den Kettenbrüchen*« 1830 (W. Bd. IV, pag. 503—539). Die Veranlassung hierzu bildeten die Vorlesungen über Katoptrik und Dioptrik im Sommersemester 1829 und über die Theorie der Fernröhre im Wintersemester 1829/30, welche Folge sich seit 1818 zum vierten Male wiederholte. Auch die Abhandlungen »*Entwickelung der Lehre von den dioptrischen Bildern mit Hülfe der Collineationsverwandtschaft*« 1855 (W. Bd. IV, pag. 541—568) und »*Geometrische Entwickelung der Eigenschaften unendlich dünner Strahlenbündel*« 1862 (W. Bd. IV, pag. 569—588) verdanken ihre Entstehung dem Interesse,

welches Möbius fortgesetzt dioptrischen Untersuchungen zum Zwecke seiner Vorlesungen über Fernröhre zuwendete.

Noch eine andere Arbeit, die weitab von Möbius' gewohntem Ideenkreise lag, zog ihn von seinen statisch-geometrischen Betrachtungen ab. Obwohl er sich sonst Anregungen, die ihm von Aussen kamen, ziemlich unzugänglich zeigte, so vermochte er sich doch einer Aufforderung, die von Gauss an ihn gestellt wurde, nicht zu verschliessen. Auf dessen Anregung errichtete Möbius auf seinem Observatorium eine magnetische Warte und betheiligte sich seit dem 22. Juni 1834 lebhaft an den nach Gauss' Plane anzustellenden magnetischen Beobachtungen. Möbius in Leipzig und Encke in Berlin waren ausserhalb Göttingens die ersten Beobachter, welche das neue Magnetometer zur Messung der Variationen der magnetischen Declination benutzten. Möbius' Beobachtungen stimmten mit denen in Göttingen vortrefflich überein, wie W. Weber in mehreren seiner Briefe erfreut berichtet. Auch an der von Gauss und Weber herausgegebenen periodischen Druckschrift »*Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins*«, die vom Jahre 1836 an erschien, nahm Möbius als Mitarbeiter theil; nur ist diese Betheiligung infolge besonderer Umstände bisher nicht bekannt geworden. Der zweite Band der »*Resultate*« aus dem Jahre 1837 enthält einen Aufsatz »*Ueber die Reduction der Magnetometerbeobachtungen auf absolute Declinationen*«, den man, weil er mit »W.« unterzeichnet ist, allgemein W. Weber zugeschrieben hat*). Allein der wesentliche Theil desselben rührt von Möbius her. Er schreibt hierüber an W. Weber am 10. März 1837:

»Gauss' Wunsch, dass mein die Theorie des magnetischen Apparats betreffender Aufsatz in Ihren Resultaten pp. aufgenommen werde, ist mir sehr schmeichelhaft gewesen. Ich übersende Ihnen daher denselben, wie er ist, jedoch unter Hinzufügung der zwei Bedingungen:

1) dass er vorher sorgfältig durchgegangen und, wo es für nöthig gefunden wird, verbessert werde. Ich bin mit jeder Verbesserung, die von Gauss oder Ihnen herrührt, wie von selbst sich versteht, zufrieden. Und dass solche Verbesserungen zum Theil nöthig sind, darauf hat mich Gauss bei meiner Anwesenheit in Göttingen bereits aufmerksam gemacht.

2) dass der Aufsatz oder der Theil desselben, welcher für gut befunden wird, mit Hinzufügung der für nöthig und zweckmässig erachteten Verbesserungen abgeschrieben, diese Abschrift der Druckerei

---

*) Nach einer mir von Herrn Geh. Rath W. Weber zugegangenen Mittheilung ist er nicht der Verfasser bez. Bearbeiter des genannten Artikels. R.

übergeben und mein eigenhändig geschriebener Aufsatz, ganz wie er ist, mir noch vor Ablauf künftigen Monats April zurückgeschickt werde.«

Und in einem Postscriptum zu diesem Briefe bemerkt er:

»Hätte ich jetzt Zeit, so würde ich den Aufsatz quaestionis noch einmal über- oder sogar umgearbeitet haben. Ich werde aber jetzt von den Buchdruckern wegen des Drucks meiner Statik, die sich jetzt dem Ende naht, und wegen der Fertigung von Kalendern gedrängt. Und mit der Ueber- oder Umarbeitung geht es bei mir etwas langsam.«

Das betreffende Manuscript mit der Aufschrift »*Zur Theorie des magnetischen Apparats*« fand sich in der That im Nachlass vor. Da dasselbe nicht abgedruckt werden konnte, so mag hier (zugleich zum Nachweis seiner Identität mit dem wesentlichen Inhalt des III. Abschnitts der oben angeführten Abhandlung »*Ueber die Reduction* etc.«) eine Inhaltsangabe Platz finden. Möbius behandelt die fünf Aufgaben:

1) Aus der Torsionskraft T des Fadens, an welchem der Magnetstab aufgehängt ist, und deren Verhältniss n zur magnetischen Drehungskraft für jedes beobachtete Azimuth A' des Magnetstabes das wahre Azimuth A zu finden. Es ergiebt sich

$$A = (1 + n) A' - n T .$$

(»Ueber die Reduction etc.« III. Absch. §. 1).

2) Die Constante n oder das Verhältniss der Drehungskraft des Fadens zur magnetischen Drehungskraft zu bestimmen (a. a. O. §. 2).

3) Das Azimuth T des unmagnetisirten Stabes zu finden (a. a. O. §. 3).

4) Den Winkel zu bestimmen, den die Spiegelaxe mit der magnetischen Axe macht (a. a. O. §. 4).

5) Den Winkel (die absolute magnetische Declination) zu bestimmen, den die wahre magnetische Axe mit dem Meridian einschliesst, wenn der Magnetstab an einem von aller Torsion freien Faden hinge und bloss der erdmagnetischen Kraft folgte (a. a. O. §. 6).

Die Ergebnisse der Beobachtungen mit dem Magnetometer veröffentlichte Möbius gelegentlich in der Leipziger Zeitung unter der Rubrik »Wissenschaftliche und Kunst-Nachrichten«. An derselben Stelle pflegte er auch seit Beginn seiner Thätigkeit auf der Sternwarte von seinen astronomischen Beobachtungen des Oefteren zu berichten.

Den Abhandlungen aus dem dritten Decennium*) der wissen-

---

*) Ueberhaupt ist Möbius während dieser Zeit sehr vielfach in Anspruch genommen. Eine Reihe von Jahren hielt er in jedem Winter zahlreich besuchte und sehr beifällig aufgenommene astronomische Vorlesungen für Gebildete. Als Leitfaden benutzte er hierbei, wie auch in seinen Vorlesungen an der Universität,

schaftlichen Thätigkeit Möbius' ist endlich noch zuzuzählen der Aufsatz »*Ueber die Berechnung des Reservefonds einer Lebensversicherungsgesellschaft*«, der im IV. Band der Gesammelten Werke abgedruckt und dort in einer Vorbemerkung besprochen worden ist (W. Bd. IV, pag. 647—658).

Bald nach Vollendung der Statik trat Möbius von Neuem an umfassende Untersuchungen heran, aus denen schliesslich seine »*Elemente der Mechanik des Himmels*« (W. Bd. IV, pag. 1—318) und die astronomische Dissertation beim Antritt des Ordinariats »*Variationum quas elementa motus perturbati planetarum subeunt facilis evolutio*« (W. Bd. IV, pag. 325—342) hervorwuchsen. In dem im Januar des Jahres 1838 begonnenen Diarium D_5 (256 Seiten) beschäftigt er sich zunächst mit dem Satze, dass eine jede Bewegung sich, so nahe als man will, aus gleichförmigen Kreisbewegungen zusammensetzen lässt, und benutzt dann diese Theorie für die Darstellung sowohl des elliptischen wie des gestörten Laufs der Planeten, sowie zur Bestimmung der störenden Kräfte. Das Diarium D_5 ist lediglich der Entwickelung der Störungstheorie gewidmet, an der Möbius mehr als 5 Jahre, bis zum Juli 1843, gearbeitet hat. Den Schluss von D_5 (11. Juli 1843) bildet der erst im Jahre 1845 publicirte Aufsatz »*Elementare Bestimmung der Kraft, durch welche die elliptische Planetenbewegung hervorgebracht wird*« (W. Bd. IV, pag. 320—324). Möbius beschäftigte sich mit der Störungstheorie zunächst zu Vorlesungszwecken; erst im Verlauf seiner Arbeiten scheint ihm der Gedanke gekommen zu sein, seine Untersuchungen in Buchform zu veröffentlichen. Wie eine Bemerkung in einem Briefe des Freiherrn von Lindenau zu erkennen giebt, hatte Möbius bei der Abfassung seiner Mechanik des Himmels als Zweck im Auge die Erleichterung des Verständnisses der etwas tiefer gehenden Lehren der physischen Astronomie, insbesondere des schwierigsten Capitels derselben, der Perturbationslehre. Anfang November 1842 hatte er sein neues Werk vollendet, und im Sommer des Jahres 1843 erschien es im Buchhandel. Möbius machte, wie er in einem Briefe an seinen Freund Apelt klagt, die betrübende Erfahrung, dass Solche, bei denen er Liebe zur Sache und genugsame Vorkenntnisse voraussetzen konnte,

---

ein von ihm verfasstes Werkchen »*Die Hauptsätze der Astronomie zum Gebrauche bei seinen Vorlesungen für Gebildete*, Leipzig 1836«, welches 1874 zum 6. Male aufgelegt worden ist. Auch die Schrift »*Die wahre und die scheinbare Bahn des Halley'schen Kometen bei seiner Wiederkunft im Jahre 1835*, Leipzig 1834« war zunächst für seine Zuhörer in jenen Vorlesungen bestimmt und daher populär gehalten. Deshalb sind in die Gesammelten Werke Bd. IV pag. 641—644 nur die Titel und Inhaltsangaben aufgenommen worden.

nach Durchlesung von etlichen Seiten das Buch wieder aus der Hand legten, abgeschreckt durch den fremdartigen Gang, den er im Eingange seines Werkes eingeschlagen hatte, obwohl er gerade dadurch das Verständniss der schwierigeren Partieen desselben erleichtert zu haben glaubte. Um so mehr war er überrascht und erfreut durch die freundliche Aufnahme, die Gauss der Mechanik des Himmels trotz ihrer elementaren Tendenz schenkte. »Fast möchte ich vermuthen«, schreibt Möbius am 25. October 1843 an ihn, »dass der Grund, aus welchem Sie nach einer ersten Ansicht des Buches dasselbe etwas näher kennen zu lernen gewünscht haben, die Art gewesen ist, auf welche ich gleich von vornherein die Lehre von der Zusammensetzung der Bewegungen zu behandeln gesucht habe. Denn ich erinnere mich wohl, dass Sie, als ich Ihnen mein Lehrbuch der Statik zu übersenden die Ehre gehabt hatte, unter Anderem mir schrieben, dass Ihnen die bisherige Behandlungsweise jener Lehre sehr ungenügend scheine, dass aber eine exacte Darstellung derselben dem grösseren Theile des Publicums zu abstract und spinös scheinen möchte.«

Ganz in derselben Weise, wie in der Mechanik des Himmels, hatte Möbius schon in einer Vorlesung über physische Astronomie im Wintersemester 1838/39, die er mit einem Capitel über die Grundlehren der Mechanik einleitete, die Lehre von der Zusammensetzung der Bewegungen auf Grund der Lehre von der Zusammensetzung gerader Linien vorgetragen, ohne jedoch weder hier noch dort geradezu den Begriff der geometrischen Summe einzuführen. Die geometrische Addition von Strecken verwendete Möbius zum ersten Male — in einem Briefe an Baltzer gedenkt er selbst dieses Umstandes als einer Neuerung — in einer Vorlesung über Dynamik im Wintersemester 1841/42 zu dem Zwecke einer geometrischen Darstellung der Phoronomie. Bei der Einführung des Begriffs der geometrischen Summe von Strecken, zu welchem Möbius durch die Mechanik gekommen ist, trifft er sich nun mit Giusto Bellavitis, mit dessen Aequipollenzenrechnung er durch ein Schreiben ihres Erfinders bekannt wurde. Dieser Brief, datirt Bassano den 23. Juni 1835, hat sich im Nachlass vorgefunden. Bellavitis berichtet darin, dass er aus einigen Referaten über den barycentrischen Calcul in dem *Bulletin universel* von Férussac die grosse Aehnlichkeit desselben mit seiner Methode der Aequipollenzen erkannt und durch das Studium des Möbius'schen Werkes von dem inneren Zusammenhang beider Methoden sich überzeugt habe. Er erörtert zunächst, übereinstimmend mit Möbius, das Princip der Zeichen bei Strecken und erläutert dann Begriff und Symbol der Aequipollenz. Dann fährt er fort:

»Vos formules (§. 1.) $BC + CA + AB \text{♎} \mathrm{o}$, $AB + BC + CD \text{♎} AD$, etc. subsistent pour moi, quelques soient les points $A, B, \cdots$ de l'espace quoique non situés en ligne droite: vous voyez par conséquence que je mets ♎ o la somme des côtés d'un polygone quelconque plan ou gauche. — Un équipollence ne change pas si à une droite on substitue un autre équipollente à la première.

A chaque droite AB je puis toujours substituer son équipollente $AZ - BZ$, où Z est un point tout à fait arbitraire; et par abbréviation je puis sousentendre cette lettre commune Z, dans ce cas mes équipollences déviennent identiques à vos Ausdrücke. Réciproquement le Ausdruck par exemple $3G = A + B + C$ est la même chose de l'équipollence $3 \cdot GZ \text{♎} AZ + BZ + CZ$, dans laquelle on peut changer à plaisir la lettre arbitraire Z en écrivant p. ex. $\mathrm{o} \text{♎} AG + BG + CG$, ou $3 \cdot GA \text{♎} BA + CA$, d'où il résulterait $2 \cdot GA \text{♎} BA + CA - GA \text{♎} BA + CG$. — Quand dans un équipollence on néglige un facteur d'un de ses membres on doit changer le signe ♎ dans le $\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\text{♎}}}$; ainsi vos signes $=$, $\equiv$ correspondent respectivement aux miens ♎, $\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\text{♎}}}$«.

Aehnliche Ideen sind es, die Möbius in der Abhandlung vom Jahre 1844 »*Ueber die Zusammensetzung gerader Linien und eine daraus entspringende neue Begründungsweise des barycentrischen Calculs*« (W. Bd. I, p. 601—612) eingehend behandelt und tiefer begründet, als es von Bellavitis in dem oben abgedruckten Theile seines Briefes geschehen ist. Ausgehend von dem schon in dem Vorlesungshefte über Dynamik (1841/42) enthaltenen Satze, dass für vier beliebige Punkte A, B, C, D

$$AB + CD = AD + CB$$

ist, fand er (a. a. O. Art. 7), dass es zur Zusammensetzung zweier Linien schon hinreiche zu wissen, welches ihre Anfangspunkte (A und C) und welches ihre Endpunkte (B und D) sind, nicht aber, wie letztere zu ersteren gehören (ob B zu A und D zu C, oder D zu A und B zu C), und konnte somit die Differenz $A - B$ als Ausdruck der Strecke AB betrachten.

Zu gleicher Zeit wie Möbius hatte nun auch Grassmann sich mit der geometrischen Addition von Linien beschäftigt. Diese Lehre bildete den Anknüpfungspunkt des regen wissenschaftlichen Verkehrs zwischen beiden Männern. Grassman hatte Möbius vor Vollendung des Druckes der ersten Ausgabe seiner Ausdehnungslehre in Leipzig besucht und in ihm einen Mathematiker von nahe verwandtem Ideenkreis gefunden. Kurz darauf schreibt er von Stettin aus an Möbius (10. October 1844):

»Heute habe ich das letzte Heft des Crelle'schen Journals in die Hände bekommen und habe Ihren Aufsatz gelesen. In der That hat mich die Verwandtschaft der Ideen, die sich sogar zum Theil bis in die Bezeichnung und Benennung hinein erstreckt, sehr überrascht und erfreut, und ich bin dadurch in eine ähnliche Stimmung versetzt worden, wie sie in mir die erste Bekanntschaft mit ihrem barycentrischen Kalkül erregte. Sogar die Benennung der geometrischen Summe habe ich Anfangs zur Unterscheidung von arithmetischer Summe stets gebraucht und sie in der Ausdehnungslehre überall da festgehalten, wo eine Verwechselung zu befürchten war. Eine Differenz tritt noch darin hervor, dass ich die Linie AB, sobald an ihr Richtung und Länge und nichts weiter festgehalten werden soll, wirklich gleich $B - A$ setze, und es ist diese Gleichsetzung dasjenige, was ich S. 146 meines Werks als die nothwendige Consequenz Ihres barycentrischen Kalküls bezeichnet hatte. Auch hätte jene Linie (Strecke) gleich $A - B$ gesetzt werden können, wozu Sie mehr geneigt zu sein scheinen, indem sich mit Nothwendigkeit nur nachweisen lässt, dass sie dieser Differenz proportional gesetzt werden müsse; und die Wissenschaft fordert nur, dass dies auf die einfachste Weise geschehe. Beide Annahmen nun stehen sich in dieser Beziehung gleich, doch möchte ich der ersteren darum den Vorzug einräumen, weil dem Endpunkte, wie sich z. B. bei der Integration zwischen bestimmten Grenzen zeigt, mehr der positive, dem Anfangspunkte der negative Werth zuzukommen scheint.«

Möbius pflichtete dieser Auffassung bei und hat sie in einer späteren Vorlesung über den barycentrischen Calcul (1845/46) als die seinige adoptirt, indem er $AB = ZB - ZA$ setzte und daraus jene symbolische Bezeichnung der Strecke AB durch die Differenz $B - A$ ableitete. Er gedachte auch diese Symbolik weiter auszubauen und, wie er Grassmann im Jahre 1845 mittheilt, in einem Aufsatz in Crelle's Journal die Anwendung solcher Formeln auf die Phoronomie zu zeigen:

»Theils um irrige Ansichten*) zu berichtigen, theils und hauptsächlich um mehreres andere auf Phoronomie Bezügliche, wozu eben in meinem Buche kein passender Ort war, weiter auszuführen, werde ich baldmöglichst den gedachten Aufsatz abzufassen suchen.«

Die Note »*Ueber die phoronomische Deutung des Taylor'schen Theorems*« (W. Bd. IV, pag. 625—630) ist das Einzige, was Möbius davon veröffentlicht hat. Mit Sicherheit hat sich aber

---

*) die in Recensionen über die Mechanik des Himmels bezüglich des phoronomischen Theils derselben aufgetaucht waren. R.

ein Manuscript des Nachlasses, welches die Phoronomie behandelt, als zur Veröffentlichung bestimmt erkennen lassen. Dasselbe ist jedoch unvollendet geblieben; es behandelt auf 17 Seiten in 3 Capiteln und 18 Paragraphen mit Verweisen auf Figuren die Lehre von der Zusammensetzung gerader Linien, von der Zusammensetzung der Bewegungen und von der Geschwindigkeit. Da aber diese Capitel einem ersten Abschnitt mit der Ueberschrift »Elemente der Dynamik« angehören, so ist es sehr wahrscheinlich, dass das vorhandene Manuscript den Anfang einer zu grösserem Umfang angelegten Schrift über Phoronomie bilden sollte. Keine Stelle in den Manuscripten oder in den Briefen deutet an, warum Möbius an jener Schrift nicht weiter gearbeitet hat. Möglicherweise liegen die Gründe in der ihn noch nicht befriedigenden Art der Darstellung. Denn während Möbius hier noch durch die Formel $AB \equiv CD$ ausdrückte, dass die Bewegung des Punktes A gegen einen anderen Punkt B dieselbe sein solle, wie die von C gegen D, so brauchte er im Sommer 1854 in seiner Vorlesung über Phoronomie hierfür die Gleichung $A - B = C - D$, in Anknüpfung an den Aufsatz aus dem Jahre 1844 »*Ueber die Zusammensetzung gerader Linien u. s. w.*« Die sich seit 1841/42 oft wiederholenden Vorlesungen über Phoronomie*) hielten aber Möbius' Interesse für die diesem Theile der Mechanik von ihm zu Grunde gelegte Lehre von der geometrischen Addition und die von Grassmann darauf gegründete geometrische Multiplication unausgesetzt wach. Möbius war es, auf dessen Anregung hin Grassmann sich (1845) an der Bewerbung um die Preisaufgabe der Jablonowsky'schen Gesellschaft über die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik betheiligte. Ueber diese Preisschrift gab er ein beifälliges Gutachten mit ausführlicher Begründung ab, wenn er freilich auch die ihm nicht sympathische Darstellung des Verfassers tadelte, als deren Ursache er die innige Verquickung philosophischer Ideen mit rein mathematischen Vorstellungen bezeichnete. Durch einen Commentar zu der Grassmann'schen Schrift, welcher derselben unter dem Titel »*Die Grassmann'sche Lehre von Punktgrössen und den davon abhängigen Grössenformen*« (W. Bd. I, pag. 613—633) beigegeben wurde, hat Möbius das Verständniss der preisgekrönten Abhandlung zu erleichtern unternommen. Unausgesetzt suchte er ferner in seinen Briefen Grassmann zu einer Umarbeitung der Ausdehnungslehre zu bewegen. Die im Jahre 1861 erschienene zweite Ausgabe derselben genügte indess noch weniger als die erste

*) Möbius hielt im Ganzen sechsmal Vorlesungen über Phoronomie, nämlich in den Semestern 1841/42, 1846, 1854, 1857/58, 1860/61, 1863/64.

den Ansprüchen, die Möbius an eine anschauliche Darstellung stellte. Deshalb wohl hat er sich noch in den letzten Jahren seines Lebens mit einer Zusammenstellung seiner eigenen Untersuchungen über geometrische Addition und Multiplication beschäftigt, möglicher-, ja wahrscheinlicherweise zum Zwecke der Publication. Das betreffende Manuscript ist hier vorstehend in Bd. IV der Werke unter dem Titel »*Ueber geometrische Addition und Multiplication*« als Mittheilung aus dem Nachlass zum ersten Male veröffentlicht worden.

Wir kehren zum Jahre 1843 zurück. Nachdem Möbius die Mechanik des Himmels und 1844 das mit ihr in enger Beziehung stehende Programm beim Antritt der ordentlichen Professur »*Variationum quas elementa motus perturbati planetarum subeunt nova et facilis evolutio*« (W. Bd. IV, p. 325—342) vollendet hatte, wendete er sich wieder seinem eigentlichem Schaffensgebiet, rein geometrischen Untersuchungen zu. Das am 15. September 1844 begonnene Diarium D_6 (182 Seiten) beschäftigt sich zunächst mit der analytischen Sphärik. Auch für diese bildet die geometrische Addition von Strecken den Ausgangspunkt, indem die am Schluss der Sphärik (W. Bd. II, pag. 52) stehende nachträgliche Bemerkung über die Bedeutung sphärischer Gleichungen, welche den sphärischen Algorithmus mit der geometrischen Addition von Strecken verknüpft, in D_6 die Untersuchungen eröffnet. Von seinen Resultaten hat Möbius durch die 1846 erschienene Abhandlung »*Ueber eine neue Behandlungsweise der analytischen Sphärik*« (W. Bd. II, pag. 1—54) nur das Wichtigste bekannt gemacht. D_6 enthält ausserdem noch Sätze über collinear verwandte Punktsysteme auf der Kugel und die allgemeine Theorie der sphärischen Linien der 2. Ordnung. In der Absicht, diese Untersuchungen auch auf sphärische Linien der 3. O. auszudehnen, beschäftigte sich Möbius seit Anfang des Jahres 1846 zunächst unter Anwendung des barycentrischen Calculs mit den ebenen Curven 3. O. (D_6, pag. 129), deren Projectionen auf die Kugel die sphärischen Linien der 3. O. sind. Untersuchungen über die Gestalt der planen C_3 und der höheren Curven überhaupt veranlassten ihn (Jan. 1847) dieselben aus dem Mittelpunkt einer Kugel auf ihre Oberfläche zu projiciren, weil sich auf dieser solche Betrachtungen leichter als in der Ebene bewerkstelligen lassen, so dass nunmehr, umgekehrt als es vorher beabsichtigt war, die sphärischen Linien für die Theorie der ebenen Linien, zu Hülfe genommen werden. In D_7 (277 Seiten, begonnen am 22. März 1847) werden diese Untersuchungen, von denen man vorläufig durch den Aufsatz »*Ueber die Gestalt sphärischer Curven, welche keine merkwürdigen Punkte haben*« (W. Bd. II, pag. 183—187)

Kenntniss erhielt, zu Ende geführt, und zwar noch in der ersten Hälfte des Jahres 1847. Die Frucht dieser Arbeiten bildet die Abhandlung »*Ueber die Grundformen der Linien der* 3. *Ordnung*« (W. Bd. II, pag. 89—176), die zwar erst im Jahre 1852 erschien, von deren Abfassung aber Möbius schon am 11. Februar 1848 durch eine Selbstanzeige derselben berichtet hatte (W. Bd. II, pag. 177—182). Wie von allen wichtigeren Arbeiten, so hat Möbius auch von dieser Abhandlung mehrere Ausarbeitungen verfasst, die aber nur zum Theil noch vorhanden sind.

In naher Beziehung zu der Sphärik stehen die krystallographischen Studien, die Möbius nach Vollendung der Vorarbeiten zu der Abhandlung über Curven dritter Ordnung in Angriff nahm (D_7, pag. 43: 17. Juli 1848). Sie schliessen sich an Miller's *Crystallography* (Cambridge 1839) an und beschäftigten Möbius bis zum Sommer des Jahres 1849. Die Anwendung der Sphärik besteht hierbei darin, dass er, wie Miller, nicht sowohl die Krystallgestalten selbst, als vielmehr ihre Projectionen auf die Kugel betrachtet, deren Mittelpunkt mit dem des Krystalls zusammenfällt. Da sich nun bei jedem Krystall drei im Mittelpunkt sich schneidende Axen angeben lassen, gegen welche die Flächen des Krystalls eine besonders einfache Beziehung haben, so werden drei der sechs Schnittpunkte der Axen mit der Kugelfläche, A, B, C, als Fundamentalpunkte gewählt und die Eckpunkte des Kugelnetzes mit Hülfe des sphärischen Algorithmus durch Ausdrücke von der Form $aA + bB + cC$ darzustellen gesucht und mit (a, b, c) bezeichnet.

Aus diesen Untersuchungen entspringt nun die Theorie der symmetrischen Polyeder und der symmetrischen Figuren überhaupt, wie sie nach den im Nachlass vorgefundenen Manuscripten im II. Band der gesammelten Werke dargestellt worden ist. Was die hierzu gehörigen genaueren historischen Notizen anlangt, so sei auf die Vorbemerkung zu jener zweiten Mittheilung aus dem Nachlass »*Theorie der symmetrischen Figuren*« (W. Bd. II, pag. 563—708) verwiesen. Die dort ausgesprochene Vermuthung, dass Möbius diese Abhandlung zur Veröffentlichung bestimmt habe, ist vollinhaltlich durch später erst bekannt gewordene Briefe Möbius' bestätigt worden. Am 10. April 1852 schrieb er an Baltzer:

»Ihre Schrift [über Gleichheit und Aehnlichkeit der Figuren] sorgfältiger zu studiren, wird mir jetzt um so mehr Vergnügen machen, als ich selbst in der letzten Zeit*) durch die Abfassung

*) Also 1852, nicht 1851, wie W. Bd. II, pag. 565 vermuthet wird.

einer grösseren Abhandlung über symmetrische Figuren mich veranlasst gesehen habe, die Hauptsätze aus der Lehre von der Gleichheit und Aehnlichkeit der Figuren in der Einleitung zu dieser Abhandlung zusammenzustellen*). — Den Stoff zu dieser Abhandlung glaube ich jetzt vollständig zusammen zu haben: doch wird mir die Redaction desselben noch einige Mühe machen.«

Und am 9. Juni 1853 schrieb Möbius über denselben Gegenstand an Grassmann, nachdem er über Bravais' Abhandlung zur Theorie der regulären Punktsysteme referirt hatte:

»Ich selbst habe im vorigen Jahre eine etwas ausführlichere Abhandlung über symmetrische Figuren, basirt auf die Definition der Symmetrie und die Symbolik (z. B. $ABC = ACB$), die Sie aus meinem kleinen Aufsatz in Crelle's Journal kennen, auszuarbeiten angefangen, habe sie aber, nicht ganz zufrieden mit ihr, und weil mir interessantere Untersuchungen unter die Hand kamen, bis jetzt unvollendet liegen lassen.«

Diese interessanteren Untersuchungen sind keine anderen, als die über die Methode, um von geradlinigen Punktsystemen durch das Gebiet des Imaginären, das »Schattenreich der Geometrie«**) zu Punktsystemen in der Ebene überzugehen. In welcher Verbindung die Abhandlung *»Ueber eine Methode, um von Relationen, welche der Longimetrie angehören, zu entsprechenden Sätzen der Planimetrie zu gelangen«* (W. Bd. II, pag. 189—204) mit Möbius' bisherigen Arbeiten steht, ist nicht zu ermitteln gewesen. Jedenfalls hat er dieses Uebertragungsprincip erst im Sommer des Jahres 1852 gefunden. Das Concept des Vortrags, den er hierüber am 16. October 1852 in der Gesellschaft der Wissenschaften gehalten hat, ist noch vorhanden. Der hiervon veröffentlichte Bericht enthält mehr als jener Vortrag, insofern er durch die von Möbius erst im November 1852 gefundene »Reduction eines Vierecks auf ein Dreieck« (D_8, pag. 113) vervollständigt wurde. Durch Anwendung jenes Uebertragungsprincips auf collinear verwandte Punktreihen erfolgte am 29. December 1852 die Entdeckung der Kreisverwandtschaft (D_8, pag. 116). Sie wurde am 5. Februar 1853 der Gesellschaft der Wissenschaften bekannt gegeben und im April 1853 durch den Aufsatz *»Ueber eine neue Verwandtschaft zwischen ebenen Figuren«* (W. Bd. II, pag. 205—218) veröffentlicht.

Die beiden letzterwähnten Abhandlungen sandte Möbius unter

*) Nur die erste Bearbeitung der Theorie der symmetrischen Figuren hat Möbius in dieser Weise eingeleitet: die zum Druck bestimmte zweite Bearbeitung beginnt so, wie sie im II. Bande veröffentlicht worden ist.

**) Ausdrucksweise von Steiner, deren sich Möbius in einem Briefe bedient.

Andern auch an Grassmann, dessen lebhaftestes Interesse sie erregten, weil beide mit früher von ihm bearbeiteten Ideen in innigstem Zusammenhange standen. Der vom 23. Januar 1854 datirte Brief Grassmann's an Möbius liefert einen merkwürdigen Beweis von der weitgehenden Verwandtschaft der Ideenkreise, in denen sich die Forschungen beider Männer bewegten. Grassmann hatte sich wiederholt mit der Uebertragung longimetrischer Gleichungen mittels des Imaginären auf die Planimetrie beschäftigt, ohne freilich, wie er sagt, zu so fruchtbaren Resultaten gekommen zu sein, wie Möbius. Auch die Kreisverwandtschaft stellte sich als ein Specialfall der von Grassmann schon im Jahre 1848 entdeckten syncyklischen Verwandtschaft heraus, welche er allerdings erst in der zweiten Ausgabe der Ausdehnungslehre (Nr. 392—409 daselbst) veröffentlicht hat.

Möbius wollte derselben in der zweiten Abhandlung über seine neue Verwandtschaft, deren Ableitung aus den Eigenschaften des Kreises ihn während des Jahres 1854 beschäftigte (D_8, pag. 157—219), Erwähnung thun. Allein der Brief Grassmann's, der ihm hierzu die Berechtigung geben sollte, gelangte erst nach Vollendung des Drucks der Schrift »*Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung*« (W. Bd. II, pag. 243—314) in seine Hände. Dieselbe erschien im Sommer des Jahres 1855, war aber im Manuscript bereits am Anfang desselben Jahres vollendet worden. Der Nachlass enthält noch die erste Bearbeitung derselben aus dem Jahre 1854.

Möbius geht hierauf zu Untersuchungen über Involutionen von Punkten einer Ebene über (D_8, pag. 230—276). Die erste Hälfte des Jahres 1855 ist die Entstehungszeit der hierher gehörigen drei Abhandlungen »*Ueber Erweiterungen des Begriffs der Involution von Punkten*« (W. Bd. II, pag. 373—382), »*Ueber Involutionen höherer Ordnung*« (W. Bd. II, pag. 383—408) und »*Theorie der collinearen Involution von Punktepaaren in einer Ebene und im Raume*« (W. Bd. II, pag. 409—432). In diesen Aufsätzen wird die collineare Involution von Punktepaaren einer Geraden in dreifacher Richtung verallgemeinert, indem erstens an die Stelle der Collineation andere Verwandtschaften treten, zweitens statt der geradlinigen Punktreihen ebene oder räumliche Punktsysteme betrachtet, drittens endlich statt der Punktepaare Ternionen, Quaternionen, etc. von Punkten gesetzt werden, welche einen ternären, quaternären, etc. Cykel (im Sinne der »Symmetrischen Figuren«) bilden. Hierdurch erscheinen diese Untersuchungen als Fortsetzungen der Theorie der symmetrischen Figuren, mit der Möbius früher schon beschäftigt gewesen war; umgekehrt wurde er durch die ersteren zur Wiederaufnahme der Bearbeitung

der letztgenannten Theorie veranlasst, ohne diese jedoch neuerdings zu Ende zu führen.

Aus dem Tagebuche D_9 (begonnen am 19. September 1855, 278 Seiten) möge zunächst die Notiz mitgetheilt werden, dass Möbius daran dachte, einen dem barycentrischen analogen Calcul zu entwickeln, indem die Stelle der Punkte jetzt durch Geraden von bestimmter Lage und Richtung vertreten werden sollte:

»Diese Geraden denken wir uns als die Richtungen von Kräften, welche auf einen frei beweglichen festen Körper wirken. Bedeute hiernach αa eine Kraft, deren Lage und Richtung einerlei mit der Lage und Richtung der Geraden a, und deren Intensität $= \alpha$ ist. Aehnliches bedeute βb, u. s. w.

Durch die Gleichung

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$$

werde ausgedrückt, dass sich die drei Kräfte αa, βb, γc das Gleichgewicht halten, dass mithin die Geraden a, b, c sich in einem Punkte der Ebene schneiden, und dass sich

$$\alpha : \beta : \gamma = \sin bc : \sin ca : \sin ab$$

verhält.

Eben so drücke

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0$$

das Gleichgewicht zwischen $\alpha a, \cdots \delta d$ aus. Man setze, wie dies immer möglich ist,

$$\alpha a + \beta b - \varrho r = 0 ,$$

so dass ϱr die Resultante von αa und βb vorstellt. Es folgt hieraus

$$\varrho r + \gamma c + \delta d = 0 .$$

Hiernach schneiden sich a, b, r in einem Punkte, und desgleichen auch c, d, r, d. h. es ist

$$r = \overline{a \cdot b \quad c \cdot d} .$$

Dabei verhält sich

$$\alpha : \beta = \sin br : \sin ra.«$$

An dieser Stelle bricht Möbius ab; auch auf anderen Blättern des Nachlasses finden sich keine weitergehenden Erörterungen über das dualistische Seitenstück zum barycentrischen Calcul.

Den Inhalt der ersten Hälfte von D_9 bilden Notizen und Zusätze zu Chasles' *Géométrie supérieure*, auf deren Studium Möbius zwei Jahre verwendete. Insbesondere das 23. Kapitel des genannten Werkes veranlasste ihn eine frühere Idee wieder aufzunehmen,

welche auf die Repräsentation imaginärer Kreise einer Kugel durch reelle Punkte im Raume Bezug hatte. (Kreisverw. § 31, 11.) Am Ende des Jahres 1856 fasste er diese Untersuchungen in dem Aufsatz »*Ueber imaginäre« Kreise*« (W. Bd. II, pag. 315—328) zusammen, über den er am 21. Februar 1857 der Gesellschaft der Wissenschaften Bericht erstattete. In engem Zusammenhang damit entstand im Jahre 1857 die Abhandlung »*Ueber conjugirte Kreise*« (W. Bd. II, pag. 329—348), welche gleichfalls in der Kreisverwandtschaft wurzelt. Vorträge hierüber hielt Möbius am 7. November 1857 und am 20. Februar 1858, worauf in demselben Jahre die Veröffentlichung in den Leipziger Sitzungsberichten erfolgte.

Aus dieser Zeit sei noch Möbius' Correspondenz mit Siebeck erwähnt, der ihm im Jahre 1857 das Manuscript einer Abhandlung über die geometrische Bedeutung der Zahlen zur Durchsicht und Beurtheilung zusendete. Diese erwarb sich Möbius' ungetheilten Beifall, wie aus dem im Nachlass aufgefundenen Concept eines Briefes an Siebeck zu ersehen ist. Möbius bespricht hierin eingehend Siebeck's Resultate und theilt ihm unter Anderen auch einen geometrischen Beweis der Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ mit:

»Einen Winkel $x_0 {}^\wedge x_n = \varphi$, dessen Spitze der Nullpunkt O und dessen Schenkel x_0 die positive Axe der x, theile man in n gleiche Theile und bezeichne die $(n-1)$ Theilungslinien in ihrer Folge mit x_1, x_2, x_3, $\cdots$ x_{n-1}. Im Punkte A der Linie x_0 errichte man auf ihr ein Perpendikel, welches die x_1 in A_1 treffe; eben so errichte man auf x_1 in A_1 ein Perpendikel, welches x_2 in A_2 treffe, desgleichen auf x_2 in A_2 ein Perpendikel, welches x_3 in A_3 treffe u. s. f. Hiernach sind die Dreiecke OA_0A_1, OA_1A_2, OA_2A_3, u. s. w. insgesammt einander ähnlich und von einerlei Sinn, und man hat daher

$$A_0 : A_1 = A_1 : A_2 = A_2 : A_3 = \text{u. s. w.},$$

folglich, wenn man noch OA_0 gleich der Längeneinheit nimmt, wodurch $A_0 = 1$ wird,

$$A_2 = A_1{}^2, \quad A_3 = A_1{}^3, \quad A_4 = A_1{}^4, \cdots \quad A_n = A_1{}^n.$$

Ferner ist der Winkel $A_0OA_1 = \frac{\varphi}{n}$, und daher

$$A_0A_1 = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{n},$$

folglich

$$A_1 = 1 + i\operatorname{tg}\frac{\varphi}{n}$$

und

$$A_n = \left(1 + i\operatorname{tg}\frac{\varphi}{n}\right)^n.$$

Je grösser nun die Zahl n der Theile des Winkels φ genommen wird, desto kleiner wird tg $\frac{\varphi}{n}$, desto weniger folglich verschieden von $\frac{\varphi}{n}$, und desto weniger ist von den Linien OA_0, OA_1, OA_2, $\cdots OA_n$ jede folgende kleiner als die vorhergehende, so dass für ein unendlich grosses n tg $\frac{\varphi}{n}$ unendlich klein und $= \frac{\varphi}{n}$, und $OA_0 = OA_1 = OA_2 = \cdots = OA_n = 1$ wird. Es ist nämlich

$$OA_1 = \sec\frac{\varphi}{n}\,,\quad OA_2 = \left(\sec\frac{\varphi}{n}\right)^2,\ \cdots\ OA_n = \left(\sec\frac{\varphi}{n}\right)^n$$

und dieses $= 1$ für $n = \infty$. Alsdann aber sind, weil der Winkel $A_0\,O\,A_n = \varphi$ ist, die Coordinaten von A_n gleich $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$, und die Gleichung (a) verwandelt sich damit in

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = \left(1 + i\frac{\varphi}{n}\right)^n\,,$$

oder wenn man den unendlich kleinen Winkel $\frac{\varphi}{n} = \omega$ setzt:

$$\begin{aligned}&\cos\varphi + i\sin\varphi\\ &= (1 + i\,\omega)^{\frac{\varphi}{\omega}} = (1 + i\,\omega)^{\frac{1}{i\omega}\cdot i\varphi}\\ &= e^{i\varphi}\,,\end{aligned}$$

weil, wie sich streng zeigen lässt, $(1 + i\omega)^{\frac{1}{i\omega}}$, eben so wie $(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}}$, für ein verschwindendes ω der Basis e der natürlichen Logarithmen gleich ist.«

Nachdem Möbius im Jahre 1858 nochmals die Ausarbeitung seiner Theorie der symmetrischen Figuren in Angriff genommen hatte, unterbrach er dieselbe bald wieder, als ihm die Preisaufgabe der Pariser Academie »Perfectionner en quelque point important la théorie géométrique des Polyèdres« bekannt wurde. Möbius scheint von vornherein seine Betheiligung an der Concurrenz in's Auge gefasst zu haben. Die Preisarbeit beschäftigte ihn von Anfang des Jahres 1858 bis zum Juni 1861 (vergl. hierzu den Inhalt von D_9, D_{10}, D_{11}). Unterbrochen wurden diese Studien, als Möbius schon die Grundzüge seiner Theorie der Polyeder festgelegt hatte, im Sommer 1859 durch die Abfassung der Abhandlung »*Neuer Beweis des in Hamilton's Lectures on Quaternions aufgestellten associativen Princips bei der Zusammensetzung von Bögen grösster Kreise auf der Kugel*« (W. Bd. II, pag. 55—70, vergl. den Schluss von D_9), worauf

er im October 1859 den Aufsatz »*Entwickelung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie in grösstmöglicher Allgemeinheit*« (W. Bd. II, pag. 71—88) folgen liess. Nach Vollendung der Preisarbeit, also in der zweiten Hälfte des Jahres 1861, trat er an neue Untersuchungen heran. Möbius studirte die Eigenschaften unendlich dünner Strahlenbündel, deren geometrische Entwickelung er 1862 in den Leipziger Berichten veröffentlichte (W. Bd. IV, pag. 569—588) und arbeitete an einer Zusammenstellung seiner Resultate aus der Lehre von der geometrischen Addition und Multiplication. Mittlerweile war in Paris die Entscheidung über den grossen mathematischen Preis erfolgt: keine von den acht eingesendeten Arbeiten wurde desselben für würdig befunden. Möbius veröffentlichte daher die wesentlichsten Resultate seiner der Pariser Academie eingesendeten Schrift nach Vervollständigung derselben und sorgfältiger Revision durch die beiden Abhandlungen »*Theorie der elementaren Verwandtschaft*« (W. Bd. II, pag. 433—472) und »*Ueber die Bestimmung des Inhalts eines Polyeders*« (W. Bd. II, pag. 473—512), mit welchen er seine litterarische Thätigkeit beschloss. Mehreres von dem, was Möbius bei dieser Zweitheilung seiner Preisarbeit ausgeschieden, ist in Verbindung mit hierher gehörigen Zusätzen aus den Diarien D_9, D_{10}, D_{11} in der ersten Mittheilung aus dem Nachlass »*Zur Theorie der Polyeder und der Elementarverwandtschaft*« (W. Bd. II, pag. 513—560) gesammelt und veröffentlicht worden; die vorangehende Vorbemerkung giebt zugleich Genaueres über die Entstehung dieser letzten grösseren Arbeiten von Möbius. Den sonstigen Inhalt von D_{10} und D_{11} bilden im Wesentlichen Notizen und Zusätze zu Hesse's *analytischer Geometrie*, Delaunay's *Mécanique rationelle* und Hamilton's *Lectures on Quaternions*. Den Forschungen dieses ebengenannten, Möbius in hohem Grade geistesverwandten Mathematikers sind die letzten Aufzeichnungen in D_{11} gewidmet, deren unsichere Schriftzüge das hohe Alter und die schnell schwindende Kraft ihres Verfassers deutlich kund geben.

IV. Chronologisch geordnetes Verzeichniss von Möbius' Gesammelten Werken

der in Band I—IV veröffentlichten Schriften und Abhandlungen.

Mittheilungen aus dem Nachlass.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

